

5
185
С-3
СЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

P-480

В.Г. Гришин, В.А. Никитин, М.И. Подгорецкий

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

Дубна 1960 год

P-480

В.Г. Гришин, В.А. Никитин, М.И. Подгорецкий

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

8
7/865

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа написана физиками-экспериментаторами для физиков-экспериментаторов.^{х)} Целью её является рассмотрение понятия изотопического спина, которое стало в последнее время фундаментальным при исследовании широкого класса процессов, происходящих с элементарными частицами. Техника получения изотопических соотношений достаточно проста и обща. В то же время в её основе лежит физически ясная гипотеза, и все рассуждения удаётся провести до конца и вполне строго. Сейчас, когда нет ещё удовлетворительной теории процессов, в которых участвуют элементарные частицы это обстоятельство кажется особенно ценным.

Понятие изотопического спина математически аналогично понятию собственного механического момента количества движения. Строгая теория последнего строится обычно на базе теории групп. Математический аппарат здесь достаточно сложен и, как правило, неизвестен экспериментаторам. Это обстоятельство мешает им использовать в полной мере изотопический анализ в повседневной практике. Авторы настоящей работы сделали попытку изложить материал, не привлекая теорию групп. В основу изложения положены простые физические соображения доступные

х) Основой послужили лекции, прочитанные одним из нас (М.И.Подгорецким) в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ весной 1959 г.

широкому кругу читателей ^{х)}

Основное внимание уделено нами разъяснению физического смысла понятия изотопического спина и методов получения изотопических равенств и неравенств применительно к сильным взаимодействиям элементарных частиц. В соответствии с этим изотопические соотношения при распадах элементарных частиц рассмотрены очень кратко, а процессы с участием γ - квантов и изотопические соотношения в реакциях с участием ядер не рассмотрены во все ^{хх)}. Не рассмотрены также пределы применимости

х) Предполагается, что читатель знаком с основными положениями квантовой механики. Из более специальных вопросов требуется иметь общее представление о различных типах взаимодействий (сильном, слабом и электромагнитном) и о классификации элементарных частиц, связанной с понятием "странности".

хх) По последнему вопросу см, например, А.С. Давыдов "Теория атомного ядра" Государственное издательство физ.мат.литературы, Москва 1958 г.

изотопических соотношений, связанные с влиянием электромагнитных взаимодействий. Относящиеся сюда вопросы мало разработаны, сложны и не слишком существенны для физики высоких энергий.

Для облегчения основного текста материалы справочного характера, все сколько-нибудь громоздкие вычисления и некоторые специальные вопросы изложены в соответствующих приложениях. По характеру изложения настоящая работа не является обзором. Поэтому, мы считали возможным не приводить, как правило, литературных ссылок, за исключением тех случаев, когда соответствующие материалы не опубликованы в широкой печати.

Авторы признательны М.Я.Данышу за участие во всех обсуждениях.

Нам также приятно поблагодарить И.М.Граменицкого, Г.В. Ефимова, Л.Г. Заставенко, Г.И.Копылова, Ю.Б.Королевича, **Н.И.Петухову**, В.Н.Стрельцова и Д.С.Чернавского за полезные дискуссии по ряду отдельных вопросов. При обсуждении главы УШ существенную помощь оказали А.И.Мухин, С.Б.Нурушев и Ю.Д. Прокошкин.

ГЛАВА I.

ГИПОТЕЗА ИЗОТОПИЧЕСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ.

§ I. Изотопический спин.

Исходным пунктом может служить рассмотрение нейтрона и протона, как одной частицы - нуклона, находящейся в разных зарядовых состояниях. Основанием для такого подхода является почти полная идентичность основных свойств протона и нейтрона. В качестве примера можно указать на одинаковые спины и примерное равенство масс (с точностью до 0,2 %).

Аналогия между протоном и нейтроном раскрывается ещё более полно при изучении ядерных сил. Достаточно упомянуть симметрию в свойствах так называемых зеркальных ядер^{x)}. Зеркальные ядра, такие как He^3 и H^3 или C^{14} и O^{14} , имеют одинаковые спины, равные энергии связи (если пренебречь электромагнитным взаимодействием протонов) и сходное строение спектра возбужденных уровней. Это обстоятельство можно считать экспериментальным доказательством тождественности ядерных сил, действующих между протонами и нейтронами. Имеется много экспериментальных указаний на то, что системы $\{p/p\}$, $\{p/n\}$ и $\{n/n\}$ находящиеся в одинаковых пространственных и спиновых состояниях, очень близки друг к другу во всех явлениях, где роль электромагнитных взаимодействий мала.

Аналогично обстоит дело с π^+ , π^0 и π^- - мезонами, о которых можно сказать, что они являются тремя зарядовыми состояниями одной и той же частицы - пиона. Хорошо известны примеры

x) Два ядра называются зеркальными, если одно получается из другого заменой всех нейтронов на протоны и наоборот.

и из области странных частиц, где также существуют отчётливо выраженные зарядовые мультиплеты, т.е. семейства близких друг к другу частиц.

Принятое в настоящее время распределение частиц по мультиплетам приведено в таблице I.

Компоненты мультиплетов обладают совершенно идентичными свойствами (если пренебречь слабыми и электромагнитными взаимодействиями), различаясь только величиной и знаком электрического заряда. Следует подчеркнуть, что всё последующее рассмотрение относится только к таким явлениям, в которых влияние электромагнитных взаимодействий пренебрежимо мало. Поэтому роль электрического заряда остаётся чисто маркировочной (внутри данного зарядового мультиплета).

Таким образом, каждому компоненту мультиплета сопоставляется некоторое маркировочное число - его электрический заряд. Для дублета нуклонов, например, заряды $+1$ и 0 соответствуют протону и нейтрону. Для триплета пионов заряды $+1$, 0 и -1 соответствуют π^+ , π^0 и π^- - мезону и т.д. (см. таблицу I). Теперь мы вплотную подошли к понятию изотопического спина, которое вводится для описания зарядовых состояний частиц, входящих в мультиплет. Все частицы некоторого мультиплета характеризуются в этой схеме вектором изотопического спина T , определенным в некотором вспомогательном пространстве и равны по абсолютной величине $\frac{n-1}{2}$, где

n - число компонент в мультиплете. Для синглета $T=0$, для дублета $T = \frac{1}{2}$ и т.д. Отдельным членам мультиплета соответствуют разные проекции этого вектора на одну из осей

Таблица I

Инициалы состояния	T_1	T_2	Стрелки	Заряд	Барионное число
p, n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	+1, 0	+1
\bar{p}, \bar{n}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	-1, 0	-1
π^+, π^0, π^-	1	1, 0, -1	0	+1, 0, -1	0
K^+, K^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	+1	+1, 0	0
K^-, \bar{K}^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	-1	-1, 0	0
Λ^0	0	0	-1	0	+1
$\bar{\Lambda}^0$	0	0	+1	0	-1
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1	1, 0, -1	-1	+1, 0, -1	+1
$\bar{\Sigma}^+, \bar{\Sigma}^0, \bar{\Sigma}^-$	1	-1, 0, +1	+1	-1, 0, +1	-1
Ξ^0, Ξ^+	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	-2	-1, 0	+1
Ξ^-, Ξ^0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	+2	+1, 0	-1

координат, например, на ось Z . Так, протону соответствует $T_z = +\frac{1}{2}$, нейтрону $T_z = -\frac{1}{2}$.

Для триплета пионов, очевидно, $T=1$ и π^+ -мезону соответствует $T_z = +1$, π^0 -мезону $T_z = 0$ и π^- -мезону $T_z = -1$ (см. таблицу I).

Изотопический спин введён по аналогии с обычным спином. Действительно, электрон имеет спин $J = \frac{1}{2}$ и может находиться

в двух состояниях с $J_z = \pm \frac{1}{2}$; дейтон обладает спином

$J=1$ и может находиться в трёх состояниях с $J_z = +1, 0, -1$ и т.д.

Существенно, что в отсутствии внешних полей различные состояния электрона, дейтона и других частиц совершенно эквивалентны. Именно поэтому мы можем говорить о них как о разных состояниях одной и той же частицы, а не о разных частицах. При включении внешнего поля указанные состояния, вообще говоря, перестают быть эквивалентными за счёт различного взаимодействия с этим полем. Возникающие различия не играют, однако, существенной роли, в силу чего их можно считать чисто маркировочными, аналогично тому, что было сказано выше о маркировочном смысле заряда и вообще электромагнитных взаимодействий.

§ 2. Изотопическое пространство и его свойства.

Обычный спин определен в обычном непрерывном трехмерном пространстве. Вектор изотопического спина T вводится в некотором вспомогательном непрерывном трехмерном пространстве, которое называется зарядовым или изотопическим.

Сразу же возникает следующий важный вопрос: существует ли в изотопическом пространстве физически выделенные направления? Свойства вектора T не могут быть определены без решения этого вопроса. В настоящее время ответ на него можно ожидать только со стороны эксперимента. Богатую программу физических исследований даёт гипотеза изотропии зарядового пространства. Она известна как гипотеза изотопической инвариантности и будет являться исходным пунктом последующего изложения.

Содержание этой гипотезы сводится к следующей системе связанных между собой предположений.

а) Изотопическое пространство, рассматриваемое само по себе, изотропно по аналогии с обычным пространством. Поэтому свойства отдельной частицы не зависят от ориентации её изотопического спина.

б) Сильные взаимодействия между частицами, вообще говоря, могут зависеть от взаимной ориентации изотопических спинов, но они не нарушают изотропности изотопического пространства, т.е. не создают в нем выделенных направлений. х)

в) Изотопические свойства частиц, связанные с сильными взаимодействиями, могут быть описаны аппаратом, тождественным с тем аппаратом, который используется для описания обычного спина. Само собой разумеется, что такая возможность существенно связана с первыми двумя предположениями.

х) Аналогичная ситуация имеет место и в обычном пространстве: взаимодействие между частицами в общем случае зависит от взаимной ориентации их спинов, но не нарушает изотропии пространства, поскольку в отсутствии внешних полей в нем не возникает выделенных направлений.

Что касается слабых и электромагнитных взаимодействий, то они могут привести к появлению выделенных направлений в изотопическом пространстве ^{х)}. Нарушение изотопической инвариантности этими взаимодействиями является экспериментальным фактом.

Основной вывод из гипотезы изотопической инвариантности можно сформулировать так. В силу отсутствия выделенных направлений, свойства системы сильно взаимодействующих частиц не изменяются при совместном повороте соответствующих изотопических спинов в изотопическом пространстве. Этот вывод можно также рассматривать и как несколько иную формулировку изотопической инвариантности, эквивалентную, по существу, приведенной выше.

Из изотопической инвариантности, в частности, следует что изотопический спин T можно, как уже отмечалось, считать аналогом вектора момента количества движения, третьей компоненте которого T_z соответствуют возможные собственные значения

$$T_z = T, T-1, T-2, \dots, -T+1, -T \text{ (xx)}$$

-
- х) Для наглядности можно представить себе, что в этом случае в изотопическом пространстве появляется некое поле, взаимодействующее с изотопическим спином.
 - xx) Таковы же, конечно, и собственные значения соответствующие проекции T на любую фиксированную ось.

Состояние с $T_2 = -T$ можно рассматривать как систему с $T_2 = +T$ повернутую в изотопическом пространстве на 180° вокруг оси, лежащей в плоскости $\{x, y\}$. Такой поворот называется изотопическим сопряжением. Изотопически сопряженные системы обладают одинаковыми свойствами. Примером могут служить пары зеркальных ядер, π^+ и π^- - мезоны и т.д. Гипотеза изотопической инвариантности обобщает инвариантность свойств системы при вращении в изотопическом пространстве от угла 180° на произвольные углы и около произвольных осей.

§ 3. Закон сохранения изотопического спина.

Физические свойства системы нескольких частиц зависят, вообще говоря, от величины всех изотопических спинов T_1, T_2, \dots, T_n и их ориентации. Однако, в силу изотропии изотопического пространства, они не могут измениться при общем повороте всей рассматриваемой совокупности векторов, если при этом не изменяется их относительное расположение.

Отсюда, в частности, следует, что оператор Гамильтона, описывающий систему частиц, инвариантен по отношению к вращениям в изотопическом пространстве. Такой гамильтониан коммутирует с операторами T^2 и T_z , откуда вытекает закон сохранения полного изотопического спина T и его ^{(проекции} T_z x)

Здесь снова имеется полная аналогия с квантовомеханическим описанием момента количества движения в обычном трехмерном пространстве.

х) T_x и T_y также сохраняются во времени.

В дальнейшем внимание акцентируется на сохранении только T_z , так как именно эта величина связана с электрическим зарядом.

Сохранение изотопического спина не означает, что он всегда имеет определенное значение, подобно тому, как сохранение импульса или энергии не означает, что всякая система всегда обязана находиться в состоянии с определенным импульсом и энергией. Система может находиться в состоянии, которое является суперпозицией состояний с разными изотопическими спинами (соответствующие примеры будут приведены ниже). В этом случае закон сохранения T утверждает, что коэффициенты, с которыми входят в суперпозицию отдельные состояния с определенным изотопическим спином, остаются постоянными во времени, т.е. вероятность обнаружить при соответствующем измерении то или иное значение T не зависит от момента времени, в который производится измерение. В частности, результат не зависит от того, измерен ли изотопический спин системы до какой-либо реакции или после неё. Аналогичные соображения справедливы, конечно, и в отношении суперпозиций состояний с различными значениями проекций изотопического спина.

Закон сохранения T_z приводит к важным правилам отбора, запрещающим протекание некоторых типов ядерных реакций. Для реакций, в которых не участвуют странные частицы, указанные правила отбора вытекают также из закона сохранения заряда. Действительно, для систем обычных частиц справедливо соотношение

$$e = T_z + \frac{n}{2}, \quad (I.I)$$

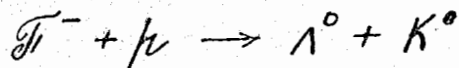
где e - заряд, выраженный в единицах элементарного заряда,
 T_z - проекция полного изотопического спина, n суммарное

барионное число, равное разности числа барионов и антибарионов, входящих в состав системы x). Поскольку в ядерных реакциях величина n сохраняется, то сохранение T_z равносильно сохранению заряда e . Положение изменяется для реакций с участием странных частиц. Рассмотрим, например, реакцию



Закон сохранения e и n в данном случае выполнены, однако реакция все же запрещена, так как величина T_z не сохраняется (в начальном состоянии $T_z = -1/2$, а в конечном $T_z = 0$).

С другой стороны, реакция



не запрещена, так как в ходе этой реакции T_z сохраняется.

Используя известные значения T_z для различных частиц (см. таблицу I), можно аналогичным образом получить правила отбора, относящиеся к самым различным реакциям. Отсюда, в частности, следует закон парной генерации и другие известные выводы, касающиеся рождения и ядерных взаимодействий странных частиц. Мы не станем их здесь подробно рассматривать, так как они полностью совпадают с теми правилами, которые обычно связывают с сохранением странности S xx). Для систем, включающих в себя странные частицы, соотношение (I, I) переходит, как известно, в

$$e = T_z + \frac{n}{2} + \frac{S}{2} \quad (1.2)$$

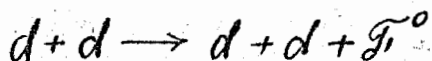
где S - полная странность системы x

х) Значения величин n и S для разных частиц приведены в таблице I.

xx) Об этом подробнее см., например, книгу М.А.Маркова "Гипероны и K -мезоны". Государственное издательство физ.мат.литературы. Москва 1958 г.

Величины e и n в ядерных реакциях сохраняются. Поэтому, из (1.2) следует, что сохранение T_z равносильно сохранению S и обратно.

Закон сохранения полного изотопического спина также приводит к некоторым дополнительным правилам отбора. Рассмотрим, например, реакцию



Изотопический спин дейтона равен, как известно, нулю (см. ниже, главу УП). Поэтому, величины e , n и T_z в указанной реакции сохраняются. Все же она запрещена всилу несохранения полного изотопического спина T , который равен нулю для левой части равенства и единице - для правой. Можно было бы привести и другие аналогичные примеры (см. главы У и УШ). Однако, основные применения закона сохранения T связаны не с правилами отбора, запрещающими те или иные реакции, а с получением определенных соотношений между сечениями различных разрешенных реакций. Большая часть последующего материала посвящена именно этому вопросу.

ГЛАВА II.

ОБЩАЯ СТРУКТУРА ИЗОТОПИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТЫ
КЛЕБША-ГОРДОНА.

§ I. Изотопические волновые функции

* Пространство волновых изотопических
функций.

Для полного определения состояния частицы нужно задать наряду с её координатами и спином ещё изотопический спин и его проекцию. Если речь идёт о системе частиц, то необходимо задать изотопический спин T и его проекцию T_z для каждой частицы. У системы частиц, таким образом, появились дополнительные степени свободы, соответствующие изотопическим переменным. В дальнейшем мы будем изучать изотопические свойства квантовых систем, отвлекаясь, как правило, от всех других свойств этих систем. Возможность такого подхода следует из того, что изотопические переменные (и соответствующие степени свободы) не зависят, как показывает эксперимент, от других переменных. (Некоторая косвенная связь между координатными и изотопическими характеристиками имеет место для систем частиц членов одного мультиплета. По этому поводу см. главу УП).

В этом случае в соответствующем волновом уравнении переменные разделяются. Это позволяет говорить об изотопической части волновой функции системы и изучать изотопические свойства последней отдельно, абстрагируясь от остальных её свойств.

598/7
Выше уже отмечалось, что изотопический спин вполне аналогичен обычному спину с той только разницей, что изотопический спин определен в специальном изотопическом пространстве. В дальнейшем мы будем несколько упрощенно считать, что изотопический спин является аналогом не собственного, а орбитального момента количества движения. Строго говоря, это, конечно, неверно, хотя бы потому, что, в отличие от орбитального момента, изотопический спин может принимать не только целые, но и полуцелые значения. Указанная нестрогость не сказывается, однако, на интересующих нас сейчас вопросах. Вместе с тем, мы получаем методически очень удобную возможность считать изотопические волновые функции однокомпонентными, аналогичными обычным волновым функциям нерелятивистских бесспиновых частиц.

Рассмотрим с указанной точки зрения какую-либо частицу, обладающую изотопическим спином T . Каждому из $2T+1$ возможных значений его проекции T_z соответствует однокомпонентная собственная волновая функция, определенная в трехмерном изотопическом пространстве и описывающая частицу, находящуюся в соответствующем состоянии. Все рассматриваемые собственные

функции образуют, как известно, полную ортонормированную систему функций. Как уже отмечалось выше, частица может также находиться в состоянии с неопределенным значением T_z . Волновая функция, соответствующая любому такому состоянию, может быть представлена в виде линейной комбинации исходных $2T+1$ функций. Квадрат модуля каждого из коэффициентов разложения равен вероятности, с которой величина T_z принимает в результате измерения то или иное значение.

Любую волновую функцию можно рассматривать как вектор в $(2T+1)$ -мерном пространстве, которое обычно называется гильбертовым пространством. Собственные функции проекции изотопического спина образуют в гильбертовом пространстве систему взаимно ортогональных единичных базисных векторов — ортов. Указанная система ортов не является, конечно, единственно возможной. Существует, как известно, бесконечное множество полных ортонормированных систем функций, каждой из которых соответствует своя система ортов, которая может быть совмещена с исходной системой с помощью соответствующего поворота в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим пример. Все изотопические состояния пиона исчерпываются тремя собственными функциями ^{x)}

$$\psi(T_1^+) = (T_1^+); \quad \psi(T_1^-) = (T_1^-); \quad \psi(T_1^0) = (T_1^0)$$

Эта система функций ортонормирована, т.е.

x) Каждая из функций зависит от трёх изотопических координат. Выбранная система записи удобна тем, что она прямо указывает изотопическое состояние рассматриваемой частицы.

$$\langle \psi(\pi) \psi(\pi') \rangle = \delta_{\pi\pi'} \quad \text{x)} \quad (2.1)$$

Любая линейная комбинация вида

$$\psi = C_1 \psi(\pi^+) + C_2 \psi(\pi^0) + C_3 \psi(\pi^-)$$

также описывает некоторое возможное изотопическое состояние пиона, в котором проекция изотопического спина T_z не имеет определенного значения. Величины $|C_1|^2$, $|C_2|^2$ и $|C_3|^2$ дают вероятности того, что пион является π^+ -мезоном, π^0 -мезоном и π^- -мезоном.

Рассмотрим теперь изотопические функции системы двух частиц, например пиона и нуклона.

Каждая такая функция зависит от шести переменных: три связаны с изотопическим спином пиона, остальные три — с изотопическим спином нуклона.

Выберем совокупность шести функций $\psi(\pi, N)$, имеющих вид:

$$\begin{aligned} (\pi^+, p) &= (\pi^+)(p) & (\pi^+, n) &= (\pi^+)(n) \\ (\pi^0, p) &= (\pi^0)(p) & (\pi^0, n) &= (\pi^0)(n) \\ (\pi^-, p) &= (\pi^-)(p) & (\pi^-, n) &= (\pi^-)(n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Каждая из этих функций равна произведению некоторой функции, относящейся только к нуклону, на функцию относящуюся только к пиону. Поэтому, каждая из них описывает систему пион-нуклон в которой обе частицы находятся в определенном изотопическом

x) Здесь принято обозначение

$$\langle \psi(\pi) \psi(\pi') \rangle = \int \psi_{\pi}^*(x) \psi_{\pi'}(x) dx,$$

где X - совокупность трёх изотопических координат.

Интегрирование ведётся по всему объёму изотопического пространства.

состоянии: функция (\mathcal{F}, μ) соответствует случаю, когда пион является \mathcal{F}^+ -мезоном, а нуклон - протоном, функция (\mathcal{F}, μ) соответствует \mathcal{F}^0 -мезону и нейтрону и т.д. Выписанные функции образуют, как легко видеть, полную ортонормированную систему. Действительно, при интегрировании по всем шести переменным величина

$$\langle (\mathcal{F}, \mathcal{N}) | (\mathcal{F}', \mathcal{N}') \rangle = \langle (\mathcal{F}) | (\mathcal{F}') \rangle \cdot \langle (\mathcal{N}) | (\mathcal{N}') \rangle$$

Отсюда, на основании (2.1), следует, что

$$\langle (\mathcal{F}, \mathcal{N}) | (\mathcal{F}', \mathcal{N}') \rangle = \delta_{\mathcal{F}\mathcal{F}'} \cdot \delta_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}$$

Произвольная волновая функция, описывающая любое состояние системы пион-нуклон, может быть разложена по базисным функциям (2.2), которые можно, таким образом, рассматривать как орты в некотором шестимерном гильбертовом пространстве x). Полных ортонормированных систем функций и соответствующих им ортов существует, как и в случае одной частицы, сколько угодно. В частности, в качестве такой ортонормированной системы можно взять шесть функций, каждая из которых описывает систему пион-нуклон, находящуюся в состоянии с определённым значением полного изотопического спина T и его проекции T_z . Указанные функции могут быть записаны в виде:

$$\psi\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (2.3)$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Здесь первый индекс указывает значение T второй — T_z , так что, например, функция $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ описывает систему пион-нуклон при $T = \frac{3}{2}$ и $T_z = -\frac{1}{2}$.

Введенные ранее функции (2.2) описывают систему находящуюся в определенном зарядовом состоянии, но не обладающую, вообще говоря, определённым изотопическим спином.

Действительно, система $\left\{ \pi^- p \right\}$ может обладать изотопическим спином $T = \frac{3}{2}$ и $T = \frac{1}{2}$ причем оба состояния присутствуют одновременно и могут быть реализованы с определёнными вероятностями.

Функции (2.3), напротив, описывают состояние системы с определённым T , но не указывают с помощью каких конкретно частиц реализуется это состояние. Так, функция

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

описывает состояние с $T = \frac{3}{2}$, которое может быть реализовано в виде суперпозиции системы π^- -мезона и протона и системы π^0 -мезона и нейтрона

§ 2. Коэффициенты Клебша-Гордона
(определение).

Каждую из функций системы (2.2) можно представить в виде линейной комбинации различных функций системы (2.3).

Рассмотрим, например, функцию (\mathcal{U}^0, μ) , которую, вообще говоря, можно записать в виде:

$$(\mathcal{U}^0, \mu) = \alpha \mathcal{U}^0 \mu \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) + C \mathcal{U}^0 \mu \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \beta \mathcal{U}^0 \mu \frac{3}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \gamma \mathcal{U}^0 \mu \frac{3}{2} \frac{-3}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) + \delta \mathcal{U}^0 \mu \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \epsilon \mathcal{U}^0 \mu \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.4)$$

Для системы $(\mathcal{U}^0 \rho)$ проекция изотопического спина $T_z = 1/2$, поэтому должны быть выполнены равенства:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Аналогичным образом, учитывая законы сохранения T и T_z занедем разложение всех функций (2.2) по функциям (2.3).

$$(\mathcal{U}^+, \mu) = C \mathcal{U}^+ \mu \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$(\mathcal{U}^0, \mu) = C \mathcal{U}^0 \mu \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + C \mathcal{U}^0 \mu \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (2.4')$$

$$(\mathcal{U}^-, \mu) = C \mathcal{U}^- \mu \frac{3}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) + C \mathcal{U}^- \mu \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(\mathcal{U}^+, n) = C \mathcal{U}^+ n \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + C \mathcal{U}^+ n \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$(\mathcal{U}^0, n) = C \mathcal{U}^0 n \frac{3}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) + C \mathcal{U}^0 n \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(\mathcal{U}^-, n) = C \mathcal{U}^- n \frac{3}{2} \frac{-3}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Коэффициенты C называются коэффициентами Клебша-Гордона (в дальнейшем будем писать К.-Г.). Каждый коэффициент зависит от шести индексов

$$C = C_{T' T'_z T'' T''_z T T_z}$$

Индексы с одним штрихом относятся к первой частице, с двумя штрихами - ко второй, нештрихованные индексы указывают величину полного изотопического спина системы и его проекцию.

Точно также можно получить и обратное разложение функций (2.3) по функциям (2.2), для чего следует решить систему линейных уравнений (2.4') относительно функций (2.3).

Рассмотрим ещё, в качестве второго, примера систему из нуклона и \bar{K} -мезона. В этом случае обе частицы имеют изотопический спин $T = \frac{1}{2}$ и вместо (2.4') имеем следующую систему равенств:

$$(\mu, \kappa^+) = C_{\mu \kappa^+ 11} (1, 1)$$

$$(\mu, \kappa^0) = C_{\mu \kappa^0 10} (1, 0) + C_{\mu \kappa^0 00} (0, 0)$$

$$(\mu, \kappa^-) = C_{\mu \kappa^- 10} (1, 0) + C_{\mu \kappa^- 00} (0, 0)$$

$$(\mu, \kappa^{\circ}) = C_{\mu \kappa^{\circ} 1-1} (1, -1)$$

Существенно заметить, что коэффициенты $K - T \{ C_{T' T'_z T'' T''_z T T_z} \}$ снова зависят от шести индексов, имеющих прежний смысл.

Подобные разложения можно записать для любой пары частиц с произвольными изотопическими спинами, причём в каждом случае будет свой набор коэффициентов К.-Г., зависящих от шести индексов.

Коэффициенты K - Γ связывают между собой две определенные системы ортонормированных функций. Поэтому они могут быть однозначно определены по известным правилам, причём их вычисление есть вопрос чисто математический ^{х)}. Ниже будет показано как можно фактически провести это вычисление. Сейчас же, имея в виду практические применения, мы воспользуемся готовыми таблицами.

Для некоторых простейших случаев коэффициенты K - Γ приведены в таблицах II и III. Существуют таблицы и для более сложных случаев ^{хх)}.

С помощью таблиц II и III легко построить матрицу коэффициентов K - Γ , связывающую функции, описывающие состояние с неопределённым T (функции типа (2.2)), с функциями, описывающими состояние с определённым T и T_z (функции типа (2.3)). Таблицы IV-VI представляют из себя такие матрицы, составленные для наиболее часто встречающихся на практике случаев.

х) Так как волновые функции имеют неопределённую фазу, то и коэффициенты K - Γ определены только с точностью до множителей типа $e^{i\delta}$. Это не сказывается ни на каких физических выводах, поскольку все наблюдаемые физические величины выражаются через квадратичные выражения, составленные из коэффициентов K - Γ .

хх) См., например, А.М. Балдин, В.И. Гольданский, И.Л. Розенталь "Кинематика ядерных реакций". Государственное издательство физ.мат. литературы, Москва 1959г. или Н.Ф. Нелипа "Связь фотообразования π - мезонов с рассеянием". Атомиздат. 1959 г.

Таблица II

Для $T' = \frac{1}{2}$

	$T'_2 = \frac{1}{2}$	$T'_1 = -\frac{1}{2}$
$T = T'' + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{T'' + T_2 + \frac{1}{2}}{2T'' + 1}}$	$\sqrt{\frac{T'' - T_2 + \frac{1}{2}}{2T'' + 1}}$
$T = T'' - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{T'' - T_2 + \frac{1}{2}}{2T'' + 1}}$	$\sqrt{\frac{T'' + T_2 + \frac{1}{2}}{2T'' + 1}}$

Таблица III

Для $T' = 1; T'' \geq 1$.

	$T'_2 = 1$	$T'_1 = 0$	$T'_1 = -1$
$T = T'' + 1$	$\sqrt{\frac{(T'' + T_2)(T'' + T_2 + 1)}{(2T'' + 1)(2T'' + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(T'' - T_2 + 1)(T'' + T_2 + 1)}{(2T'' + 1)(T'' + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(T'' - T_2)(T'' - T_2 + 1)}{(2T'' + 1)(2T'' + 2)}}$
$T = T''$	$\sqrt{\frac{(T'' + T_2)(T'' - T_2 + 1)}{2T''(T'' + 1)}}$	$-\frac{T_2}{\sqrt{T''(T'' + 1)}}$	$-\sqrt{\frac{(T'' - T_2)(T'' + T_2 + 1)}{2T''(T'' + 1)}}$
$T = T'' - 1$	$\sqrt{\frac{(T'' - T_2)(T'' - T_2 + 1)}{2T''(2T'' + 1)}}$	$-\sqrt{\frac{(T'' - T_2)(T'' + T_2)}{T''(2T'' + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(T'' + T_2 + 1)(T'' + T_2)}{2T''(2T'' + 1)}}$

Таблица IV

	(1, 1)	(1, 0)	(-1, 1)	0, 0
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	0	0	0
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	0	1	0
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Таблица V

	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
$(1, 1) (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	0	0	0	0	0
$(1, 1) (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\sqrt{3}$	0
$(1, 0) (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\sqrt{3}$
$(1, -1) (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	0	0	1	0	0
$(1, 0) (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	0	$\sqrt{3}$	0	0	$-\sqrt{3}$	0
$(1, -1) (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	0	0	$-\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$

Таблица VI

	2.2	2.1	2.0	2.1 ²	2.2	1.1	1.0	1.1	0.0
(1,1)(1,1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,1)(1,0)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
(1,1)(1,-1)	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
(1,0)(1,-1)	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
(1,-1)(1,-1)	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(1,0)(1,1)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
(1,0)(1,0)	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
(1,-1)(1,0)	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
(1,-1)(1,1)	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Функции, описывающие состояние с неопределенным T , выписаны в левом крайнем столбце. Каждая функция является произведением двух изотопических функций двух частиц, образующих систему. Так, например, функция

$$(1, 1) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

может соответствовать системе \mathcal{H}^+ - мезона и нейтрона

$$(\mathcal{H}^+) (n)$$

и т.д. Разложение каждой такой функции по функциям, описывающим состояние с определённым T и T_z (выписаны в верхней строке), осуществляется с помощью коэффициентов, записанных в соответствующей строке. Обратные разложения функций типа

(2.3) по функциям типа (2.2) осуществляется с помощью коэффициентов, записанных в столбцах. В дальнейшем мы неоднократно

будем пользоваться разложениями одних функций по другим.

Условимся называть функции типа (2.2) "физическими", так как

их аргументы непосредственно указывают тип частиц, образующих систему. Функции типа (2.3) будем называть "изотопическими".

Аргументы этих функций указывает изотопический спин

T и его проекцию T_z для того состояния, в котором находится система (см. по этому поводу приложение III).

§ 3. Получение изотопических соотношений с помощью коэффициентов Клебша-Гордона.

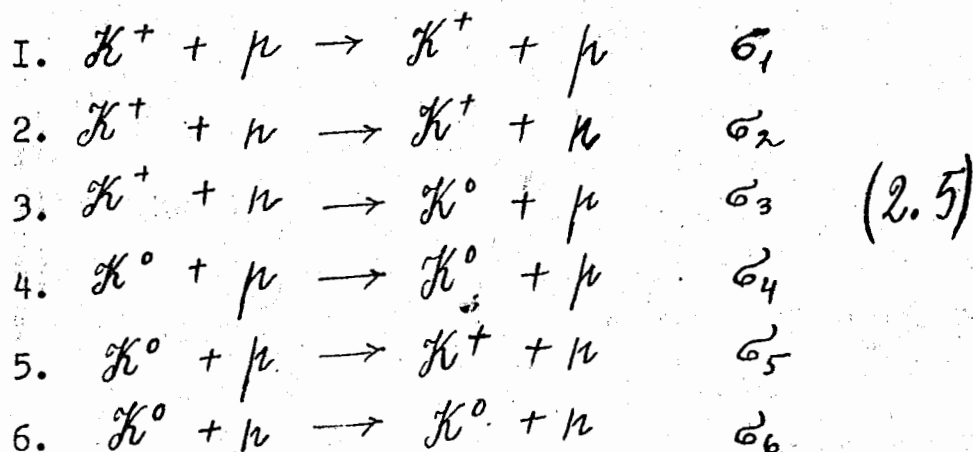
I. Общие методы использования коэффициентов

Клебша - Гордона

Теперь можно приступить к получению соотношений между сечениями различных реакций. В настоящем параграфе мы рассмотрим только такие реакции, в которых в начальном и конечном

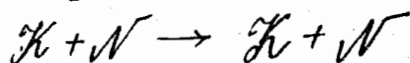
состоянии имеется по две частицы. Реакции других типов будут обсуждаться в следующих главах.

Начнём с конкретного примера: упругое рассеяние и рассеяние с перезарядкой K -мезонов на нуклонах. Возможны следующие реакции



(через σ_i обозначены дифференциальные сечения соответствующих процессов).

Если не пользоваться понятием изотопического спина, то между выписанными реакциями не видно никакой связи. Представление об изотопическом спине позволяет рассмотреть эти реакции с единой точки зрения: речь идёт не о различных реакциях, а о различных каналах одной и той же реакции



При таком подходе сразу же выясняется существование некоторых связей между указанными каналами.

Сечение какой-либо ядерной реакции пропорционально, как известно, квадрату модуля соответствующего матричного элемента $|M|^2$, зависящего от волновых функций начального и конечного состояний и от характера взаимодействия.

Таким образом имеем:

$$\sigma_i \sim |M_i|^2 \quad (2.6)$$

Величина каждого матричного элемента M_i определяется, вообще говоря, и координатными и изотопическими частями волновых функций. При сопоставлении различных реакций мы будем сравнивать конечные состояния с одинаковыми импульсами, углами вылета и т.д. Поэтому, координатные части всех матричных элементов M_i оказываются одинаковыми^{х)}, в силу чего в дальнейшем их можно вообще не учитывать, считая, что в (2,6) входят только изотопические части матричных элементов.

Если в результате взаимодействия система переходит из начального состояния (волновая функция $\psi_{нач}$), в некоторое конечное состояние (волновая функция $\psi_{кон}$), то соответствующий матричный элемент мы будем символически записывать в виде:

$$M = \langle \psi_{нач}^* | S | \psi_{кон} \rangle$$

где S - оператор перехода. С точки зрения теории возмущений

$$M = \langle \psi_{нач}^* | H | \psi_{кон} \rangle,$$

причём H соответствует той части гамильтониана, которая ответственна за рассматриваемый переход. В целях наглядности мы будем считать, что матричный элемент всегда можно представить в такой форме. Однако, фактически это упрощение не

х) Сказанное справедливо только в пренебрежении небольшой разницей масс между компонентами зарядовых мультиплетов. Учёт этой разницы привел бы к некоторому различию в импульсах частиц, т.е. к различию в координатных частях волновых функций

является необходимым, так как нас интересует только самые общие изотопические свойства \mathcal{M} , не зависящие от конкретного вида оператора \mathcal{S} .

В принятых обозначениях матричные элементы, соответствующие реакциям (2.5) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \langle (K^+, p)^* | H | (K^+, p) \rangle & G_1 \\
 \mathcal{M}_2 &= \langle (K^+, n)^* | H | (K^+, n) \rangle & G_2 \\
 \mathcal{M}_3 &= \langle (K^+, n)^* | H | (K^0, p) \rangle & G_3 \\
 \mathcal{M}_4 &= \langle (K^0, p)^* | H | (K^0, p) \rangle & G_2 \\
 \mathcal{M}_5 &= \langle (K^0, p)^* | H | (K^+, n) \rangle & G_3 \\
 \mathcal{M}_6 &= \langle (K^0, n)^* | H | (K^0, n) \rangle & G_1
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для того, чтобы воспользоваться следствиями изотопической инвариантности, разложим волновые функции системы K -мезон - нуклон по волновым функциям соответствующим определённым Γ и Γ_z . На основании таблицы II имеем:

$$\begin{aligned}
 (K^+, p) &= 1 \cdot (1, 1) \\
 (K^+, n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0) \\
 (K^0, p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0) \\
 (K^0, n) &= 1 (1, -1)
 \end{aligned} \tag{2.8} \quad x)$$

х) На первый взгляд функции (K^+, n) и (K^0, p) описывают одинаковые изотопические состояния: одна частица имеет $\Gamma_z = \frac{1}{2}$ и одна $-\Gamma_z = -\frac{1}{2}$. Однако, как видно из (2.8) соответствующие разложения по функциям с определёнными Γ и Γ_z отличаются знаком второго члена. Это связано с тем, что перестановка изотопических спинов связана с перестановкой самих частиц, т.е. с изменением состояния рассматриваемой системы.

Используя эти разложения, запишем матричные элементы M_1 и M_2 в виде:

$$M_1 = \langle (1,1)^* | \mathcal{H} | (1,1) \rangle = f$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle.$$

В ходе реакции полный изотопический спин сохраняется. Поэтому члены $\langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle$ и $\langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle$ равны нулю. С другой стороны, независимость явлений от совместного поворота всех векторов в изотопическом пространстве приводит к равенству

$$\langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle = \langle (1,1)^* | \mathcal{H} | (1,1) \rangle = f$$

Поэтому матричный элемент M_2 принимает вид

$$M_2 = \frac{1}{2} (f + g),$$

где

$$g = \langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle$$

Аналогичные преобразования с другими матричными элементами дают

$$M_3 = \frac{1}{2} \langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (1,0) \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle (1,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle - \frac{1}{2} \langle (0,0)^* | \mathcal{H} | (0,0) \rangle = \frac{1}{2} (f - g)$$

$$M_4 = \frac{1}{2} (f + g) = M_2$$

$$M_5 = \frac{1}{2} (f - g) = M_3$$

$$M_6 = f = M_1$$

Итак, окончательно получаем: х)

$$M_1 = M_6 = f$$

$$M_2 = M_4 = \frac{1}{2}(f+g) \quad (2.9)$$

$$M_3 = M_5 = \frac{1}{2}(f-g),$$

где f и g - некоторые определенные, но вообще говоря, неизвестные комплексные числа. Таким образом, использование гипотезы изотопической инвариантности привело к тому, что шесть прежде независимых комплексных чисел M_i , удалось выразить с помощью всего - лишь двух комплексных чисел f и g . Для определения этих величин достаточно экспериментально измерить сечения трех реакций (σ_1 , σ_2 и σ_3), в то время как прежде для полной характеристики процесса (5) необходимо было измерить сечения всех шести реакций^{хх})

Равенства

$$M_1 = M_6, \quad M_2 = M_4, \quad M_3 = M_5$$

и равенства соответствующих сечений, есть прямое следствие изотопической инвариантности. Эти равенства можно было бы написать сразу, поскольку реакции 1 и 6, 2 и 4, 3 и 5 (см. (2.5)) являются изотопически сопряженными.

х) При выводе (2.9) явно использовался только закон сохранения изотопического спина T . Закон сохранения проекции T_z был учтен уже ранее при написании исходных реакций (2.5), которые идут с обязательным сохранением электрического заряда.

хх) Если записать f и g в виде: $f = |f|e^{i\varphi}$, $g = |g|e^{i\delta}$, то σ_1 , σ_2 и σ_3 выражаются, как легко видеть, не через четыре величины $|f|$, $|g|$, φ и δ , а только через три из них ($|f|$, $|g|$ и относительную фазу $\varphi - \delta$). Для определения этих трех величин достаточно измерить сечения трех реакций.

Далее из (2.9) следует, что

$$M_1 = M_2 + M_3$$

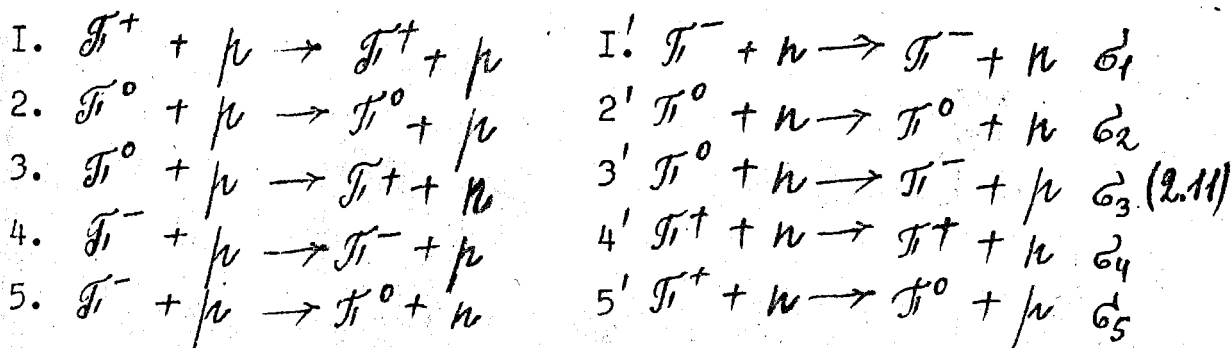
Это значит, что в комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам M_1 , M_2 и M_3 , образуют трёхугольник. Как следствие, имеют место известные неравенства между сторонами трёхугольника $|M_1|$, $|M_2|$ и $|M_3|$, т.е. между величинами

$$\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2} \text{ и } \sqrt{\sigma_3}:$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1} &\leq \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} \\ \sqrt{\sigma_2} &\leq \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_3} \\ \sqrt{\sigma_3} &\leq \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Дальнейшие выводы о сечениях рассматриваемых реакций можно сделать только на основании различных соображений не-изотопического характера. Примеры таких соображений будут даны ниже.

Проанализируем аналогичным способом реакции упругого рассеяния и рассеяния с перезарядкой пионов на нуклонах.



Реакции во втором столбце получаются из реакций в первом столбце изотопическим сопряжением. Поэтому они имеют одинаковые

матричные элементы и сечения х).

Используя полученные с помощью таблицы II разложения

$$(\mathcal{F}_1^+ | \nu) = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$(\mathcal{F}_1^- | \nu) = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$$(\mathcal{F}_1^0 | \nu) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (\mathcal{F}_1^0 | \nu) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(\mathcal{F}_1^- | \nu) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (\mathcal{F}_1^+ | \nu) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

можно записать для матричных элементов рассматриваемых процессов выражения

$$M_1 = f$$

$$M_4 = \frac{1}{3} f + \frac{2}{3} g$$

$$M_2 = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} g$$

$$M_5 = \frac{\sqrt{2}}{3} (f - g) \quad (2.12)$$

$$M_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} (f - g)$$

Здесь

$$f = \left\langle \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\rangle, \quad g = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle^{**}$$

х) В дальнейшем при получении изотопических соотношений мы в большинстве случаев будем употреблять приведенную выше форму записи и обозначений.

хх) При выводе (2.12) использована, как и в предыдущем примере, независимость f и g от величины проекции изотопического спина. Иными словами, использовались равенства

$$\left\langle \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle,$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)^* | \mathcal{H} | \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\rangle \quad \text{и т.д.}$$

Сечения реакций пропорциональны квадратам модулей соответствующих матричных элементов:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &\sim |f|^2 \\
 \sigma_2 &\sim \frac{4}{9}|f|^2 + \frac{1}{9}|g|^2 + \frac{2}{9}(fg^* + gf^*) \\
 \sigma_3 &\sim \frac{2}{9}|f|^2 + \frac{2}{9}|g|^2 - \frac{2}{9}(fg^* + gf^*) \\
 \sigma_4 &\sim \frac{1}{9}|f|^2 + \frac{4}{9}|g|^2 + \frac{2}{9}(fg^* + gf^*) \\
 \sigma_5 &\sim \frac{2}{9}|f|^2 + \frac{2}{9}|g|^2 - \frac{2}{9}(fg^* + gf^*)
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

(Коэффициент пропорциональности во всех пяти соотношениях один и тот же. См. стр. 25.).

Пять сечений выражаются через три величины: $|f|$, $|g|$ и величину $(fg^* + gf^*)$, связанную с углом между векторами, определяемыми комплексными числами f и g . Это значит, что между сечениями существует два соотношения типа равенства ^{x)}. Легко убедиться, что эти равенства имеют вид ^{xx)}:

$$\sigma_3 = \sigma_5; \quad \sigma_1 + \sigma_4 = 2\sigma_2 + \sigma_3 \tag{2.14}$$

x) В предыдущем примере аналогичные соотношения между сечениями отсутствуют, так как число сечений равно числу величин, через которые они выражаются.

xx) Равенство $\sigma_3 = \sigma_5$ можно получить сразу, как следствие равенства сечений прямой и обратной реакции. Для этого достаточно заметить, что реакция 5' является обратной по отношению к реакции 3, и реакция 3' - обратна по отношению к реакции 5.

Кроме того имеются следующие соотношения между матричными элементами

$$M_4 = 2M_2 - M_1; \quad M_3 = \sqrt{2} (M_2 - M_4)$$

Каждое из них дополнительно даёт ещё три неравенства между сечениями, аналогичные по смыслу неравенствам (2.10).

Приведённые примеры достаточны для уяснения техники получения изотопических соотношений. Следует подчеркнуть, что и равенства типа (2.14), и неравенства типа (2.10) получены нами для дифференциальных сечений. С другой стороны, они имеют один и тот же вид для любых углов, импульсов и т.д. Отсюда следует, что равенства, будучи линейными по отношению к величинам σ_i , остаются справедливыми и для интегральных сечений $\bar{\sigma}$.

В отношении неравенств это утверждение, вообще говоря, не имеет места, поскольку неравенства связывают между собой не сами сечения, а корни из сечений.

2. Детализация изотопических соотношений для некоторых частных случаев.

Соотношения, полученные на основании изотопического анализа, могут послужить также основой для получения дальнейшей информации о свойствах соответствующих процессов. При этом необходимо, однако, привлекать различные дополнительные соображения, не связанные непосредственно с гипотезой изотопической инвариантности. Приведём примеры такой детализации.

х) Некоторые исключения возможны для реакций, в которых участвуют частицы одного изотопического мультиплета (см. главу III, § 6).

Из опыта известно, что в области энергий равных нескольким сотням Мэв пионы рассеиваются на нуклонах, в основном, в состоянии с $T = \frac{3}{2}$. Таким образом, существенным является только один изотопический канал, в связи с чем можно считать, что в (2.13) величина g равна нулю. Легко видеть, что в этом случае для реакций (2.11) справедливы равенства

$$\sigma_1 : \sigma_3 : \sigma_4 = 9 : 2 : 1 \quad \text{и} \quad \sigma_2 : \sigma_4 = 4 \quad (2.15)$$

Первое из этих соотношений хорошо подтверждено экспериментально. Если, наоборот, положить $f = 0$, то

$$\sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 = 1 : 2 : 4 \quad \text{и} \quad \sigma_1 = 0 \quad (2.16)$$

Есть указания на то, что при энергиях пионов около 800-1000 Мэв ситуация приближается к рассмотренной, т.е. существенную роль играет только один изотопический канал, соответствующий $T = \frac{1}{2}$.

В области высоких энергий рассматриваемые изотопические соотношения можно упростить, полагая сечения перезарядки σ_3 и σ_5 равными нулю. Это предположение вполне естественно, например, с точки зрения статистической теории. Действительно с возрастанием энергии сталкивающихся частиц число возможных каналов протекания реакции возрастает, причем все они кроме каналов упругого рассеяния, могут считаться примерно равноправными. Что касается упругого рассеяния, то оно оказывается выделенным благодаря вкладу дифракционного рассеяния, сечение которого равно по порядку величины суммарному сечению всех неупругих процессов. Это означает, что при достаточно большой энергии сечение каждого неупругого канала, в том числе и перезарядки, становится пренебрежимо малым по сравнению с

сечением упругого рассеяния. Если это действительно имеет место, то из выражений для матричных элементов следует, что как для реакций (2.5), так и для реакций (2.II) справедливо равенство

$$f = g$$

Таким образом, все сечения выражаются через одну величину f , хотя взаимодействие осуществляется через состояния с разными изотопическими спинами. Иными словами, в этом случае взаимодействие вообще не зависит от изотопического спина. Для рассеяния K -мезонов на нуклонах в рассматриваемом приближении получаем, вместо трёх неравенств (2.I0), равенства

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = |f|^2; \quad \sigma_3 = 0$$

Для рассеяния пионов на нуклонах имеем (полагая в (2.I3)

$$f = g):$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = |f|^2; \quad \sigma_3 = \sigma_5 = 0$$

В связи с изложенным, качественно ясно, что верна следующая более общая теорема, относящаяся к рассеянию произвольной частицы B^i с изотопическим спином i на частице $A^{j,m}$ с изотопическим спином j и его проекцией m :
 Если равны нулю сечения рассеяния с перезарядкой x , то равны между собой матричные элементы и сечения всех возможных типов упругого рассеяния.

x) При строгом рассмотрении оказывается, что достаточно потребовать равенства нулю сечений не всех, а только некоторых рассеяний с перезарядкой. Равенство нулю сечений остальных рассеяний с перезарядкой может быть тогда получено как следствие (см. приложение I).

Одним из следствий этой теоремы является также равенство между собой полных сечений и сечений соответствующих неупругих процессов

$$\begin{aligned} \sigma_t(B^{i,m'i}, A^{j,m}) &= \sigma_t(B^{i,m'k}, A^{j,m'}) \\ \sigma_{in}(B^{i,m'i}, A^{j,m}) &= \sigma_{in}(B^{i,m'k}, A^{j,m'}) \end{aligned}$$

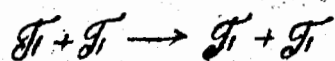
при всех возможных значениях проекций m_i' , m_k' и m , т.е. для всех возможных комбинаций зарядовых состояний сталкивающихся частиц. Указанные равенства сразу же получаются, если привлечь известную оптическую теорему, согласно которой полное сечение связано с амплитудой упругого рассеяния вперёд (под нулём градусов).

$$\sigma_t = 4\pi \times \text{Im} A(0) \quad (2.17)$$

Амплитуды рассеяния пропорциональны, как известно, соответствующим матричным элементам, из равенства которых, с учетом (2.10), вытекает равенство полных сечений и, как следствие, равенство сечений неупругих взаимодействий.

Эта теорема может быть полезна, в частности, для анализа взаимодействия частиц высокой энергии со сложными ядрами. Её доказательство дано в Приложении I.

Мы продемонстрировали метод получения изотопических соотношений на нескольких конкретных примерах. В общем случае схема остаётся такой же, но число изотопических каналов может быть любым. Так, в двухчастичных реакциях взаимодействия J_1 -мезонов с J_2 -мезонами



число каналов равно трём: $T=2$, $T=1$, $T=0$.

Им соответствуют три матричных элемента f, g, h . Все сечения выражаются через шесть величин: $|f|^2, |g|^2, |h|^2, (f, h), (fg), (gh)^x$. Скобками здесь обозначены скалярные произведения векторов \vec{f}, \vec{g} , и \vec{h} , определяемых комплексными числами f, g и h . Поскольку различных реакций в этом случае имеется больше пяти, соответствующие им сечения связаны несколькими изотопическими равенствами.

На примерах соотношений (2.15) и (2.16) мы уже видели, что если реакции идут через один изотопический канал, то различные сечения определяются только одной величиной, и могут быть поэтому выражены через какое-то одно любое сечение. Очевидно это верно и в общем случае. Полезно также отметить, что если реакции идут через два изотопических канала, то их сечения всегда связаны соотношениями типа "треугольника" (доказательство см, в Приложении П). Для случая трёх и большего числа каналов также существуют некоторые изотопические соотношения. Однако в общем случае, они накладывают значительно более слабые ограничения на сечения рассматриваемых реакций.

3. Замечание в реакциях аналогах.

Мы отмечали уже в начале этой главы, что все изотопические соотношения строятся на основании одних только изотопических свойств частиц и не зависят от других особенностей взаимодействия и природы частиц. Поэтому с изотопической точки

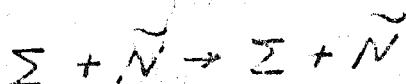
зрения все частицы с одинаковыми изотопическими спинами (K и N , T и Σ и т.д.) не отличаются друг от друга. Отсюда следует, что изотопические соотношения для реакций



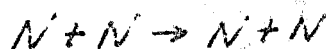
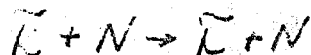
будут такими же, как для реакций



или



То же самое можно сказать о реакциях



а также и о многих других группах реакций, обладающих одинаковой изотопической структурой. Такие группы реакций в дальнейшем мы будем называть реакциями - аналогами.

ГЛАВА III.

ИЗОТОПИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА.

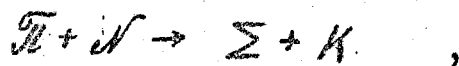
§ I. Упрощенный метод получения изотопических соотношений.

I. Вывод изотопических равенств.

Выше была описана методика получения изотопических равенств и неравенств, связанная с введением коэффициентов K, Γ . Если ограничиваться только равенствами, то можно предложить более простой способ их получения, основанный на

непосредственном использовании изотропии изотопического пространства ^{х)}. Введём для этой цели представление об изотопически неполяризованном пучке частиц, содержащем в равном числе все изотопические компоненты данного мультиплета. Примером может служить смесь равного числа π^+ , π^0 и π^- -мезонов или смесь равного числа протонов и нейтронов. Рассмотрим теперь мысленный эксперимент, в котором осуществляется взаимодействие пучка неполяризованных частиц с неполяризованной мишенью. Ввиду отсутствия выделенных направлений, связанных с начальным состоянием, и в силу изотропии изотопического пространства какие-либо выделенные направления не могут появиться и в конечном состоянии. Иными словами, все продукты реакции также должны быть изотопически неполяризованными, ^{в том смысле} что все изотопические компоненты всех мультиплетов снова должны быть представлены с равными весами. Это обстоятельство может быть использовано для получения искомым изотопических равенств. Смысл сделанных утверждений легко понять на конкретных примерах.

Рассмотрим совокупность всех возможных реакций типа



имеющих место при взаимодействии неполяризованного пучка пионов с неполяризованной мишенью, составленной из нуклонов.

х) Указанный способ разработан, в основном, И. Шмушкевичем

1. $\bar{\pi}^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$
2. $\bar{\pi}^0 + p \rightarrow \Sigma^0 + K^+$
3. $\bar{\pi}^0 + n \rightarrow \Sigma^- + K^+$
4. $\bar{\pi}^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+$
5. $\bar{\pi}^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$

- 1'. $\bar{\pi}^+ + n \rightarrow \Sigma^+ + K^0 \quad \sigma_1$
- 2'. $\bar{\pi}^0 + n \rightarrow \Sigma^0 + K^0 \quad \sigma_2$
- 3'. $\bar{\pi}^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + K^0 \quad \sigma_3$
- 4'. $\bar{\pi}^+ + n \rightarrow \Sigma^+ + K^0 \quad \sigma_4$
- 5'. $\bar{\pi}^+ + n \rightarrow \Sigma^0 + K^+ \quad \sigma_5$

Заметим, что в силу инвариантности относительно изотопического сопряжения, реакции, обозначенные одинаковыми номерами (со штрихом и без штриха) имеют равные сечения σ_i . Далее, число образующихся гиперонов (либо K -мезонов) фиксированного типа пропорционально, очевидно, сумме эффективных сечений тех реакций, в которых эти гипероны (K -мезоны) рождаются.

Таким образом, имеем:

$$N_{\Sigma^+} \sim (\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4)$$

$$N_{\Sigma^-} \sim (\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4)$$

$$N_{\Sigma^0} \sim 2(\sigma_2 + \sigma_5)$$

$$N_{K^+} \sim (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)$$

$$N_{K^0} \sim (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)$$

Поскольку конечное состояние изотопически неполяризовано, то можно написать следующие равенства:

$$N_{\Sigma^+} = N_{\Sigma^-} = N_{\Sigma^0}, \quad N_{K^+} = N_{K^0}$$

Условие $N_{\Sigma^+} = N_{\Sigma^0}$ приводит к соотношению:

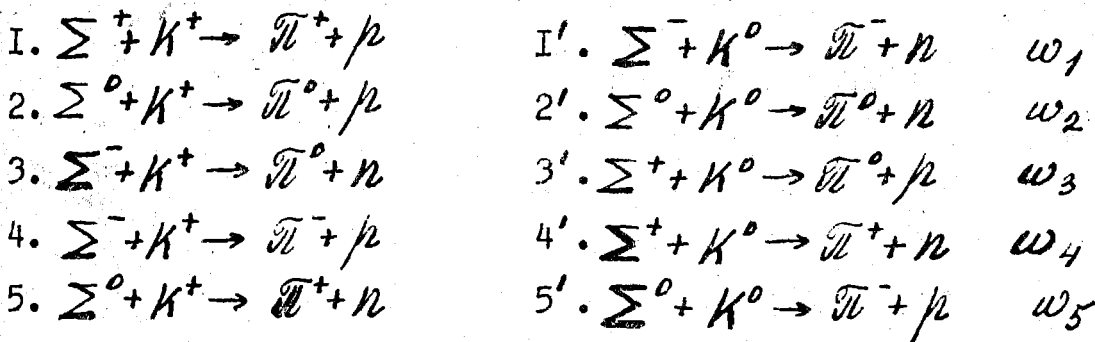
$$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 = 2(\sigma_2 + \sigma_5) \quad \text{х)} \quad (3.1)$$

Равенства $N_{\Sigma^+} = N_{\Sigma^-}$ и $N_{K^+} = N_{K^0}$ выполняются автоматически, так как инвариантность относительно изотопического сопряжения была нами уже использована. ^{xx)}

2. Изотопические равенства для обратных реакций.

Ещё один тип соотношений между сечениями можно получить, если рассматривать реакции обратные $\bar{\pi} + N \rightarrow \Sigma + K$.

В нашем случае полная совокупность таких реакций имеет вид:



х) Напомним, что полученное соотношение, равно как и все другие изотопические равенства, справедливо как для дифференциальных, так и для интегральных сечений, если только в реакции не участвуют частицы одного мультиплетта.

xx) То же справедливо и в общем случае: для любых зарядовых мультиплетов сопоставление изотопически сопряженных компонент не приводит к появлению каких-либо новых соотношений.

Рассуждая, как и раньше, имеем:

$$\omega_1 + \omega_4 + \omega_5 = 2(\omega_2 + \omega_3) \quad (3.2)$$

Известно, однако, что сечения соответствующих прямых и обратных реакций пропорциональны друг другу, т.е.

$$\omega_i = \text{const} \cdot \bar{\sigma}_i \quad (3.3)$$

Поэтому из (3.2) следует также

$$\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_4 + \bar{\sigma}_5 = 2(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3) \quad (3.4)$$

Сопоставление (3.1) и (3.4) приводит к равенству $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_5$. Последнее равенство и равенство (3.4) совпадают с полученными ранее равенствами (2.14).

Рассмотрение обратных реакций можно также заменить следующим утверждением: в прямых реакциях неполяризованного пучка частиц с неполяризованной мишенью выбывание всех компонент зарядовых мультиплетов, участвующих в рассматриваемых процессах (связанных и с пучком и с мишенью порознь) должно происходить поровну^{х)}. Это утверждение также является прямым следствием изотропности изотопического пространства.

Для появления изложенного подхода снова рассмотрим реакцию $\pi + N \rightarrow \Sigma + K$, акцентируя внимание на выбывании пионов различного типа из первичного пучка. Число π^+ - мезонов, провзаимодействовавших с нуклонами мишени

$$N_{\pi^+} \sim (\sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_5)$$

х) Возможна и другая вполне эквивалентная формулировка состоящая в том, что непрвзаимодействовавшие частицы, как пучка, так и мишени, должны остаться неполяризованными.

Аналогичным образом

$$N_{\tilde{\pi}^0} \sim 2(\sigma_2 + \sigma_3)$$

Приравнивая обе величины, приходим к соотношению (3.4), полученному ранее другим способом x)

3. Примеры.

Изложенные методические приемы легко применить к реакциям любого типа. Рассмотрим, например, реакции $\tilde{K} + \pi \rightarrow \Sigma + \tilde{\pi}$

1. $K^- + \rho \rightarrow \Sigma^- + \tilde{\pi}^+$	1'. $\tilde{K}^0 + n \rightarrow \Sigma^+ + \tilde{\pi}^-$	σ_1
2. $K^- + \rho \rightarrow \Sigma^0 + \tilde{\pi}^0$	2'. $\tilde{K}^0 + n \rightarrow \Sigma^0 + \tilde{\pi}^0$	σ_2
3. $K^- + \rho \rightarrow \Sigma^+ + \tilde{\pi}^-$	3'. $\tilde{K}^0 + n \rightarrow \Sigma^- + \tilde{\pi}^+$	σ_3
4. $K^- + n \rightarrow \Sigma^- + \tilde{\pi}^0$	4'. $\tilde{K}^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + \tilde{\pi}^0$	σ_4
5. $K^- + n \rightarrow \Sigma^0 + \tilde{\pi}^-$	5'. $\tilde{K}^0 + p \rightarrow \Sigma^0 + \tilde{\pi}^+$	σ_5

Здесь условие отсутствия изотопической поляризации $\tilde{\pi}$ -мезонов и Σ -частиц приводит соответственно к равенствам:

$$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5 = 2(\sigma_2 + \sigma_4) \quad (3.5)$$

$$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 = 2(\sigma_2 + \sigma_5) \quad (3.6)$$

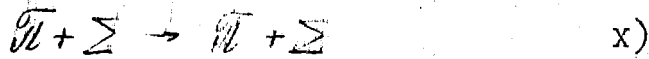
x) Строго говоря, для $N_{\tilde{\pi}^+}$ и $N_{\tilde{\pi}^0}$ имеют место несколько другие выражения:

$$N_{\tilde{\pi}^+} \sim [1 - e^{-n(\sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_5)}] \quad \text{и} \quad N_{\tilde{\pi}^0} \sim [1 - e^{-2n(\sigma_2 + \sigma_3)}]$$

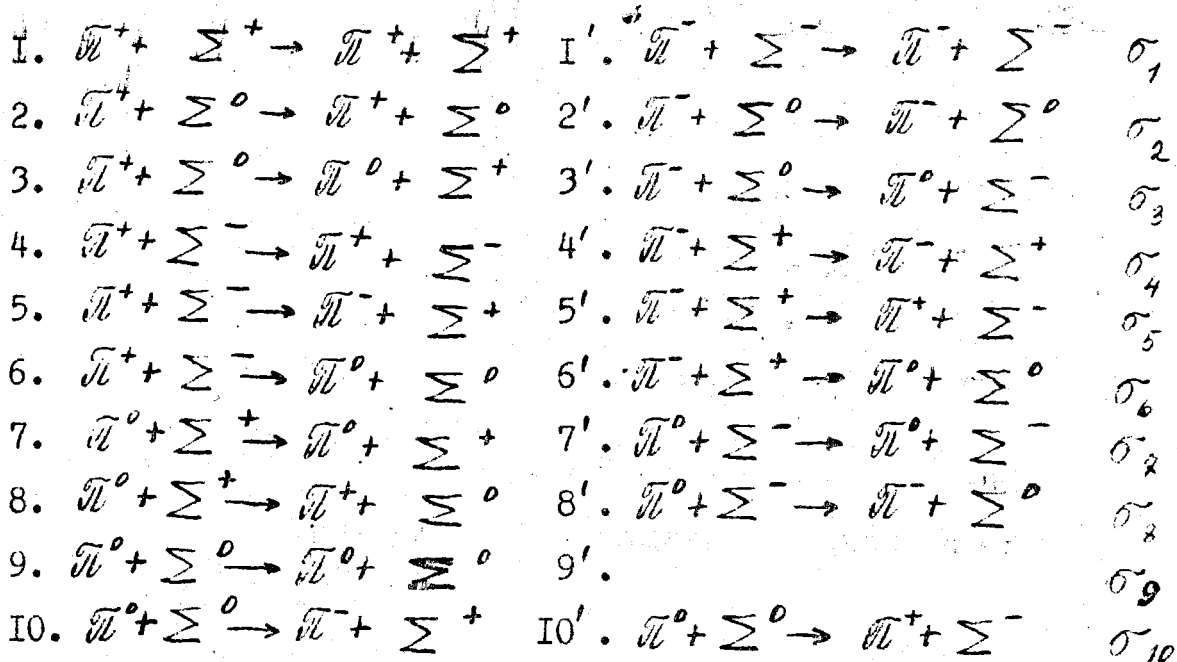
где величина n связана с числом нуклонов, содержащихся в мишени. Указанное уточнение, очевидно, не меняет окончательного результата.

Условия равного выбывания K^- и K^0 -мезонов, а также протонов и нейтронов новых равенств не дают, т.к. инвариантность относительно изотопического сопряжения нами была уже использована.

Рассмотрим теперь несколько иной тип реакций, а именно:



В этом случае имеем:



Реакция 9' тождественно совпадает с реакцией 9 и поэтому её не нужно отдельно рассматривать. Условия равного выбывания \bar{N} -мезонов и Σ -частиц дают соответственно равенство:

x) Разумеется, рассмотрение этих реакций носит пока чисто методический характер.

$$\sigma_6 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_8 + \sigma_5 = 2(\sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_{10}) + \sigma_9 \quad (3.7)$$

$$\sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 = 2(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_{10}) + \sigma_9 \quad (3.8)$$

Условия отсутствия поляризации в пучках взаимодействовавших Π и Σ -частиц приводят к равенствам:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_8 + \sigma_{10} = 2(\sigma_3 + \sigma_6 + \sigma_7) + \sigma_9 \quad (3.9)$$

$$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_7 + \sigma_{10} = 2(\sigma_2 + \sigma_6 + \sigma_8) + \sigma_9 \quad (3.10)$$

Вычтем из (3.7) равенство (3.9), а из (3.8) равенство (3.10).

В результате получим:

$$\sigma_6 - \sigma_3 = \sigma_{10} - \sigma_8$$

$$\sigma_3 + \sigma_6 = \sigma_8 + \sigma_{10}$$

Отсюда легко получаем два равенства:

$$\sigma_6 = \sigma_{10} \quad \text{и} \quad \sigma_3 = \sigma_8$$

которые можно было бы также получить из пропорциональности между сечениями соответствующих прямых и обратных реакций.

Вычитание равенства (3.8) из (3.7) приводит к равенству:

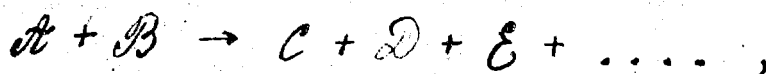
$$\sigma_2 = \sigma_7 \quad (3.11)$$

после чего (3.9) может быть также записано в виде

$$\sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_5 = \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6 + \sigma_9 \quad (3.12)$$

Дальнейшие примеры приведены в Приложении IV.

Легко видеть, что в общем случае для произвольной реакции:



все изотопические равенства связаны с частицами, обладающими изотопическим спином $T > 1/2$. Для $T = 0$ изотопические равенства не имеют смысла, т.к. существует только одна компонента. В случае $T = 1/2$ можно говорить только об инвариантности по отношению к изотопическому сопряжению, которая используется с самого начала в самой форме записи.

§ 2. Реакции с нефиксированным числом вторичных частиц.

Рассмотренную в § I методику можно применить и при несколько иной постановке вопроса. При столкновении частиц определенного типа могут осуществляться различные реакции. Так, например, при столкновении двух нуклонов возможна генерация одного π -мезона, двух π -мезонов и т.д. В каждом отдельном случае имеют место свои вполне определенные изотопические соотношения. Существенно, однако, отметить, что некоторые из них являются универсальными и справедливы для реакций всех типов. Для их получения можно поэтому не конкретизируя вида реакции, рассматривать все возможные реакции одновременно. Поясним сказанное на примере.

Пусть имеется изотопически неполяризованная мишень, составленная из ядер M с изотопическим спином $T = 0$ (например, He_2^4 , C_6^{12} и т.д.).

Рассмотрим некоторое число актов взаимодействия изотопически неполяризованного пучка π -мезонов с этой мишенью. Совокупность всех возможных взаимодействий π^+ -мезонов с ядрами символически запишем в виде:

$$1. \quad \pi^+ + M \rightarrow A\pi^+ + B\pi^- + C\pi^0 + Dp + En$$

где через A , B , C , D и E обозначено среднее число вторичных π -мезонов и нуклонов соответствующих типов. В силу изотопической симметрии, взаимодействия π -мезонов можно записать в виде:

$$1. \quad \pi^- + M \rightarrow A\pi^- + B\pi^+ + C\pi^0 + Dn + Ep$$

Для реакций, вызванных π^0 -мезонами можно записать соотношение

$$2. \quad \pi^0 + M \rightarrow F\pi^+ + G\pi^- + H\pi^0 + Lp + Ln$$

в котором подчеркнута равенство числа π^+ и π^- -мезонов и соответственно числа протонов и нейтронов. Оба эти утверждения также являются прямым следствием изотопической симметрии, так как при изотопическом сопряжении система $\{\pi^0 M\}$ переходит сама в себя.

Далее, ввиду отсутствия для продуктов реакции выделенных направлений число образовавшихся π^+ , π^- и π^0 -мезонов должно быть одинаковым.

Это обстоятельство приводит к общему соотношению:

$$A + B + F = 2C + H, \quad (3.13)$$

которое справедливо для реакций с любым числом вторичных π -мезонов. Следует также отметить, что (3.13) относится как ко всем π -мезонам, так и к $\bar{\pi}$ -мезонам, вылетающим в каком-либо

фиксированном интервале телесных углов и импульсов.

Более интересные соотношения имеют место при взаимодействиях нуклонов с ядрами, у которых $T = 0$. Поступая совершенно таким же образом, как и в предыдущем примере, имеем:

$$I. \quad p + M \rightarrow A\pi^+ + B\pi^- + C\pi^0 + Dn + En$$

$$I'. \quad n + M \rightarrow A'\pi^- + B'\pi^+ + C'\pi^0 + D'n + E'n$$

Отсутствие поляризации для вторичных π -мезонов приводит к равенству

$$A + B = 2C \quad (3.14)$$

С другой стороны, в каждой строке, т.е. в реакциях с одними только протонами (или нейтронами) в отдельности, число заряженных π -мезонов $N_{\pi^\pm} = A + B$, число нейтральных

$$N_{\pi^0} = C.$$

Таким образом, для этих реакций получаем следующее общее соотношение:

$$\frac{N_{\pi^\pm}}{N_{\pi^0}} = 2 \quad \text{х)} \quad (3.15)$$

Полученный результат относится, конечно, и ко вторичным π -мезонам и Σ -гиперонам, образующимся при взаимодействии K -мезонов с ядрами, у которых $T = 0$.

х) Равенство (3.15) справедливо, конечно, не для каждого конкретного акта взаимодействия, а только в среднем.

Соотношение (3.15) справедливо также и по отношению к взаимодействиям Λ^0 - частиц с нуклонами, поскольку изотопический спин Λ^0 - частиц равен нулю.

В связи с равенством (3.15) можно сделать следующее замечание: представим себе мишень, составленную из нескольких одинаковых неполяризованных мишеней таким образом, что частицы, выходящие из первой мишени падают затем на вторую мишень и т.д. (см.рис.1).

Соотношение (3.15) справедливо, очевидно, на любом этапе реакции, т.е. после выхода частиц из любой мишени. Отсюда, вытекает теорема:

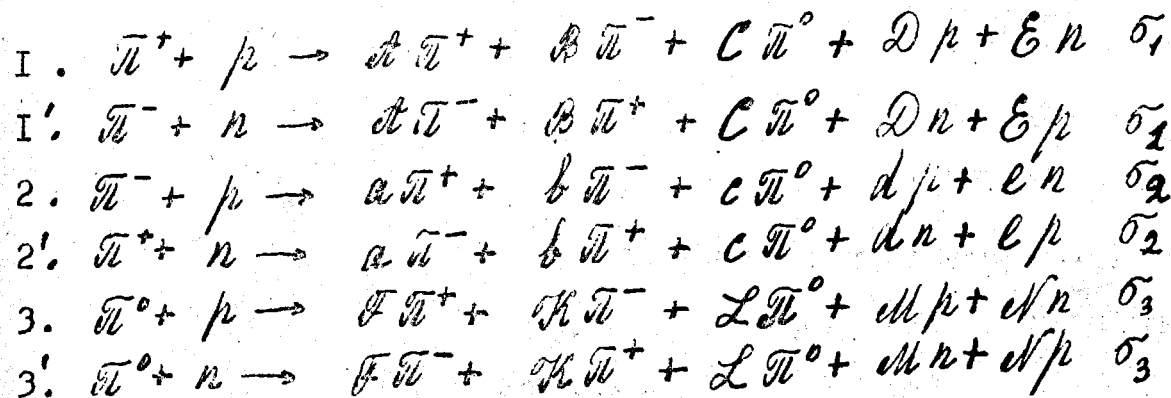
если на изотопически неполяризованную мишень падает смесь пионов такая, что

$$\frac{N_{\pi^+}}{N_{\pi^0}} = \lambda$$

то это соотношение в ходе реакции не изменяется ^{x)}

Аналогичная теорема верна и для Σ - частиц.

Рассмотрим теперь взаимодействия π - мезонов с нуклонами. В этом случае имеем:



x) Другое доказательство этой теоремы приведено в Приложении
 Что касается соотношения между N_{π^+} и N_{π^-} , то при осуществлении многих последовательных актов взаимодействия $N_{\pi^+} \rightarrow N_{\pi^-}$, т.е. конечное состояние оказывается изотопически неполяризованным:

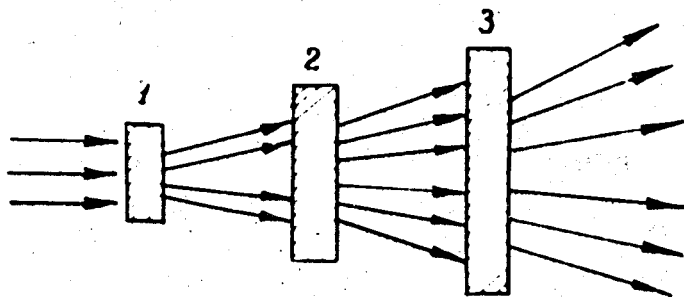


Рис 1

Условие отсутствия поляризации вторичных π -мезонов даёт:

$$A + B + a + b + F + M = 2(C + c + L) \quad (3.16)$$

Рассматривая только те строчки, которые соответствуют реакциям π -мезонов с протонами получаем для вторичных π -мезонов соотношение

$$\frac{N_{\pi^{\pm}}}{N_{\pi^0}} = 2 \quad (3.17)$$

Указанный результат справедлив также и для реакций с участием одних только нейтронов. Равенство (3.17) по своему смыслу фактически совпадает с (3.15), поскольку в интересующих нас сейчас отношениях изотопические свойства смеси π^+ , π^- и π^0 -мезонов совпадают со свойствами ядра, обладающего $T = 0$ (в обоих случаях нет выделенных направлений).

Условие равного выбывания первичных π -мезонов из пучка даёт ещё одно соотношение, связывающее между собой полные сечения соответствующих реакций:

$$\sigma_{1t} + \sigma_{2t} = 2\sigma_{3t} \quad (3.18)$$

или, в более развернутой форме

$$\sigma_t(\pi^+/\mu) + \sigma_t(\pi^-/\mu) = 2\sigma_t(\pi^0/\mu) \quad (3.18')$$

Равенство (3.18') следует также из проведенного выше рассмотрения упругого рассеяния π -мезонов на нуклонах. Действительно, из (2.12) видно, что амплитуды рассеяния π^+ , π^- и π^0 -мезонов на протонах удовлетворяют соотношению

$$A(\theta) + A_{\pi^+}(\theta) = 2A_{\pi^0}(\theta) \quad (3.19)$$

Согласно известной оптической теореме:

$$\sigma_t = 4\pi \lambda \operatorname{Im} A(\theta)$$

Отсюда, сразу же вытекает равенство (3.18).

Некоторые из рассмотренных изотопических равенств для реакций с нефиксированным числом вторичных частиц могут быть использованы для экспериментальной проверки изотопической инвариантности при столкновении частиц высокой энергии.

§ 3. Изотопические соотношения для виртуальных процессов.

В теоретических рассуждениях часто говорят о виртуальной диссоциации какой-либо элементарной частицы на другие частицы. Примером может служить диссоциация нуклона на нуклон и π -мезон, либо на нуклон и несколько π -мезонов^{х)}:

$$N \rightarrow N\pi \quad \text{и} \quad N \rightarrow N\pi\pi\pi \dots$$

В связи с этим вводят также представление о т.н. "мезонном облаке", окружающем нуклон. Наряду с диссоциацией рассматривают также процессы типа поглощения:

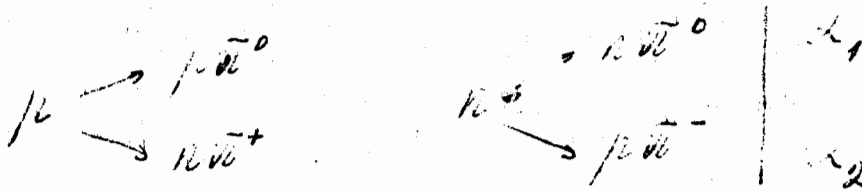
$$\pi N \rightarrow N, \quad K\Sigma \rightarrow N \quad \text{и т.д.}$$

Оба типа процессов, будучи виртуальными идут, как известно, с нарушением закона сохранения энергии.

х) При рассмотрении виртуальных процессов мы несколько отступим от принятых нами ранее обозначений.

Для нас важно, однако, то, что, в соответствии с общей структурой теории, эти процессы не нарушают изотопической инвариантности ^{x)}. Поэтому вывод изотопических соотношений для виртуальных процессов полностью аналогичен выводу изотопических соотношений для процессов реальных.

Для примера рассмотрим сначала одномезонную диссоциацию нуклона, протекающую по схеме $N \rightarrow \bar{\pi} N$. Возможные типы диссоциаций протона и нейтрона имеют вид:



Здесь κ_1 и κ_2 - вероятности диссоциации по каждому из возможных каналов ^{xx)}. Если исходная смесь нуклонов была изотопически неполяризована, то $\bar{\pi}$ -мезоны всех типов должны быть представлены после диссоциации поровну. Это приводит к соотношению.

x) Реальные процессы являются с теоретической точки зрения результатом последовательного осуществления различных виртуальных процессов (например, испускания и поглощения виртуальных частиц). Поэтому, если бы изотопическая инвариантность нарушалась для виртуальных процессов, то она, вообще говоря, не имела бы места и для реальных процессов.

xx) Для изотопически сопряжённых каналов вероятности диссоциации, очевидно, равны друг другу.

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 \quad (3.20)$$

Вообще говоря, нуклон может находиться как в диссоциированном, так и в недиссоциированном состоянии. Если иметь в виду только те случаи, когда нуклон диссоциирован, то

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Отсюда, получаем, что

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}$$

Таким образом для протона с вероятностью $2/3$ имеем в облаке π^+ -мезон и с вероятностью $1/3$ — π^0 -мезон, а для нейтрона положительный π -мезон следует заменить на отрицательный.

При диссоциации типа $N \rightarrow \Sigma K$ роль π -мезона играет, очевидно, Σ - гиперон, в то время как K -мезон играет роль нуклона. Поэтому, например, протон диссоциирует на Σ^+ вдвое чаще, чем на Σ^0 . Если диссоциация нуклона происходит по схеме $N \rightarrow \Lambda^0 K$, то возможные реакции имеют вид:



причём оба процесса идут одинаково часто.

В этом случае K -мезонное облако протона всегда заряжено, а нейтрона — нейтрально. Аналогично можно рассмотреть и другие более сложные случаи виртуальной диссоциации.

Выше уже говорилось, что в мезонном облаке нуклона не обязательно должен находиться только один пион. С определённой вероятностью в облаке может быть два, три пиона и т.д. Для общего рассмотрения всей совокупности этих процессов

предположим, что у нас имеется определённое число протонов и равное ему число нейтронов. Если "суммарное облако", связанное с протонами символически записать в виде:

$$p \rightarrow A\pi^+ + B\pi^- + C\pi^0,$$

где A , B и C - среднее число π -мезонов каждого типа, то, в силу зарядовой симметрии, "суммарное мезонное облако", связанное с нейтронами будет иметь вид:

$$n \rightarrow A\pi^- + B\pi^+ + C\pi^0$$

Сравнивая число π^+ и π^0 -мезонов получим:

$$A + B = 2C$$

Отсюда, следует, что в мезонном облаке одних только протонов (или одних только нейтронов) число заряженных π -мезонов вдвое превосходит число нейтральных. Виртуальная диссоциация других сильно взаимодействующих частиц может быть рассмотрена аналогичным образом.

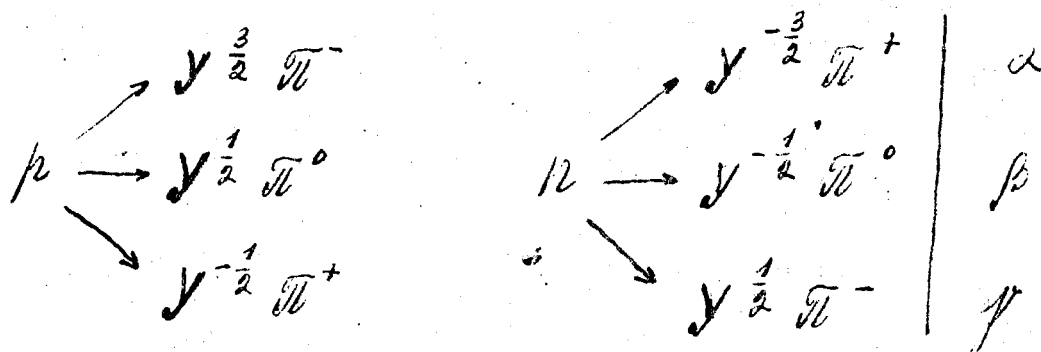
§ 4. Процессы с участием изобар.

Под изобарой Y мы, как обычно, будем понимать частицу ^{x)}, образующуюся при соединении π -мезона с нуклоном и быстро распадающуюся на пион и нуклон. Изотопический спин изобары $T = 3/2$. Величину проекции изотопического спина изобары T_z будем обозначать соответствующим

x) В связи с исключительно малым временем жизни ($\tau \sim 10^{-23}$ сек) часто обсуждается вопрос, можно ли вообще считать изобару "настоящей частицей". То или иное решение этого вопроса не имеет значения для дальнейшего изложения, т.к. мы будем интересоваться только изотопическими соотношениями.

индексом при Y . Связь между $T_{\frac{1}{2}}$ и зарядом изобары задается таблицей УП.

Начнём с виртуальной диссоциации нуклонов на изобару Y и π -мезон. Возможные каналы такой диссоциации имеют вид:



Соответствующие вероятности α , β и γ связаны равенствами

$$\alpha = \beta + \gamma \quad (3.21)$$

и

$$\alpha + \gamma = 2\beta \quad (3.22)$$

из которых первое получается при сравнении числа изобар с различным $T_{\frac{1}{2}}$, второе при сравнении числа π -мезонов. Кроме того, если исключить из рассмотрения случаи, когда диссоциация не имеет места, то дополнительно можно положить:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Отсюда следует, что

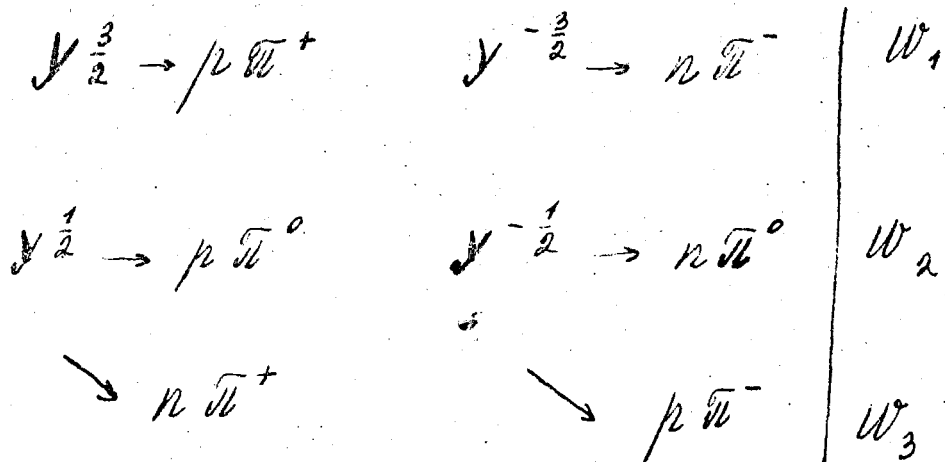
$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{6} \quad (3.23)$$

Таблица VII

Обозначение	Заряд
$\gamma^{3/2}$	$e = +2$
$\gamma^{1/2}$	$e = +1$
$\gamma^{-1/2}$	$e = 0$
$\gamma^{-3/2}$	$e = -1$

Перейдём теперь к распаду изобары $Y \rightarrow n\bar{\pi}$.

Для неполяризованной смеси изобар возможные распады имеют вид:



Здесь W_1 , W_2 и W_3 - вероятности распадов изобар по соответствующим каналам, отнесенные к единице времени.

Подсчёт числа "выбывающих" изобар и появляющихся $\bar{\pi}$ -мезонов даёт:

$$W_2 + W_3 = W_1, \quad (3.24)$$

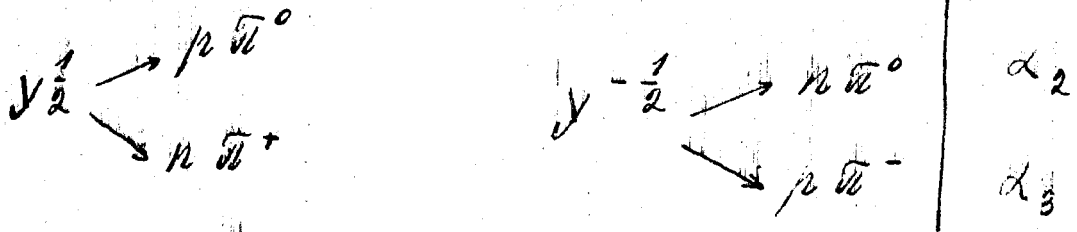
$$W_1 + W_3 = 2W_2 \quad (3.25)$$

Отсюда

$$W_2 = 2W_3 \quad (3.26)$$

Изобары $Y^{\frac{3}{2}}$ и $Y^{-\frac{3}{2}}$ распадаются единственным образом, $Y^{\frac{1}{2}}$ и $Y^{-\frac{1}{2}}$ могут распадаться по двум каналам. Сопоставление величин W_2 и W_3 позволяет получить соотношение между полными вероятностями альтернативных

схем распада изобар:



С одной стороны,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{W_2}{W_3},$$

т.е.

$$\alpha_2 = 2\alpha_3$$

С другой стороны,

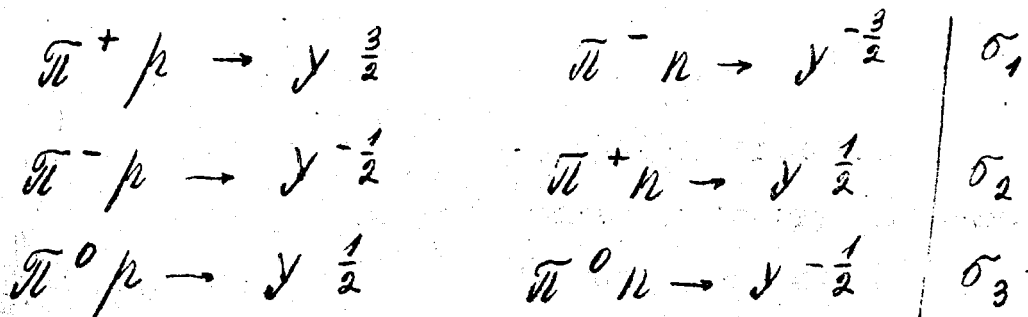
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

что даёт

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \alpha_3 = \frac{1}{3} \quad (3.27).$$

Аналогично можно рассмотреть процесс образования изобары $\pi N \rightarrow \gamma$.

При этом имеют место следующие возможные реакции:



Подсчёт выбывания π - мезонов и появления изобар приводит к следующим соотношениям между сечениями:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_3 \quad (3.28)$$

и
$$\sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 \quad (3.29)$$

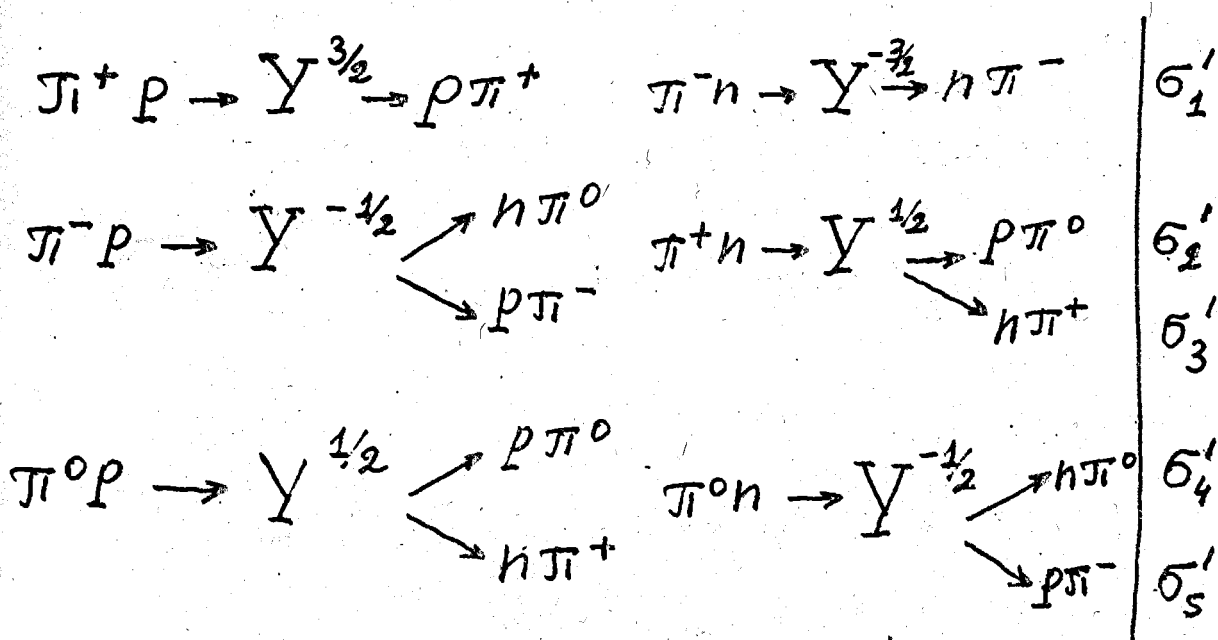
т.е.
$$\sigma_3 = 2\sigma_2 \text{ и } \sigma_1 = 3\sigma_2 \quad (3.30)$$

Аналогичным образом можно получать изотопические соотношения в любых процессах с участием изобар, рассматривая изобару как частицу с изотопическим спином равным $3/2$ (см. главу V, § 2).

Выше мы рассмотрели реакции образования изобар и возможные их распады. Рассмотрим теперь последовательное протекание этих процессов, происходящее по схеме:



Возможные реакции имеют вид:



Используя равенства (3.28 ÷ 3.30) и (3.24 ÷ 3.26) получаем

$$\sigma_1' : \sigma_2' : \sigma_3' = 9:2:1 \quad \text{и} \quad \sigma_4' : \sigma_5' = 2:1$$

Нетрудно видеть, что эти соотношения совпадают с соотношениями (2.15). Совпадение вполне естественно, так как введение каскадной реакции $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ с промежуточной изобарой есть не что иное, как рассмотрение обычным способом реакции $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ идущей по одному каналу с $T = \frac{3}{2}$ (см. главу II, §3)

Аналогичным способом вычисляются изотопические соотношения для любой одноканальной реакции. При этом роль изобары играет некая гипотетическая частица с определенным изотопическим спином.

Разобранный выше методический прием прост и не использует коэффициентов К-Г. В дальнейшем мы будем неоднократно им пользоваться (см. главы IV, V, VI и Приложение VI).

§ 5. Изотопические соотношения для различных угловых интервалов.

Иногда оказывается возможным получить изотопические соотношения, связывающие дифференциальные сечения одного и того же процесса для различных угловых интервалов в системе центра инерции. Система центра инерции оказывается выделенной в связи с тем, что в ней в ряде случаев может иметь место дополнительная кинематическая симметрия.

Прежде всего рассмотрим взаимодействие тождественных частиц, например, $p + p$, $K + K$, $n + n$ и т.п.

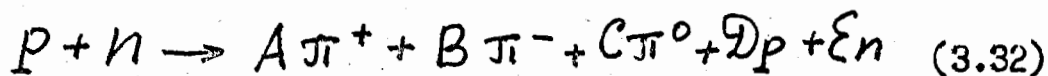
Для таких взаимодействий в системе центра инерции направления "вперёд" и "назад" совершенно равноправны. Отсюда сразу же следует вывод о симметрии в распределении вторичных частиц относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения первичных частиц. Если, например, мы обозначим через $\sigma_+(\vartheta)$ дифференциальное сечение реакции с вылетом под углом ϑ положительного π -мезона, то справедливо равенство:

$$\sigma_+(\vartheta) = \sigma_+(\pi - \vartheta) \quad (3.31)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для других вторичных частиц, а также для их произвольных комбинаций.

Далее перейдем к столкновениям изотопически сопряженных частиц ($\pi^+ + \pi^-$, $\Sigma^+ + \Sigma^-$, $\bar{p} + \bar{n}$ и т.д.)

В качестве примера рассмотрим взаимодействие



и будем интересоваться числом π -мезонов и нуклонов, вылетающих в различные полупространства ("вперед" и "назад") в системе центра инерции^{х)}. Результат взаимодействия можно наглядно записать в виде таблицы α рис. 2.

Стрелки над нуклонами показывают направление их движения в системе центра инерции до столкновения; через α_i и β_i обозначено число вторичных частиц различных типов, вылетающих в направлении первичного протона и, соответственно, - нейтрона.

х) Система обозначений в (3.32) совпадает с принятой в главе III, § 2.

a

\vec{p}	\vec{n}
$\alpha_1 \pi^+$	$\beta_1 \pi^+$
$\alpha_2 \pi^-$	$\beta_2 \pi^-$
$\alpha_3 \pi^0$	$\beta_3 \pi^0$
$\alpha_4 p$	$\beta_4 p$
$\alpha_5 n$	$\beta_5 n$

b

\vec{n}	\vec{p}
$\alpha_1 \pi^-$	$\beta_1 \pi^-$
$\alpha_2 \pi^+$	$\beta_2 \pi^+$
$\alpha_3 \pi^0$	$\beta_3 \pi^0$
$\alpha_4 n$	$\beta_4 n$
$\alpha_5 p$	$\beta_5 p$

b

\vec{p}	\vec{n}
$\beta_1 \pi^-$	$\alpha_1 \pi^-$
$\beta_2 \pi^+$	$\alpha_2 \pi^+$
$\beta_3 \pi^0$	$\alpha_3 \pi^0$
$\beta_4 n$	$\alpha_4 n$
$\beta_5 p$	$\alpha_5 p$

Duc.2

В случае, когда слева летит нейтрон, а справа протон, результат взаимодействия может быть получен с помощью изотопического сопряжения. Соответствующая реакция изображена на таблице \mathcal{J} рис.2. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что каждая частица заменена на соответствующую изотопически - сопряженную частицу без изменения порядка следования величин α_i и β_i . Произведём теперь поворот на 180° в обычном (не-изотопическом) пространстве относительно оси перпендикулярной направлению движения первичных частиц ^{x)}. Тогда вместо конфигурации \mathcal{J} получим новую конфигурацию \mathcal{L} , отличающуюся от прежней только перестановкой столбцов. Вместе с тем мы снова приходим к исходной ситуации \mathcal{A} , соответствующей случаю когда слева летит первичный протон, справа-нейтрон. Следовательно, результаты взаимодействий, записанных в виде таблиц \mathcal{A} и \mathcal{L} должны совпадать между собой. Число π^+ -мезонов, летящих в переднюю полусферу в схеме \mathcal{A} должно быть равно числу π^+ -мезонов летящих в том же направлении в схеме \mathcal{L} . Это даёт соотношение:

$$\alpha_1 = \beta_2$$

Расуждая аналогично для всех вторичных π - мезонов и нуклонов получаем окончательную систему равенств:

$$\alpha_1 = \beta_2$$

$$\alpha_2 = \beta_1$$

$$\alpha_3 = \beta_3$$

$$\alpha_4 = \beta_5$$

$$\alpha_5 = \beta_4$$

(3.33)

х) Здесь мы для простоты предполагаем отсутствие азимутальной асимметрии в направлениях вылета вторичных частиц.

Обратимся теперь снова к первоначальной таблице A . Как нетрудно видеть, равенства (3.33) означают, что во всех реакциях, имеющих место при взаимодействии протона с нейтронам число π^+ , π^- , π^0 -мезонов, летящих в переднюю полусферу равно соответственно числу π^- , π^+ и π^0 -мезонов, летящих в заднюю полусферу.

Таким образом:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\pi^+} &= \overleftarrow{N}_{\pi^-} \\ \vec{N}_{\pi^-} &= \overleftarrow{N}_{\pi^+} \\ \vec{N}_{\pi^0} &= \overleftarrow{N}_{\pi^0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Аналогично для нуклонов имеем:

$$\begin{aligned} \vec{N}_p &= \overleftarrow{N}_n \\ \vec{N}_n &= \overleftarrow{N}_p \end{aligned} \quad (3.34')$$

Из (3.34) следует также, что полное число заряженных π -мезонов, летящих вперед равно числу заряженных π -мезонов, летящих назад:

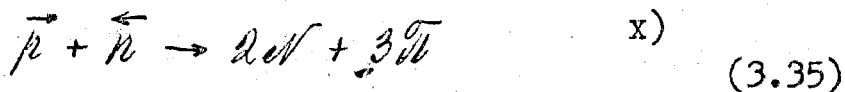
$$\vec{N}_{\pi^\pm} = \overleftarrow{N}_{\pi^\pm} \quad (3.34'')$$

Всё сказанное выше, очевидно, справедливо не только для полупространств, но и для любых телесных углов, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения первичных частиц.

Аналогичные соотношения можно получить и при генерации странных частиц. Соответствующие равенства для Σ -гиперонов

совпадают, как легко видеть, с (3.34), для K-мезонов - с (3.34'). Что касается Λ^0 -частиц, то они должны лететь вперед и назад в равном количестве, так как их изотопический спин равен нулю.

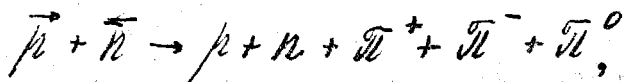
Соотношения (3.34) и (3.34') справедливы и в том случае, когда рассматриваются не все возможные реакции (3.32), а только реакции определенного типа, например, реакции



Полученные изотопические соотношения могут быть иногда полезны при анализе экспериментальных данных.

Предположим, например, что изучается взаимодействие нейтронов с протонами, причём вторичные частицы не идентифицируются и знаки их не определяются. В этих условиях, опираясь на (3.34'') можно

x) При этом, конечно, предполагается, что суммируются продукты всех без исключения видов реакции (3.35) безотносительно к знаку вторичных мезонов. Следует, впрочем, отметить, что в некоторых специальных случаях можно ограничиться рассмотрением какой-либо одной частной реакции. Так, например, соотношения (3.34) и (3.34'') относятся также к реакции



рассматриваемой вне связи с остальными реакциями (3.35).

все же сказать, что для симметричных телесных углов разность числа заряженных частиц, летящих вперед и назад связана исключительно со вторичными протонами. Это даёт возможность получить некоторое представление о числе вторичных протонов и об их угловом распределении. Предположим теперь, что используемая экспериментальная методика позволяет определять знаки вторичных частиц. В этом случае число протонов летящих в некотором телесном угле равно разности числа положительных частиц, летящих в этом угле, и числа отрицательных частиц, летящих в симметричном телесном угле.^{x)}

x) В приведенных примерах для простоты предполагается, что среди вторичных заряженных частиц нет K -мезонов.

§ 6. Особенности изотопических соотношений для процессов с участием частиц, относящихся к одному изотопическому мультиплету.

I. Соотношения для полных и дифференциальных сечений.

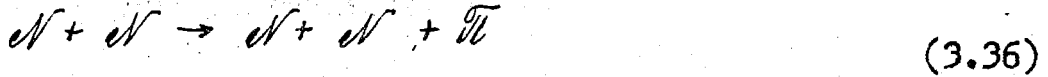
Упрощенный метод получения изотопических соотношений, с которым мы познакомились в этой главе, позволяет связывать между собой как полные, так и дифференциальные сечения. Следует, однако, заметить, что соотношения между дифференциальными сечениями реакций, идущих с участием частиц, принадлежащих к одному и тому же изотопическому мультиплету, имеют некоторые особенности. Это можно заметить рассуждая следующим образом.

Пусть в некоторой реакции в конечном состоянии имеются две частицы a_1 и a_2 , являющиеся компонентами одного и того же изотопического мультиплета. Указанные частицы соответствуют различным зарядовым состояниям одной и той же частицы, поэтому их перестановка не изменяет ту часть матричного элемента, которая зависит от пространственных и спиновых переменных. Вместе с тем, изотопическая часть матричного элемента при такой перестановке, конечно, изменяется. По этой причине, выписывая систему возможных реакций для получения соотношений между дифференциальными сечениями, мы должны отдельно выписать реакции, отличающиеся перестановкой частиц a_1 и a_2 в конечном состоянии.

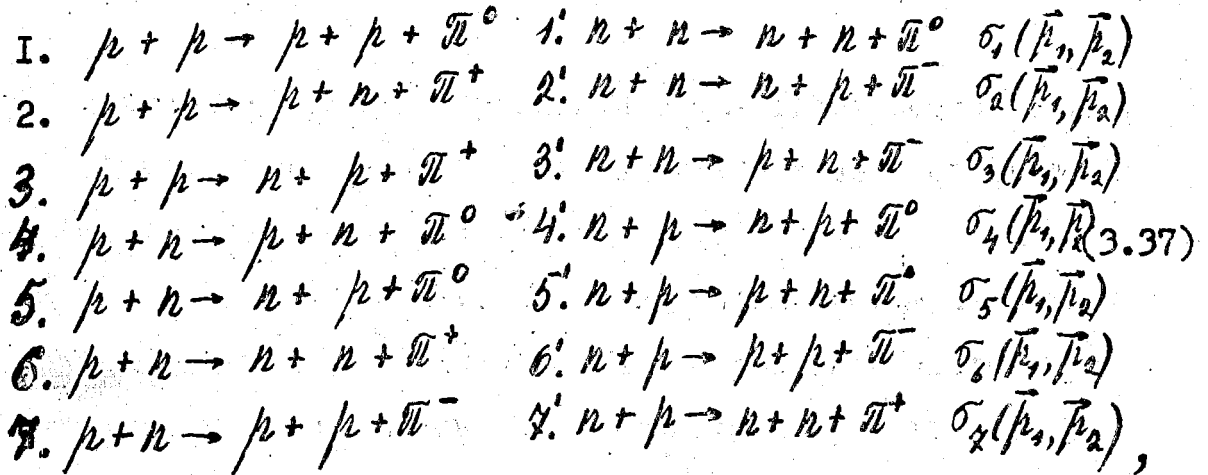
Проследим указанную особенность на двух конкретных

примерах.

а) Рассмотрим реакции



Возможные каналы этого процесса имеют вид



где $\sigma_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ дифференциальные сечения соответствующих реакций, зависящие от импульсов вторичных нуклонов $x)$

(импульс пиона, очевидно, однозначно определён импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2).

x) $\sigma_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ является плотность вероятности в пространстве импульсов и телесных углов двух вторичных нуклонов, т.е.

$$dW_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sigma_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) d\Omega_1 d\Omega_2 dp_1 dp_2$$

есть вероятность того, что один нуклон движется в элементе телесного угла $d\Omega$ и имеет импульс величина которого заключена в пределах от p_1 до $p_1 + dp_1$, а второй нуклон движется в элементе телесного угла $d\Omega_2$ и имеет импульс, модуль которого лежит в пределах от p_2 до $p_2 + dp_2$

Реакции 3 (3.37) получаются из реакций 2 (3.37) перестановкой вторичных нуклонов, поэтому ясно, что

$$\sigma_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sigma_2(\vec{p}_2, \vec{p}_1)$$

То же самое следует сказать о реакциях 4 и 5 (3.37), т.е.

$$\sigma_4(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sigma_5(\vec{p}_2, \vec{p}_1)$$

Сравнивая число заряженных и нейтральных пионов получаем единственное изотопическое соотношение между дифференциальными сечениями реакций (3.37):

$$2[\sigma_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) + \sigma_4(\vec{p}_1, \vec{p}_2) + \sigma_4(\vec{p}_2, \vec{p}_1)] = \sigma_2(\vec{p}_1, \vec{p}_2) + \sigma_2(\vec{p}_2, \vec{p}_1) + \sigma_6(\vec{p}_1, \vec{p}_2) + \sigma_4(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \quad (3.38)$$

Переход к полным сечениям осуществляется интегрированием этого выражения по всем возможным значениям векторов \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . При этом дифференциальные сечения

$\sigma_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$, $\sigma_6(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ и $\sigma_4(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ переходят в соответствующие удвоенные полные сечения, так как каждое состояние двух тождественных частиц (два протона или два нейтрона) учитывается дважды. Кроме того полезно заметить, что полные сечения σ_{6t} и σ_{4t} равны друг другу.

Это утверждение непосредственно следует из того, что реакция 6 и реакция 7' по сути дела одна и та же реакция, рассматриваемая с точки зрения разных систем координат (одна система координат повернута относительно другой на 180° около оси перпендикулярной к направлению полета первичных частиц).^{х)}

х) Этот же результат следует из того, что реакции 6 и 7 являются изотопическим сопряженными.

Таким образом, окончательно имеем для полных сечений соотношение

$$\sigma_{2t} + 2\sigma_{6t} = 2(\sigma_{1t} + \sigma_{4t})$$

К этому же соотношению мы можем прийти непосредственно, если вместо (3.37) рассмотрим следующую систему реакций:

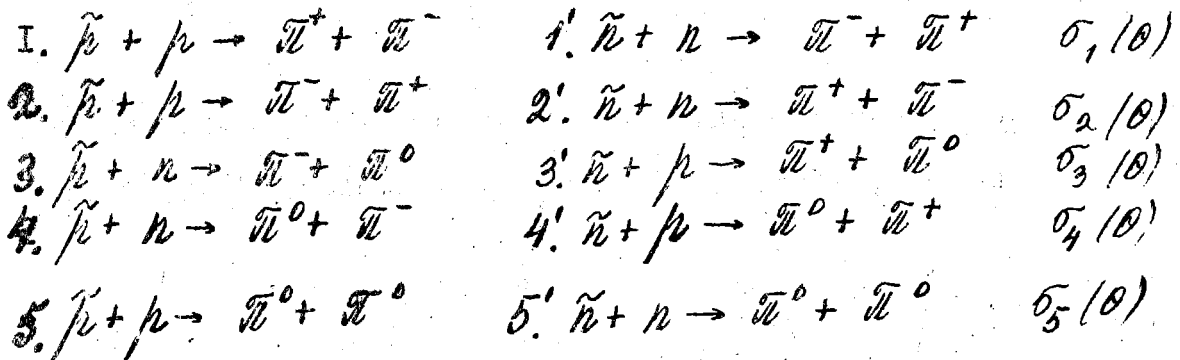
- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------|
| 1. $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ | 1'. $n + n \rightarrow n + n + \pi^0$ | σ_{1t} |
| 2. $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ | 2'. $n + n \rightarrow n + p + \pi^-$ | σ_{2t} |
| 3. $p + n \rightarrow p + n + \pi^0$ | 3'. $n + p \rightarrow n + p + \pi^0$ | σ_{3t} |
| 4. $p + n \rightarrow p + n + \pi^+$ | 4'. $n + p \rightarrow p + p + \pi^-$ | σ_{4t} |
| 5. $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$ | 5'. $n + p \rightarrow n + n + \pi^+$ | σ_{5t} |

Итак, в этом примере соотношение для дифференциальных сечений отличается от соответствующего соотношения для полных сечений. Это обстоятельство является, конечно, типичным для всех процессов, протекающих с участием частиц, относящихся к одному и тому же изотопическому мультиплету.

Рассмотрим аннигиляцию пары нуклон-антинуклон по схеме

$$\bar{N} + N \rightarrow \pi + \pi \quad (3.39)$$

Для получения соотношений между дифференциальными сечениями реакций (3.39) следует записать в виде:



Здесь $\sigma_i(\theta)$ дифференциальные сечения, зависящие от угла между линией разлёта пионов и направлением пучка первичных частиц x).

Так же, как и в первом примере, имеются очевидные равенства:

$$\sigma_1(\theta) = \sigma_2(\pi - \theta)$$

$$\sigma_3(\theta) = \sigma_4(\pi - \theta),$$

так как реакции 1 и 3 | получаются из реакций 2 и 4 перестановкой пионов. Мы будем считать, что в реакциях (3.40) пион записанный первым вылетает под углом θ к направлению движения первичных частиц, а пион, записанный вторым, вылетает под углом $\pi - \theta$. Так как в любом телесном угле изотопическая поляризация вторичных частиц отсутствует, то для получения изотопических соотношений можно отдельно рассматривать пионы, летящие под углом θ и под углом $\pi - \theta$. Это даёт два соотношения

x) Зависимость сечений от абсолютной величины импульса пионов в данном случае нас не интересует, Реакции рассматриваются в системе центра масс.

между дифференциальными сечениями:

$$\sigma_1(\theta) + \sigma_1(\pi - \theta) + \sigma_3(\theta) = 2\sigma_3(\pi - \theta) + 2\sigma_5^-(\theta) \quad (3.41)$$

$$\sigma_1(\theta) + \sigma_1(\pi - \theta) + \sigma_3(\pi - \theta) = 2\sigma_3(\theta) + 2\sigma_5^-(\theta) \quad (3.42)$$

или

т.е.

$$\sigma_3(\theta) - \sigma_3(\pi - \theta) = 2[\sigma_3(\pi - \theta) - \sigma_3(\theta)],$$

$$\sigma_3(\theta) = \sigma_3(\pi - \theta) \quad (3.43)$$

При переходе к полным сечениям равенства (3.41) и (3.42) приводят к одному и тому же соотношению для полных сечений

$$2\sigma_{1t} + \sigma_{3t} = 2(\sigma_{3t} + 2\sigma_{5t}^-) \quad (3.44)$$

При интегрировании по телесному углу 4π сечение σ_5^- удваивается, так как каждое состояние двух π^0 -мезонов учитывается дважды (π^0 -мезоны - тождественные частицы !)

Интересно отметить нетривиальность равенства (3.43). Оно имеет место благодаря тому, что мы различали пионы не только по знаку заряда, но и по направлению их движения. При таком подходе реакции (3.39) вполне аналогичны реакциям

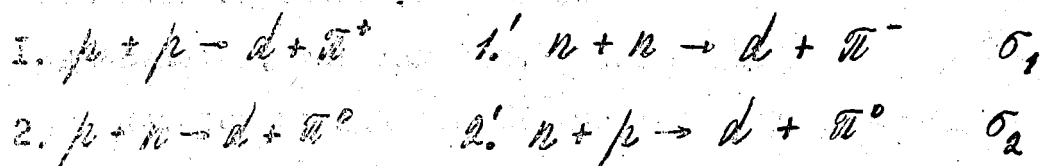
$$N + \tilde{N} \rightarrow \Sigma + \tilde{\Sigma} \quad (3.45)$$

для которых в конечном состоянии имеются совершенно различные частицы (см. приложение IV). Рассматривая соотношения между полными сечениями, мы не фиксируем углы вылета вторичных пионов, поэтому нет возможности отличать один пион от другого.

В этом случае указанная аналогия между (3.39) и (3.45) исчезает. Вместе двух соотношений (3.41) и (3.42) получается только одно соотношение (3.44)

2. Соотношения для сечений прямых и обратных реакций.

Обратим внимание на особенность изотопических равенств для реакций с участием тождественных частиц. Эта особенность заключается в том, что полные сечения прямых и обратных реакций удовлетворяют различным соотношениям. Покажем это, например, для реакций



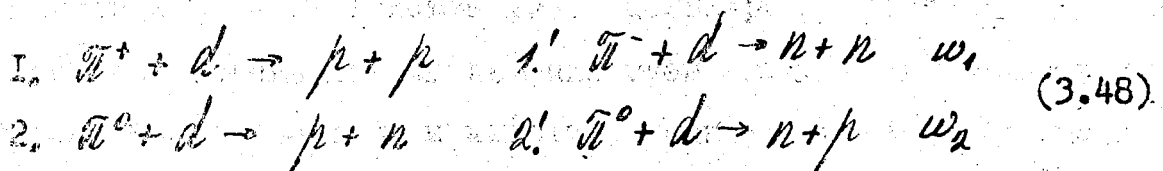
Полные сечения этих реакций удовлетворяют, очевидно, равенству

$$\sigma_{1t} = 2\sigma_{2t} \quad (3.46)$$

Такому же равенству удовлетворяют и дифференциальные сечения

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \quad (3.47)$$

Для дифференциальных сечений обратных реакций



имеем соотношение совпадающее с (3.47)

$$\omega_1 = 2\omega_2 \quad (3.49)$$

Интегрируя это соотношение по всем углам, перейдем к полным сечениям, учитывая, конечно, тождественность частиц в конечном состоянии. Это приводит к равенству

$$\omega_{1t} = \omega_{2t}, \quad (3.50)$$

не совпадающему с (3.46) х)

Соотношение (3.50) можно получить и непосредственно из рассмотрения реакций (3.48), нужно только заметить, что, если речь идёт о полных сечениях, то обе реакции 2 (3.48) идентичны, и следовательно, учитывать нужно только одну из них.

х) Согласно принципу детального равновесия дифференциальные сечения прямых и обратных реакций пропорциональны друг другу (см. главу III § I). Совпадение соотношений (3.47) и (3.49) является поэтому необходимым. Для полных сечений соответствующие соотношения (3.46) и (3.50) не совпадают, что, на первый взгляд, противоречит принципу детального равновесия. Противоречие снимается, если заметить, что статистический вес системы двух тождественных частиц (два протона или два нейтрона) вдвое меньше, чем для системы двух нетождественных частиц (пион и дейтон).

ГЛАВА IV.

Вычисление коэффициентов Клебша-Гордона

§ I. Система из двух частиц с изотопическими спинами равными 1/2.

В главе II был разъяснен физический смысл коэффициентов К-Г и приведены формулы для их вычисления. Сейчас мы займемся доказательством этих формул. Обычно для этой цели используются определенные математические свойства групп вращений. В соответствии с общим духом нашего изложения мы выберем другой путь логически может быть менее "стройный", но зато более простой и наглядный.

В качестве простейшего примера возьмем систему из двух частиц, изотопические спины которых равны 1/2. Пусть это будут, скажем, К - мезон и нуклон. Рассмотрим возможные "физические" состояния этой системы и их разложения по "изотопическим" состояниям:

$$\left. \begin{aligned} (K^+, p) &= e^{i\delta_1} (1, 1), & (K^0, n) &= e^{i\delta_2} (1, -1) \\ (K^0, p) &= \alpha e^{i\delta_3} (1, 0) + \beta e^{i\delta_4} (0, 0), & (K^+, n) &= \gamma e^{i\delta_5} (1, 0) + \delta e^{i\delta_6} (0, 0) \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Все величины α , β , γ , δ и δ_i считаются действительными числами, причем предполагается, что фазы δ_i выбраны таким образом, что α , β , γ и δ положительны. Коэффициенты разложения (4.1) и являются искомыми коэффициентами К.-Г., подлежащими вычислению.

Здесь следует напомнить, что любая из "Физических" функций

равно как и любая из "изотопических" функций может быть умножена на любое число типа $e^{i\Delta}$ без нарушения ортонормированности. С другой стороны, коэффициенты разложения являются вполне определенными величинами только при вполне определенном выборе "физических" и "изотопических" функций. Связанная с этим обстоятельством неопределенность в коэффициентах К.-Г. не сказывается ни на одном из физических выводов поскольку все физически наблюдаемые характеристики связаны с квадратичными образованиями, из которых величины типа $e^{i\Delta}$ выпадают ($|e^{i\Delta}|^2 = 1$).

На основании сказанного мы всегда можем переопределить "изотопические" функции (I, I) и $(I, -I)$ таким образом, чтобы величины δ_1 и δ_2 обратились в нуль. Точно так же изменяя соответствующим образом определение "изотопических" функций $(I, 0)$ и $(0, 0)$ можно добиться исчезновения фаз δ_3 и δ_4 . При этом величины δ_5 и δ_6 в нуль, вообще говоря, не обращаются. х)

Поэтому равенства (4.1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (K^+, \mu) &= (2, 1), \quad (K^0, \mu) = (1, -1) \\ (K^-, \mu) &= \alpha(1, 0) + \beta(0, 0), \quad (K^+, \mu) = \gamma e^{i\delta_5}(1, 0) + \delta e^{i\delta_6}(0, 0) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Далее, используем условие ортонормировки "физических" и "изотопических" собственных функций:

х) При другом возможном определении функций $(I, 0)$ и $(0, 0)$ можно добиться исчезновения фаз δ_5 и δ_6 , но тогда δ_3 и δ_4 , вообще говоря, отличны от нуля.

$$\langle (K^+, n)^*, (K^+, n) \rangle = \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

$$\langle (K^0, \rho)^*, (K^0, \rho) \rangle = \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

(4.3)

$$\langle (K^0, \rho)^*, (K^+, n) \rangle = \alpha \gamma e^{i\delta_5} + \beta \delta e^{i\delta_6} = 0$$

Так как $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ действительные и положительные числа, то из последнего условия (4.3) следует:

$$e^{i(\delta_6 - \delta_5)} = -1$$

Поэтому система равенств (4.3) принимает вид

$$\gamma^2 + \delta^2 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

(4.4)

$$\alpha \gamma - \beta \delta = 0,$$

а вместо последнего соотношения (4.2) получаем

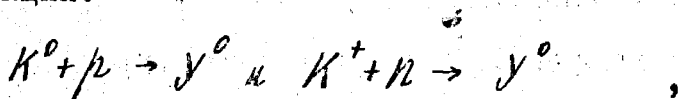
$$(K^+, n) = e^{i\delta_5} \{ \gamma(1, 0) - \delta(0, 0) \}$$

Изменим теперь определение (K^+, n) таким образом, чтобы величина δ_5 обратилась в нуль. В этих условиях все "физические" и "изотопические" функции уже окончательно фиксированы, а соотношение (4.2) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (K^+, \rho) &= (1, 1), \quad (K^0, n) = (1, -1) \\ (K^0, \rho) &= \alpha(1, 0) + \beta(0, 0), \quad (K^+, n) = \gamma(1, 0) - \delta(0, 0) \end{aligned} \right\} (4.5)$$

Равенств (4.4) очевидно недостаточно для определения всех величин α , β , f и δ . Для получения недостающего равенства используем следующий вспомогательный прием. Предположим, что при взаимодействии K -мезона с нуклоном в промежуточном состоянии образуется некоторая гипотетическая частица Y с изотопическим спином $T = I^x$) и будем рассматривать реакцию $KN \rightarrow Y$ (см. главу III, §4).

Среди возможных каналов этого взаимодействия имеют место реакции:



сечения которых равны друг другу в силу изотопической симметрии. С другой стороны, на основании (2.6) их сечения пропорциональны соответственно α^2 и f^2 . Следовательно,

$$\alpha = f$$

Отсюда, используя равенства (4.4) легко получить

$$\alpha = \beta = f = \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Поэтому для разложения (4.1) окончательно имеем:

$$(K^+, p) = (1, 1), \quad (K^0, n) = (1, -1)$$

(4.6)

$$(K^0, p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (1, 0) + (0, 0) \}, \quad (K^+, n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (1, 0) - (0, 0) \}$$

- х) Приведенное крайнее предположение выбрано в целях большей наглядности и облегчения записи реакций. Для получения всех последующих результатов достаточно предположить, что взаимодействия K -мезонов и нуклонов происходит только в состоянии с $T = I$. Точно также достаточным является и прямо противоположное предположение (взаимодействие только при $T = 0$).

Вытекающие из (4.6) значения коэффициентов К.-Г. совпадают с табличными (см. таблицу II). Поскольку при выводе (4.6) использовались только изотопические свойства К-мезонов и нуклонов, то те же самые коэффициенты К.-Г. будут для всех пар частиц с $T = 1/2$, в частности, для систем $\{\tilde{p}\tilde{n}\}$, $\{K^+K^0\}$, $\{\Sigma^0\Sigma^-\}$ и т.д.

§ 2. СЛУЧАЙ ДВУХ ЧАСТИЦ С ИЗОТОПИЧЕСКИМИ СПИНАМИ

I и I/2.

Рассмотрим несколько более сложный пример - систему пион-нуклон. Разложения "физических" состояний по "изотопическим" будут иметь вид:

$$(\tilde{p}^+, p) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad (\tilde{p}^-, n) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

$$(\tilde{p}^0, p) = \alpha_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) - \beta_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (\tilde{p}^0, n) = \alpha_1 \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \beta_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (4.7)$$

$$(\tilde{p}^-, p) = \alpha_2 e^{i\mu} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \beta_2 e^{i\nu} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$(\tilde{p}^+, n) = \alpha_2 e^{i\delta} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \beta_2 e^{i\lambda} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Предполагается, что все величины μ , ν , δ и λ являются действительными числами, а α_i и β_i - действительными положительными числами. Этого всегда можно добиться при соответствующем определении "изотопических" функций, используя процедуру вполне аналогичную проведенной выше для системы частиц с изотопическим спином $T = 1/2$.

Условия ортонормировки имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1 \\ \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$\lambda - \delta = 0, \quad \nu - \mu = \pi \quad (4.9)$$

Поэтому последние два равенства (4.7) можно записать в виде:

$$(\bar{\pi}, p) = e^{i\mu} \left\{ \alpha_1 \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) - \beta_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (\bar{\pi}, n) = e^{i\delta} \left\{ \alpha_2 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Переопределим теперь "физические" функции $(\bar{\pi}, p)$ и $(\bar{\pi}, n)$ таким образом, чтобы величины μ и δ обратились в нуль. При этом все рассматриваемые функции-и, физические, и "изотопические" - окажутся полностью фиксированными и равенства (4.7) примут вид:

$$\begin{aligned} (\bar{\pi}, p) &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), & (\bar{\pi}, n) &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) \\ (\bar{\pi}, p) &= \alpha_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) - \beta_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), & (\bar{\pi}, n) &= \alpha_1 \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \beta_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ (\bar{\pi}, p) &= \alpha_2 \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), & (\bar{\pi}, n) &= \alpha_2 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для вычисления коэффициентов К-Г рассмотрим в качестве методического приема реакции типа $\bar{\pi} N \rightarrow Y$, где Y некоторая фиктивная частица $x)$ с $T = 3/2$:

$$\begin{aligned} 1. \pi^+ + p &\rightarrow y^{3/2} \\ 2. \pi^- + p &\rightarrow y^{-1/2} \\ 3. \pi^0 + p &\rightarrow y^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \pi^- + n &\rightarrow y^{3/2} \\ 2. \pi^+ + n &\rightarrow y^{1/2} \\ 3. \pi^0 + n &\rightarrow y^{-1/2} \end{aligned}$$

Легко убедиться (см. главу III § 3), что сечения σ_1 , σ_2 и σ_3 связаны соотношениями:

$$\sigma_3 = 2\sigma_2 \quad \text{и} \quad \sigma_1 = 3\sigma_2$$

С другой стороны: $\sigma_1 = |f|^2$, $\sigma_2 = \alpha_2^2 |f|^2$, $\sigma_3 = \alpha_1^2 |f|^2$ х)

Отсюда, следует, что

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Используя равенства (4.8), найдем остальные коэффициенты:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Окончательно имеем:

$$(\pi^+, p) = (3/2, 3/2); \quad (\pi^-, n) = (3/2, -3/2)$$

$$(\pi^0, p) = \sqrt{\frac{2}{3}} (3/2, 1/2) - \frac{1}{\sqrt{3}} (1/2, 1/2); \quad (\pi^0, n) = \sqrt{\frac{2}{3}} (3/2, -1/2) + \frac{1}{\sqrt{3}} (1/2, -1/2) \quad (4.11)$$

$$(\pi^-, p) = \frac{1}{\sqrt{3}} (3/2, -1/2) - \sqrt{\frac{2}{3}} (1/2, -1/2); \quad (\pi^+, n) = \frac{1}{\sqrt{3}} (3/2, 1/2) + \sqrt{\frac{2}{3}} (1/2, 1/2)$$

Вытекающие из (4.11) значения коэффициентов К-Г, совпадают с табличными (см. таблицу II).

Аналогичным образом можно вычислить коэффициенты К-Г, и в более сложных случаях. (см. Приложение VI).

х) Здесь f - величина, пропорциональная матричному элементу реакции $\pi + N \rightarrow \pi + N$, идущей по изотопическому каналу с $T = 3/2$ (см. главу II, § I.)

ГЛАВА У.

Изотопические соотношения для одномезонной схемы взаимодействия частиц.

§ I. Одномезонные реакции.

599/8 чр. 8/665

Выше уже говорилось о процессах излучения и поглощения виртуальных мезонов, приводящих к появлению т.н. "мезонного облака", связанного с каждой реальной частицей. Аналогичным образом реакции между реальными частицами с теоретической точки зрения можно связать с процессами обмена различного рода виртуальными мезонами. Для сильных взаимодействий соответствующие константы связи велики. Поэтому, вообще говоря, с большой вероятностью может происходить обмен большим числом виртуальных мезонов, что очень осложняет картину взаимодействия. Однако, в отдельных специальных случаях на основании некоторых теоретических соображений, оказывается возможным предположить, что реакция идет преимущественно путем обмена одним мезоном. Для таких взаимодействий можно получить дополнительные изотопические соотношения, которые интересны и сами по себе и, главным образом, - с точки зрения проверки справедливости исходного предположения об одномезонном обмене.

Для примера рассмотрим реакцию:



В общем случае её схематически можно изобразить в виде диаграммы Фейнмана, показанной на рис.3. "Черный ящик" в узле диаграммы соответствует тому обстоятельству, что на

Продолжение - см. т.2.