

5
M-89

490

✓

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

P-490

Ч. Музикарж

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА
В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Дубна 1960 год

P-490

Ч. Музикарж^{x/}

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА
В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Объединенный институт
ядерных исследований
БЖБ МОТЕНА

^{x/} Постоянный адрес: Физико-математический факультет Карлова
Университета, Прага, Чехословакия.

570/7 чр.

А н н о т а ц и я

В работе рассматривается излучение Вавилова-Черенкова для электрического заряда, равномерно движущегося в произвольном направлении относительно оптической оси одноосного кристалла. Изучается геометрическая форма конусов нормалей обыкновенных и необыкновенных волн и выводятся простые выражения для энергии излучаемых волн.

1. Введение

Общая теория излучения Вавилова-Черенкова в оптически анизотропных средах была развита В.Л. Гинзбургом¹. Исходя из уравнений Максвелла для немагнитных прозрачных кристаллов, он получил выражения для углового распределения излучаемой энергии. Более подробно были исследованы только свойства излучения заряженных частиц, движущихся в одноосных кристаллах, параллельно и перпендикулярно оптической оси^{1/}. В последнее время В.Е. Пафомов⁴ рассматривал более реальный случай ограниченного одноосного кристалла, у которого на излучение Вавилова-Черенкова налагается переходное излучение.

И.М. Франк^{5,6}, используя интерференционные свойства излучения Вавилова-Черенкова, исследовал условия, необходимые для возникновения излучения. В⁵ в первый раз было показано, что направление светового луча и скорость по лучу играют при этом важную роль.

В этой статье предполагается, что кристалл является прозрачным, без гиротропных свойств. Его магнитные свойства определяет скалярная магнитная проницаемость μ и диэлектрические свойства - диэлектрическая постоянная ϵ_{ik} , которая является симметричным тензором. В главной системе координат его компоненты $\epsilon_{ii} > 0$. Точечный заряд движется в направлении единичного вектора \vec{k} со скоростью $w = \beta c$.

Для энергии, которую теряет заряд в течение времени $1/w$, имеем формулу:

$$S = \int d\omega \sum_{\lambda=1,2} S_{(\lambda)}(\omega), \quad (1/)$$

в которой частотная плотность излучения волн поляризации λ равняется:

$$S_{(\lambda)}(\omega) = \frac{e^2 c^2 \omega}{2\pi \mu} \int d(\vec{n}) \frac{(\vec{e}^{(\lambda)} \cdot \vec{k})^2}{v_{(\lambda)}^4} \delta(\vec{k} \cdot \vec{n} - \frac{v_{(\lambda)}}{c} \frac{1}{\beta}). \quad (2/)$$

^{1/} См. обзорную статью Б.М. Болотовского² и книгу Дж. В. Джелли³.

В этом выражении приняты следующие обозначения: $d(\vec{n})$ - элемент телесного угла, \vec{n} - единичный вектор в направлении распространения фазы волны, $v_{(\lambda)} > 0$ - скорость этого распространения, $\vec{e}^{(\lambda)}$ - векторы в направлении электрического поля.

Введем единичные векторы $\vec{d}^{(\lambda)}$, направленные вдоль электрической индукции и имеющие свойства:

$$\vec{d}^{(\lambda)} \cdot \vec{d}^{(\nu)} = \delta^{(\lambda\nu)}, \quad \vec{n} \cdot \vec{d}^{(\lambda)} = 0, \quad d_i^{(\lambda)} = \epsilon_{ik} e_k^{(\lambda)} \quad /3/$$

Тогда эти уравнения вместе с условием

$$\vec{e}^{(\lambda)} \cdot \vec{d}^{(\lambda)} = 0 \quad /4/$$

определяют векторы поляризации. Скорость соответствующих волн получим из формулы

$$v_{(\lambda)}^2 = \frac{c^2}{\mu} \vec{e}^{(\lambda)} \cdot \vec{d}^{(\lambda)} \quad /5/$$

Так как в дальнейшем будем рассматривать одноосные кристаллы, то направим оптическую ось вдоль оси x_1 . Компоненты диагонального тензора диэлектрической постоянной обозначим следующим образом: $\epsilon_{11} = \epsilon$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon'$. Пусть заряд движется в плоскости (x_1, x_2) , которую назовем главной:

$$\vec{k} \equiv (k_1, k_2, 0), \quad k_1^2 + k_2^2 = 1, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0 \quad /6/$$

В дальнейшем исследуем отдельно свойства обыкновенных и необыкновенных волн. Для индексов $\lambda = 1, 2$ введем обозначение $\lambda = o, e$.

2. Обыкновенные волны

Вектор поляризации и скорость распространения обыкновенных волн получаются из уравнений /3/ - /5/ в следующем виде:

$$\vec{e}^{(o)} \equiv (0, n_3, -n_2) \frac{1}{\epsilon \sqrt{1-n_1^2}}, \quad v_{(o)} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad /7/$$

С помощью этих формул выражение /2/ можно привести к форме:

$$S_{(0)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{2\pi c^2} \int d(\vec{n}) \frac{\kappa_2^2 \kappa_3^2}{1 - \kappa_1^2} \delta\left(\vec{n} \cdot \vec{\kappa} - \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon \mu}}\right). \quad /8/$$

Здесь, как и в изотропной среде, энергия будет излучаться в направлении конической поверхности кругового сечения, ось которой параллельна движению заряда. Угол излучения $\theta_{(0)}$ выражается с помощью формулы

$$\cos \theta_{(0)} = \beta_0 / \beta, \quad /9/$$

в которой величина

$$\beta_0 = (\epsilon \mu)^{1/2} \quad /10/$$

определяет критическую скорость заряда: если β меньше β_0 , то излучение обыкновенных волн становится невозможным^{2/}.

Из задачи ясно, что для вычисления интеграла в /8/ удобно ввести сферические координаты, полярная ось которых совпадает с осью конуса нормалей:^{3/}

$$n_1 = \kappa_1 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad n_2 = \kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_1 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad n_3 = \sin \vartheta \sin \varphi. \quad /11/$$

Таким образом, из /8/ получим:

$$S_{(0)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{2\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) \frac{\kappa_2^2 \sin^2 \varphi}{1 - [\kappa_1(\beta_0/\beta) - \kappa_2 \sqrt{1 - (\beta_0/\beta)^2} \cos \varphi]^2}. \quad /12/$$

Если знаменатель в /12/ записать в виде произведения двух линейных в $\cos \varphi$ полиномов, то можно /12/ выразить в виде суммы двух элементарных интегралов, вычисление которых приводит к выражению

^{2/} С помощью индексов o и e без скобок обозначаем величины, связанные с критической скоростью.

^{3/} См. рис.1, который нарисован для более общего случая необыкновенных волн. В рассматриваемом случае направления $\vec{\kappa}$ и \vec{k} одинаковы.

$$\pi \left(2 - \left(\kappa_1 + \frac{\beta_0}{\beta} \right) - \left| \kappa_1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right| \right)$$

Знак разности $\kappa_1 - \beta_0/\beta$ имеет наглядный геометрический смысл, вытекающий из /9/ и из значения направляющего косинуса κ_1 , а именно: если $\kappa_1 < \beta_0/\beta$ - оптическая ось находится вне конуса нормалей, и если $\kappa_1 > \beta_0/\beta$, то она внутри его. Таким образом, имеем

$$S_{(o)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} (1 - \kappa_1) \quad , \text{ если опт. ось внутри конуса,} \quad /13/$$

$$S_{(o)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \quad , \text{ если опт. ось вне конуса.} \quad /14/$$

Рассмотрим эти выражения несколько подробнее. Если заряд движется по оптической оси ($\kappa_1 = 1$), то для всех скоростей больших, чем критическая, имеет место формула /13/, согласно которой $S_{(o)}(\omega) = 0$, как было уже показано в работе ¹. При всех других направлениях движения заряда при $\beta \geq \beta_0$ излучение непрерывно возрастает от нуля согласно формуле /14/. При этом, если $\kappa_1 > \beta_0$, то существует скорость ($\beta = \beta_0/\kappa_1$), при которой формула /14/ переходит непрерывно в /13/ и для более высоких скоростей заряда обыкновенное излучение /на единицу пути/ уже больше не возрастает. Если, наконец, $\kappa_1 < \beta_0$ /это значит, что угол между направлением движения заряда и оптической осью достаточно велик/, то выражение /14/ справедливо для всех скоростей, больших критической. В частности, для движения заряда перпендикулярно оптической оси из /14/ следует результат, полученный раньше ².

Наконец, рассмотрим еще поляризацию обыкновенных волн. Если нормаль пробегает коническую поверхность, то согласно /7/ и /11/ векторы $\vec{e}^{(o)}$ составляют веер /точнее говоря, двухвеер/ в плоскости перпендикулярной оптической оси. Осью этого веера является перпендикуляр к главной плоскости /ось X_3 /. Крайних положений в веере достигает вектор $\vec{e}^{(o)}$ для минимального значения $|e_i^{(o)}|$. Если оптическая ось находится вне конуса, то, как показывают расчеты, этого минимального значения достигают векторы $\vec{e}^{(o)}$, которые соответствуют нормальям, удовлетворяющим условию

$$k_1 - n_1 \vec{n} \cdot \vec{k} = 0.$$

Ясно, что эти нормали совпадают с прямыми, которые являются линиями касания конуса и плоскостей, проходящих через оптическую ось. Угол 2η между этими касательными плоскостями является вершинным углом веера и для него получим значение

$$\cos \eta = \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{\beta_0^2}{\beta^2} - k_1^2}. \quad /15/$$

При данной скорости заряда угол η принимает наименьшее значение в случае движения перпендикулярно оптической оси, причем он равен $\theta_{(0)}$. Если направление движения приближается к оптической оси, угол η возрастает, а когда конус соприкасается с оптической осью, то он достигает значения $\pi/2$. Тогда направления векторов поляризации заполняют всю плоскость. Ясно, что последнее утверждение будет иметь место также тогда, когда оптическая ось будет внутри конуса.

3. Коническая поверхность нормалей необыкновенных волн

В этом разделе мы займемся геометрическими свойствами излучаемого света. К обсуждению вопроса об интенсивности излучения вернемся позже. Для единичного вектора $\vec{d}^{(e)}$ из /3/ и /7/ получается следующее выражение:

$$\vec{d}^{(e)} \equiv (1 - n_1^2, -n_1 n_2, -n_1 n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}}. \quad /16/$$

Вектор $\vec{e}^{(e)}$ и скорость распространения фазы $v_{(e)}$ определим с помощью /3/ и /5/:

$$\vec{e}^{(e)} \equiv \left(\frac{1 - n_1^2}{\tau}, -\frac{n_1 n_2}{\varepsilon}, -\frac{n_1 n_3}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}}, \quad /17/$$

$$v_{(e)} = \frac{c}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{\tau} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tau} \right) n_1^2 \right]^{1/2}. \quad /18/$$

Направление $\vec{\beta}^{(e)}$ необыкновенного луча и скорость по лучу $u_{(e)}$ следуют из /17/ и /7/:

$$\vec{\beta}^{(e)} \equiv (\epsilon n_1, \epsilon n_2, \epsilon n_3) \frac{1}{[\epsilon^2 + (\epsilon^2 - \epsilon^2) n_1^2]^{1/2}}, \quad u_{(e)} = \frac{v_{(e)}}{\vec{n} \cdot \vec{\beta}^{(e)}} \quad /19/$$

Теперь мы знаем все величины, которые определяют необыкновенные волны, так что можно вернуться к изучению геометрической формы конической поверхности нормалей, уравнение для которой вытекает из δ -функции в /2/:

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 = \frac{v_{(e)}}{c} \frac{1}{\beta} \quad /20/$$

Так же, как и при изучении обыкновенных волн, введем сферические координаты, но о полярной оси \vec{k} предположим только то, что она находится в главной плоскости /см. рис. 1/:

$$n_1 = k_1 \cos \vartheta - k_2 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad n_2 = k_2 \cos \vartheta + k_1 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad n_3 = \sin \vartheta \sin \varphi. \quad /21/$$

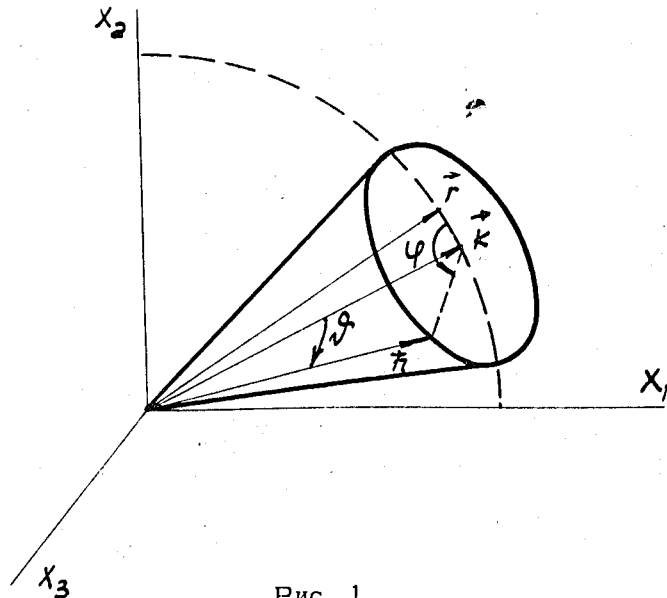


Рис. 1.

Таким образом, уравнение конуса нормалей принимает следующий вид:

$$P \cos^2 \vartheta + Q \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2[Ak_1 k_2 - \kappa_1 \kappa_2 (k_1^2 - k_2^2)] \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi = R. \quad /22/$$

Для упрощения мы ввели сокращения:

$$A = \left(\kappa_1^2 - \frac{1}{\varepsilon \mu \beta^2} \right) - \left(\kappa_2^2 - \frac{1}{\varepsilon \mu \beta^2} \right), \quad R = \frac{1}{\varepsilon \mu \beta^2}, \quad /23/$$

$$P = (k_1 \kappa_1 + k_2 \kappa_2)^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{k_1^2}{\mu \beta^2}, \quad Q = (k_2 \kappa_1 - k_1 \kappa_2)^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{k_2^2}{\mu \beta^2}.$$

Неопределенность, которую пока мы имеем в выборе направляющих косинусов k_1 и k_2 , используем для упрощения уравнения /22/. Наложим условие

$$Ak_1 k_2 - \kappa_1 \kappa_2 (k_1^2 - k_2^2) = 0, \quad /24/$$

которое, вместе с $k_1^2 + k_2^2 = 1$, определяет k_1 и k_2 :

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{A}{(A^2 + 4\kappa_1^2 \kappa_2^2)^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{A}{(A^2 + 4\kappa_1^2 \kappa_2^2)^{1/2}} \right)^{1/2}. \quad /25/$$

Следовательно, из /22/ и /24/ получаем следующие выражения для косинуса нормалей необыкновенных волн:

$$\vartheta = \Theta_{(e)}(\varphi), \quad /26/$$

где

$$\cos \Theta_{(e)} = \left(\frac{R - Q \cos^2 \varphi}{P - Q \cos^2 \varphi} \right)^{1/2}. \quad /27/$$

Из формы правой части последнего выражения видно, что конус имеет ось симметрии, а именно: полярную ось наших сферических координат. В общем случае сечением конуса будет эллипс, как это вытекает также из геометрической интерпретации В.Е.Пафомова^{4,5}.

Критическую скорость определяет условие $\theta_{(e)} = 0$, для выполнения которого необходимо, чтобы $P=R$ или, используя формулы /23/:

$$\left(k_1^2 - \frac{1}{\epsilon\mu\beta^2}\right)k_1^2 + \left(k_2^2 - \frac{1}{\tau\mu\beta^2}\right)k_2^2 + 2k_1k_2\kappa_1\kappa_2 = 0 \quad /28/$$

Из этого уравнения и из /25/ получим для критической скорости:

$$\beta_e = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\kappa_1^2 + \tau\kappa_2^2}} \quad /29/$$

Конус нормалей в этом случае вырождается в прямую, направляющие косинусы которой равны

$$k_{1e} = \frac{\epsilon\kappa_1}{\sqrt{\epsilon^2\kappa_1^2 + \tau^2\kappa_2^2}}, \quad k_{2e} = \frac{\tau\kappa_2}{\sqrt{\epsilon^2\kappa_1^2 + \tau^2\kappa_2^2}} \quad /30/$$

Наконец, скорость распространения фазы этой критической волны будет

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\epsilon\kappa_1^2 + \tau\kappa_2^2}{\epsilon^2\kappa_1^2 + \tau^2\kappa_2^2} \right)^{1/2} \quad /31/$$

Если положить в /19/ $n_1 = k_{1e}$, $n_2 = k_{2e}$, $n_3 = 0$, $v_{(e)} = v_e$, получим $\vec{\beta}^e = \vec{\kappa}$, $u_e = c\beta_e$. Этот результат совпадает с утверждением И.М.Франка⁵, согласно которому сначала возникает волна, луч которой направлен по движению заряда. Скорость совпадает при этом со скоростью по лучу.

Для частиц, скорость которых близка к критическому значению, полученные выражения для k_1 , k_2 и $\cos \theta_{(e)}$ можно несколько упростить, если эти функции разложить в степенной ряд по $\delta = 1 - \beta_e/\beta$ и взять только первые два члена:

$$k_1 = k_{1e} \left[1 - 2k_{2e}^2 \mu(\epsilon - \tau) \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \delta \right], \quad k_2 = k_{2e} \left[1 + 2k_{1e}^2 \mu(\epsilon - \tau) \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \delta \right],$$

$$\cos \theta_{(e)} = 1 - \frac{\tau}{\epsilon} \left(\frac{v_e}{v_0} \right)^4 \frac{\delta}{\cos^2 \varphi + (v_e/v_0)^2 \sin^2 \varphi} \quad /32/$$

Из формул /30/ видно, что у отрицательных кристаллов ($\epsilon > \tau$) направление распространения волны, возникающей при критической скорости, находится между направлением движения заряда и оптической осью. У положительных кристаллов ($\epsilon < \tau$) эта нормаль будет лежать вне угла, образованного направлением движения заряда и оптической осью. Если скорость заряда возрастает, то, согласно /32/, ось конуса приближается для всех кристаллов к направлению движения заряда, но не совпадает с ней даже при $\beta = 1$ /за исключением выделенных случаев $\kappa_1 = 1$ и $\kappa_1 = 0$, когда оси конусов и направление движения тождественны/.

Конусы обыкновенных и необыкновенных волн не могут пересекаться. Только если $\beta = \beta_0 / \kappa_1$, то они соприкасаются вдоль оптической оси.

Векторы поляризации $\vec{d}^{(e)}$ необыкновенных волн определяются формулой /16/. Если выразить \vec{n} с помощью /21/ и /26/, то формула /16/ представляет параметрические уравнения конуса поляризаций. Аналитическое выражение направляющей этого конуса несколько сложно. Для дальнейших соображений достаточно воспользоваться следующей оценкой.

Если оптическая ось находится вне конуса нормалей, то направления поляризации заключены внутри пирамид, грани которых составляют следующие плоскости: 1/ касательные плоскости конуса нормалей, проходящие через оптическую ось κ_1 ; 2/ плоскости, проходящие через ось κ_3 и перпендикулярные образующим конуса нормалей, лежащим в главной плоскости (κ_1, κ_2) . /См. рис. 2, который нарисован для $\kappa_1 = 0$. Пирамиды следует продолжить симметрично на противоположную сторону оптической оси. Аналогично и на рис. 3 /

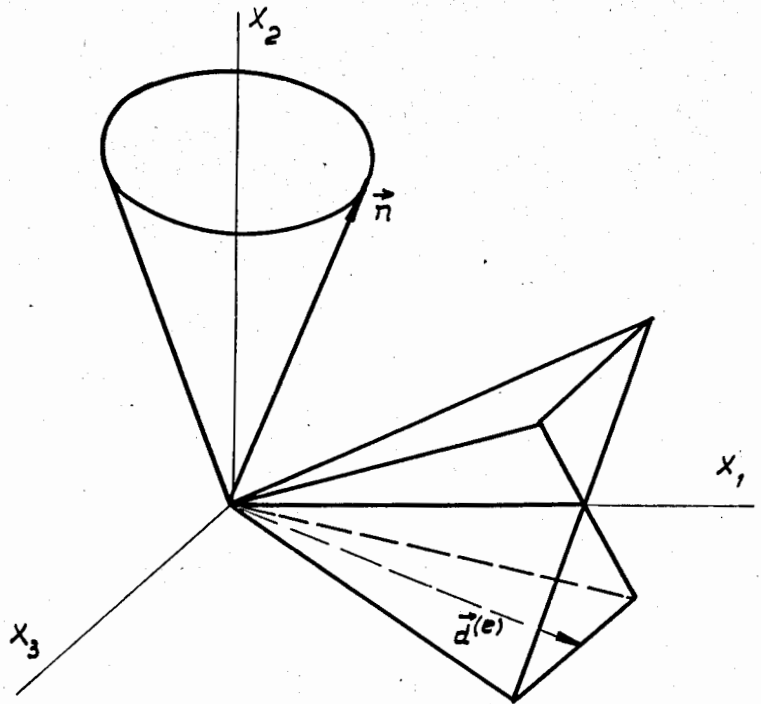


Рис. 2

Если оптическая ось находится внутри конуса нормалей, то картина изменится, так как касательных плоскостей, проходящих через оптическую ось, больше нет. На рис. 3 нарисован конус поляризаций для $n_1 = 1$.

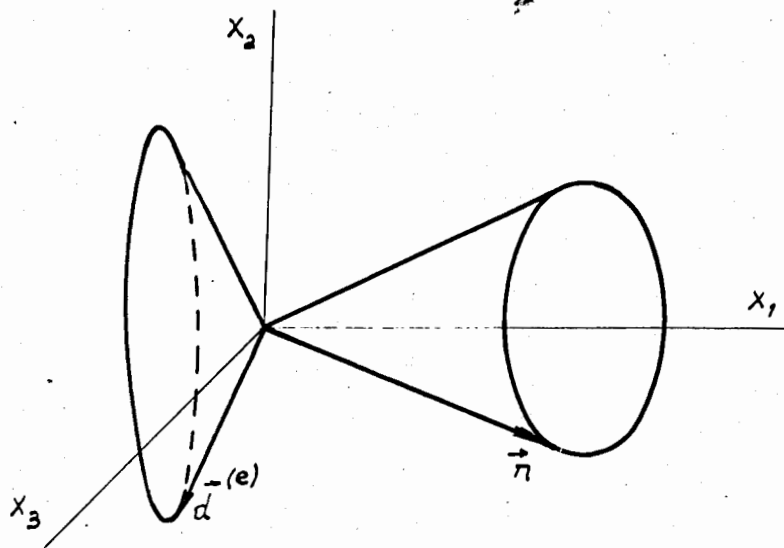


Рис. 3

4. Энергия необыкновенных волн

Вернемся теперь к вычислению энергии, которую заряд теряет при своем движении в виде необыкновенных волн. На конической поверхности нормалей /20/ справедливо следующее равенство:

$$\vec{k} \cdot \vec{e}^{(e)} = \frac{\kappa_1 \mu \left(\frac{v_{(e)}}{c} \right)^2 - \frac{n_1}{\epsilon} \vec{n} \cdot \vec{k}}{\sqrt{1-n_1^2}} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{\epsilon \sqrt{1-n_1^2}} \left(\kappa_1 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \vec{n} \cdot \vec{k} - n_1 \right).$$

Если использовать еще тождество

$$\delta \left(\vec{n} \cdot \vec{k} - \frac{v_{(e)}}{c} \frac{1}{\beta} \right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k} \delta(\cos \vartheta - \cos \theta_{(e)})}{\sqrt{(R-Q \cos^2 \varphi)(P-Q \cos^2 \varphi)}},$$

то формула /2/ принимает вид:

$$S_{(e)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{2\pi c^2} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{(R-Q \cos^2 \varphi)(P-Q \cos^2 \varphi)}} \times$$

/33/

$$\times \left\{ -\frac{\epsilon}{\tau} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 \frac{1}{\vec{n} \cdot \vec{k}} + \frac{1}{1-n_1^2} \left[\left(\kappa_1^2 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 - 1 \right) \vec{n} \cdot \vec{k} + 2n_2 \kappa_2 \right] \right\}.$$

В Дополнении будет показано, что значение этого интеграла опять существенным образом зависит от относительного положения конуса нормалей и оптической оси. После вычисления получим /см. Дополнение/:

$$S_{(e)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(\kappa_1 - \frac{\beta \epsilon \beta_0}{\beta^2} \right), \text{ если опт. ось внутри конуса,} \quad /34/$$

$$S_{(e)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(1 - \frac{\beta \epsilon}{\beta} \right) \frac{\beta_0}{\beta}, \text{ если опт. ось вне конуса.} \quad /35/$$

Исследование этих формул опять показывает, что при нарастании скорости заряда от критического значения $c\beta_e$ излучаемая энергия возрастает от нуля, согласно формуле /35/. В области направлений движения заряда, где возможна скорость $\beta = \beta_0/\kappa_1$, /35/ непрерывно переходит в /34/. Для движения вдоль оптической оси справедлива для всех скоростей формула /34/.

Для частных случаев $\mathcal{N}_1 = 1$ и $\mathcal{N}_1 = 0$ наши формулы совпадают с результатами, полученными раньше ².

5. Полное излучение

Интересной является форма выражения для энергии полного излучения $S(\omega) = S_{(o)}(\omega) + S_{(e)}(\omega)$. Сначала, когда скорость заряда находится между критическими скоростями, возникают волны только одной поляризации. В этой области скоростей оптическая ось находится вне конуса и полное излучение равно или

$$S(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(1 - \frac{\beta_o}{\beta}\right), \quad /36/$$

или

$$S(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(1 - \frac{\beta_e}{\beta}\right) \frac{\beta_o}{\beta}, \quad /37/$$

в зависимости от того, является ли кристалл отрицательным или положительным. У изотропных сред эта область отсутствует, так как для них $\beta_o = \beta_e$.

При скоростях, для которых существуют обыкновенные и необыкновенные волны /и тоже всегда для $\mathcal{N}_1 = 1/$, энергия полного излучения определяется следующей формулой

$$S(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{c^2} \left(1 - \frac{\beta_o \beta_e}{\beta^2}\right), \quad /38/$$

независимо от относительного положения оптической оси и конусов нормалей. С первого взгляда видна аналогия между формулой /36/ и известной формулой для излучения в изотропной среде.

Во всех формулах /36/, /37/ и /38/ для полного излучения любопытно то, что характеристические оптические свойства кристалла и параметры движения заряда входят только через величины β_o/β и β_e/β .

6. Заключение

Полученные результаты показывают, что вопреки известным осложнениям, вытекающим из более сложной структуры электромагнитного поля в анизотропных средах, основные свойства излучения Вавилова-Черенкова в одноосных кристаллах выражаются в простом виде. Это касается прежде всего энергии полного излучения, которая играет роль в ряде применений эффекта /счетчики, потери на излучение при движении частицы через вещество/.

Для непосредственного сравнения с опытом нужно учесть влияние поверхности кристалла. Возникающим на поверхности переходным излучением можно пренебречь, подобно тому как это делается при изучении излучения в изотропных средах. Изменение формы конусов нормалей после выхода из кристалла можно учесть с помощью закона преломления для волновых нормалей. Более сложным образом может влиять граничная поверхность кристалла на интенсивность излучения.

В заключение пользуюсь возможностью выразить признательность проф. И.М. Франку за внимание к работе и полезные обсуждения.

Дополнение

Формулу /33/ выразим в следующем виде:

$$S_{(e)}(\omega) = \frac{e^2 \omega \mu}{2\pi c^2} \left(\frac{\beta_0}{\beta}\right)^2 (I_1 + I_2) \quad /1'/$$

Роль интегралов I_1 и I_2 непосредственно вытекает из /33/. Выразив $\vec{n} \cdot \vec{k}$ с помощью /21/, устранив корни в знаменателе и опустив члены нечетные в $\cos \varphi$, получим

$$I_1 = -\frac{\epsilon}{\tau} \left(\frac{\beta_0}{\beta}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{k_1 k_1 + k_2 k_2}{R(k_1 k_1 + k_2 k_2)^2 \sin^2 \varphi - T \cos^2 \varphi}$$

где

$$T = (k_1 \kappa_1 + k_2 \kappa_2)^2 (Q-R) + (k_2 \kappa_1 - k_1 \kappa_2)^2 (P-R) = -\frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta_0}{\beta_e} \right)^2.$$

Подстановка $y = tq\varphi$ приводит к результату

$$I_1 = -2\pi \beta_e / \beta_0 \quad /2'/$$

Подобным способом получим последовательно для I_2 следующие выражения:

$$I_2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Uy^2 + X}{(Wy^2 + 2iDy - M)(Wy^2 - 2iDy - M)} dy = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ay + b}{Wy^2 - 2iDy - M} dy, \quad /3'/$$

в которых

$$W = P - k_1^2 R, \quad D = k_1(P-R), \quad M = k_1^2(P-R) + k_2^2(Q-R) = \kappa_1^2 - (\beta_0/\beta)^2,$$

$$U = W \left[(\beta/\beta_0)^2 (k_1 \kappa_1 + k_2 \kappa_2) M + 2k_2 \kappa_2 \right],$$

$$X = (\beta/\beta_0)^2 M \left[2\kappa_1 D - (\beta/\beta_0)^2 (k_1 \kappa_1 + k_2 \kappa_2) M - 2\kappa_2 \kappa_2 (\beta_0/\beta)^2 \right],$$

$$a = (UM + XW) / (4MDi), \quad b = -X / (2M).$$

После интегрирования получим

$$I_2 = \frac{4\pi i}{W} \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(ib - az_1) \operatorname{sgn} z_1 - (ib - az_2) \operatorname{sgn} z_2 \right],$$

где iz_1 и iz_2 являются корнями знаменателя в /3'/:

$$z_{1,2} = \frac{D \pm k_2 \kappa_2 \beta_0 / \beta}{W}.$$

Корень $z_1 > 0$. Знак у z_2 зависит от относительного положения оптической оси и конуса нормалей, так как $z_2 = 0$ для $\beta = \beta_0/\kappa_1$. Таким образом, получим

$$I_2 = 2\pi (\beta/\beta_0)^2 \kappa_1 \quad \text{и} \quad I_2 = 2\pi \beta/\beta_0 \quad /4'/$$

для $\kappa_1 > \beta_0/\beta$ и $\kappa_1 < \beta_0/\beta$ соответственно. Из /1'/, /2'/' и /4'/' вытекают уже непосредственно формулы /34/ и /35/.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1960 года.

Л и т е р а т у р а

- 570/7 48
1. В.Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 6, 601 и 608, 1940.
 2. Б.М. Болотовский. УФН, 67, 201, 1957.
 3. J.V. Jelley. *Cerenkov Radiation and its Applications*, Pergamon Press, London, 1958.
 4. В.Е. Пафомов. ЖЭТФ, 36, 1853, 1959. Диссертация. ФИАН, 1957.
 5. И.М. Франк. УФН, 68, 397, 1959.
 6. И.М. Франк. ЖЭТФ, 1960, в печати.

Объединенный институт
ядерных исследований
Библиотека