2/50 464

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

И.Т. Тодоров

Р-464

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ СТРАННЫХ ЧАСТИЦ

Nucl. Phys., 1960, v18, n3, p521-528.

Дубна 1959 год

И.Т. Тодоров

Р-464

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ СТРАННЫХ ЧАСТИЦ

...единенный институт
...дерных исследований
...БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Рассмотрены аналитические свойства амплитуд процессов $(\bar{K}+\mathcal{N}\to\pi+Y)$ и $(\pi+\mathcal{N}\to K+Y)$ на основе постулатов ковариантности, причинности и спектральности. Найдены кинематические характеристики этих процессов в системе отсчета, являющейся естественным обобщением системы Брайта. Выведены дисперсионные соотношения для мнимых масс мезонов. Дано обобщение теоремы Владимирова и Логунова [8] об области аналитичности антиэрмитовой части амплитуды рассеяния на случай, когда все частицы, участвующие в реакции, имеют разные массы. В соответствии с результатами предыдущих работ [4] полученная область не содержит ни одной физической точки.

§ 1. Введение

Попытка вывести дисперсионные соотношения для неупругих столкновений, когда все четыре частицы /две в начале и две в конце/ имеют разные массы, встречается со специфическими трудностями еще при рассмотрении кинематики процесса. Типичными процессами такого типа являются реакции с участием странных частиц

$$\bar{K} + N \to \pi + Y, \qquad /1/$$

$$\pi + N \to K + Y. \qquad /11/$$

Пусть p_1 и q_1 $(p_2$ и $q_2)$ – четыре импульса бариона и мезона в начале /в конце/ одной из реакций /1/ и /11/. Эти импульсы удовлетворяют обычным соотношениям[x/]:

$$p_1^2 = M_1^2, \quad p_2^2 = M_2^2; \quad q_1^2 = m_1^2, \; q_2^2 = m_2^2, \qquad /1.1/$$

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2. \qquad /1.2/$$

Система Брайта $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, в которой обычно выводятся дисперсионные соотношения, если $M_1 = M_2$, в случае, когда $M_1 \neq M_2$ уже не так удобна /например, $p_1^0 \neq p_2^0$ в этой системе/. Поэтому Окубо (Okubo[1]) и /независимо/ Поливанов[2] предложили работать в системе $\vec{p}_1 + \alpha \vec{p}_2$, где α определяется таким образом, чтобы $p_1^0 = p_2^0$. Однако, такая система не всегда существует, так как при $M_1 \neq M_2$ разность $p_1 - p_2$ вообще говоря, не является пространственно подобным вектором; кроме того, векторы в этой системе очень сложно зависят от $\vec{p}_1^{\,2}$. В работах Джина / Jin[3] / и Стретера (Streater[4]) в системе $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ получены более простые выражения для векторов.

---

x/ В настоящей статье мы используем следующие обозначения для 4-мерных векторов и их скалярных произведений: $p = (p^0, \vec{p})$, $(p, q) = p^0 q^0 - \vec{p}\vec{q}$. Мы работаем, как обычно, в системе единиц, в которой скорость света $c = 1$.

В работе Джина выписаны дисперсионные соотношения для процессов /I/ и /II/ с учетом спиновой и изотопической структуры амплитуд, но без попытки доказать эти соотношения и без указания на область их справедливости. В интересной работе Стретера [4] показано, что необходимым условием для доказательства дисперсионных соотношений для неупругого процесса $A+B \to C+D$ /типа /I/ и /II/ при помощи существующих методов является возможность доказать этими методами дисперсионные соотношения для обоих упругих процессов $A+B \to A'+B'$ и $C+D \to C'+D'$ /хотя бы для рассеяния вперед/. Так как еще в работах Бремерманна, Оме и Тейлора / H. Bremermann, R. Oehme, J. Taylor[9,10]/было показано, что существующие методы недостаточны для доказательства дисперсионных соотношений для упругого рассеяния $(K+N \to K+N)$, то отсюда ясно, что нельзя доказать /этими методами/ дисперсионные соотношения для интересующих нас неупругих процессов /I/ и /II/. Поэтому Стретер рассматривает в своей работе модель, в которой массы частиц отличаются от их экспериментальных значений.

В настоящей работе определена система отсчета, переходящая в систему Брайта при $M_1 = M_2$, в которой формулы более просты и симметричны, чем в упомянутых выше работах. В § 3 дано доказательство дисперсионных соотношений для мнимых масс мезонов. Вопрос об аналитическом продолжении антиэрмитовой части амплитуды сводится к исследованию области аналитичности Фурье-образов некоторых инвариантных причинных функций. Теоремы об аналитическом продолжении таких функций впервые были доказаны Н.Н.Боголюбовым [5] и обобщены в последнее время с помощью интегрального представления Дайсона (Dyson[7]), Владимировым и Логуновым [8] и Оме и Тейлором [10]. В настоящей работе доказана теорема, являющаяся обобщением основной теоремы Владимирова и Логунова [8] на случай, когда все четыре частицы /две в начале и две в конце реакции/ имеют разные массы. При помощи этой теоремы антиэрмитова часть амплитуды процесса /I/ /также как и процесса /II// продолжается в некоторую область, которая, в соответствии с [4], не включает физических точек /из-за большой массы K-мезонов/. По-видимому, полученную область аналитичности нельзя далее увеличить, исходя только из постулатов ковариантности, причинности и спектральности [5] x/, в то время

x/ Как известно, под принципом спектральности понимается предположение о существовании полной системы физических состояний с положительной энергией.

как учет симметрии амплитуд рассматриваемых процессов, возможно, позволит увеличение этой области.

§ 2. Кинематика

С точки зрения кинематики безразлично какой из двух процессов /I/ или /II/ рассматривать /только массы m_1 и m_2 в формулах /1.1/ будут принимать при этом разные численные значения/.

Введем четырехмерные скорости барионов u_1 и u_2 :

$$p_1 = M_1 u_1 , \quad p_2 = M_2 u_2 , \quad u_1^2 = u_2^2 = 1 \qquad /2.1/$$

и определим безразмерные инварианты ν и t^2 следующим образом:

$$\nu = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \frac{q_1 + q_2}{M_1 + M_2} , \qquad t^2 = -\frac{1}{4} (u_1 - u_2)^2. \qquad /2.2/$$

Наряду с инвариантами ν и t , мы будем пользоваться еще полной энергией в системе центра масс W и инвариантной передачей импульса Δ :

$$W^2 \equiv (p_1 + q_1)^2 = 2 M_1 M_2 (\nu + t^2) + M_1 M_2 + \frac{M_1 m_2^2 + M_2 m_1^2}{M_1 + M_2} , \qquad /2.3/$$

$$4\Delta^2 \equiv -(p_1 - p_2)^2 = 4 M_1 M_2 t^2 - (M_2 - M_1)^2.$$

Всевозможные скалярные произведения векторов p_1, q_1, p_2 и q_2 выражаются линейно как через инварианты ν и t^2, так и через инварианты W^2 и Δ^2. Например,

$$p_1 p_2 = M_1 M_2 (1 + 2t^2) = 2\Delta^2 + 1/2 \, (M_1^2 + M_2^2),$$

$$p_\ell q_\ell = M_1 M_2 (\nu + t^2) + (-1)^\ell M_\ell \frac{\delta - \delta_1}{M_1 + M_2} = \frac{1}{2} (W^2 - M_\ell^2 - m_\ell^2), \quad \ell = 1, 2,$$

$$p_1 q_2 = M_1 M_2 (\nu - t^2) - M_1 \frac{\delta + \delta_1}{M_1 + M_2} = \frac{1}{2} (W^2 - 4\Delta^2 - M_1^2 - m_1^2),$$

где использованы обозначения:

$$\delta = \frac{1}{2}\left(M_2^2 - M_1^2\right), \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 - m_2^2\right). \qquad /2.4/$$

Введем систему отсчета, в которой

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \frac{\vec{p}_1}{M_1} + \frac{\vec{p}_2}{M_2} = 0. \qquad /2.5/$$

Эту систему можно рассматривать как обобщение системы Брайта /она переходит в систему Брайта, когда $M_1 = M_2$ /. В системе /2.5/

$$p_1 = M_1\left(\sqrt{1+t^2}, \; -t\vec{\tau}\right) \qquad /2.6/$$

$$p_2 = M_2\left(\sqrt{1+t^2}, \; t\vec{\tau}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(q_1 - q_2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(M_2 - M_1\right)\sqrt{1+t^2}, \; \left(M_2 + M_1\right)t\vec{\tau}\right],$$

где $\vec{\tau}$ - трехмерный единичный вектор.

Положим по определению

$$\frac{1}{2}\left(q_1 + q_2\right) = \left(E, \lambda\vec{e} + \mu\vec{\tau}\right), \qquad /2.7/$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{\tau}$. Переменная E /энергия/ просто выражается через инварианты ν и t^2:

$$E = \frac{M_1 + M_2}{2\sqrt{1+t^2}}\,\nu. \qquad /2.8/$$

Из соотношений /1.1/ и /1.2/ получаем

$$\mu = \frac{M_2 - M_1}{2t}\,\nu - \frac{\delta_1}{(M_1 + M_2)t}, \qquad /2.9/$$

$$\lambda^2 = a\nu^2 + 2b\nu - c; \qquad /2.10/$$

здесь $$a = \frac{4M_1M_2t^2-(M_2-M_1)^2}{4t^2(1+t^2)} \equiv \frac{\Delta^2}{t^2(1+t^2)}, \quad 2b = \frac{M_2-M_1}{M_2+M_1}\frac{\delta_1}{t^2},$$
$$c = \frac{\delta_1^2}{(M_1+M_2)t^2} + \frac{m_1^2+m_2^2}{2} + \Delta^2 \qquad /2.11/$$

Для реальных значений масс в процессах /I/ и /II/ правая часть /2.10/ всегда имеет вещественные корни ν^- и ν^+, $(\nu^- \leq \nu^+)$. Если $a>0$, то физическая область для совокупности этих процессов состоит из интервалов $\nu>\nu^+$ и $\nu<\nu^-(|\nu|>|\nu^-|)$. Наоборот, если $a<0$ [x], то λ вещественно лишь на конечном интервале $\nu^-<\nu<\nu^+$. В дальнейшем мы будем предполагать, что имеет место первый случай $(a>0)$, т.е. что

$$4M_1M_2t^2>(M_2-M_1)^2 \quad \text{или} \quad \Delta^2>0. \qquad /2.12/$$

Изложенное кинематическое рассмотрение имеет общий характер и относится к любому процессу с двумя частицами до столкновения и с двумя частицами после столкновения. В частности, если $M_1 = M_2$ / $\delta=0$ /, но $m_1 \neq m_2$, мы получаем кинематику процессов типа фоторождения π -мезона на нуклоне, эквивалентную кинематике рассмотренной в [6] /гл. I § 6/.

§ 3. Аналитические свойства амплитуды неупругого процесса для мнимой массы мезонов

Матричный элемент процесса /I/[xx] в физической области может быть записан в виде /см. [5]/:

$$\langle p_2, q_2 | S | p_1 q_1 \rangle = \frac{(2\pi)^4 i}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}}\,\delta(p_1+q_1-p_2-q_2)\,T^{ret}\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right), \qquad /3.1/$$

---

x/ В дополнении A подробно исследована физическая область и показано, что как первый, так и второй случай / $a<0$ / могут осуществляться в реальном процессе.

xx/ Совершенно аналогично можно начать рассмотрение с процесса /II/ /см.[3]/.

где

$$T^{ret}(\kappa) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle p_2 \left| \frac{\delta j_1\left(-\frac{x}{2}\right)}{\delta \varphi_2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| p_1 \rangle e^{i\kappa x} d_4 x \qquad /3.2/$$

"запаздывающая амплитуда". Токи $j_1(x)$ и $j_2(x)$ определяются равенством [5]

$$j_\ell(x) = i\,\frac{\delta S}{\delta \varphi_\ell(x)}\,S^+, \quad \ell = 1, 2, \qquad /3.3/$$

$\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - операторы K и π -мезонного поля.

Рассмотрим фиктивный процесс, в котором вместо /1.1/ имеют место соотношения

$$q_\ell^2 = m_\ell^2 + \tau \equiv \tau_\ell, \quad \ell = 1, 2, \qquad /3.4/$$

где τ - вспомогательный параметр, который принимает неположительные значения. Вместо /2.10/ и /2.11/ будем иметь

$$\begin{gathered} \lambda^2 = a\nu^2 + 2b\nu + c_1(\tau) \\ c_1(\tau) = -c - \tau . \end{gathered} \qquad /3.5/$$

Используя условие причинности [5], покажем, что амплитуда /3.2/ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ν /или E, что в силу /2.8/ то же самое/, если дискриминант правой части /3.4/ отрицателен:

$$b^2 - ac_1(\tau) < 0, \qquad /3.6/$$

т.е. если вспомогательный параметр удовлетворяет условию

$$\tau < -\frac{b^2}{a} - c = -\frac{\delta^2}{4\Delta^2} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \Delta^2. \qquad /3.7/$$

Для доказательства этого утверждения достаточно отметить, что в силу условия причинности функция /3.2/ аналитична в области

$$\Im m\,\nu > 0, \quad \frac{(M_1+M_2)^2}{4(1+t^2)}(\Im m\,\nu)^2 > (\Im m\,\lambda(\nu,\tau))^2 + (\Im m\,\mu(\nu))^2.$$

Последнее условие преобразуется при помощи равенства $2\,(\mathrm{Im}\sqrt{u+iv})^2 = \sqrt{u^2+v^2} - u$ в условие /3.6/.

Аналогично можно показать, что при выполнении неравенства /3.7/, опережающая амплитуда

$$T^{adv}\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle p_2 \left| \frac{\delta j_2\left(\frac{x}{2}\right)}{\delta \varphi_1\left(-\frac{x}{2}\right)} \right| p_1\rangle e^{i\frac{q_1+q_2}{2}x} \cdot d_4 x \qquad /3.8/$$

аналитична в области $\mathrm{Im}\,\nu < 0$.

Разность между амплитудами T^{ret} и T^{adv} пропорциональна антиэрмитовой части

$$A(\nu,\tau;\tau) = \frac{1}{2i}\left\{T^{ret}\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right) - T^{adv}\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d_4 x\, e^{i\frac{q_1+q_2}{2}x} \langle p_2 | [j_2(\tfrac{x}{2}), j_1(-\tfrac{x}{2})] | p_1\rangle =$$

$$= \pi\left\{\sum_n \int d\vec{p}_{2n} \langle p_2 | j_2(0) | p_{2n}\rangle\langle p_{2n} | j_1(0) | p_1\rangle \delta(q_2+p_2-p_{2n}) -\right.$$

$$\left. - \sum_n \int d\vec{p}_{1n} \langle p_2 | j_1(0) | p_{1n}\rangle\langle p_{1n} | j_2(0) | p_1\rangle \delta(p_{1n}+q_2-p_1)\right\} =$$

$$= A_1(\nu) - A_2(\nu),$$

здесь

$$A_1(\nu) = \pi\,\frac{M_1+M_2}{2M_1M_2}\,\frac{|\nu+1+t^2|}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{\substack{n \\ p_{2n}=p_2+q_2}} \langle p_2 | j_2(0) | p_{2n}\rangle\langle p_{2n} | j_1(0) | p_1\rangle \delta(\nu-\nu_n^+)$$

$$/3.9/$$

$$A_2(-\nu) = \pi\,\frac{M_1+M_2}{2M_1M_2}\,\frac{|-\nu+1+t^2|}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{\substack{n \\ p_{1n}=p_1-q_2}} \langle p_2 | j_1(0) | p_{1n}\rangle\langle p_{1n} | j_2(0) | p_2\rangle \delta(\nu-\nu_n^-)$$

/ $\sum_n$ включает интегрирование по непрерывной части спектра и суммирование по дискретным характеристикам промежуточных состояний/. Особенности двух δ - функций в правой части /3.9/ лежат в точках:

$$\nu_n^+ = -t^2 + \frac{p_{2n}^2 - M_2^2 - m_2^2}{2M_1M_2} + \frac{\delta - \delta_1}{M_1(M_1+M_2)} - \frac{\tau}{2M_1M_2}, \qquad /3.10/$$

$$\nu_n^- = -t^2 - \frac{P_{1n}^2 - M_1^2 - m_2^2}{2M_1M_2} + \frac{\delta + \delta_1}{M_2(M_1+M_2)} + \frac{\tau}{2M_1M_2} . \qquad /3.11/$$

Вторая ветвь спектра /3.11/ всегда содержит один дискретный полюс при $P_{1n}^2 = M_1^2 \; (\equiv M_N^2)$ и разрез при $P_{1n}^2 \geqq (M_1 + m_2)^2$. Первая ветвь /3.10/ может содержать два дискретные полюса $P_{2n}^2 = M_\Lambda^2$ и $P_{2n}^2 = M_\Sigma^2$. Если амплитуда является собственной функцией оператора полного изотопического спина с собственным значением 1 или 0 /что имеет место в реакции $(\bar{K} + N \to \Lambda + \pi)$ или $(\bar{K} + N \to \Sigma^0 + \pi^0)$ x/, то в спектре /3.10/ есть только один дискретный полюс при $P_{2n}^2 = M_\Sigma^2$ или при $P_{2n}^2 = M_\Lambda^2$, соответственно значению спина 1 и 0. Непрерывный спектр в ν_n^+ возникает, если $P_{2n}^2 \geqq (M_\Lambda + m_2)^2$, за исключением случая реакции $(\vec{K} + N \to \Sigma^0 + \pi^0)$, когда разрез начинается при $P_{2n}^2 \geqq (M_\Sigma + m_2)^2$. Можно показать, что всегда существует область изменения t^2 из интервала /2.12/, такая, что даже при $\tau = 0$ существует щель между двумя ветвями непрерывного спектра xx/. В реакции $(\bar{K} + N \to \Sigma + \pi)$, когда непрерывный спектр во второй ветви начинается с $P_{2n}^2 = (M_\Lambda + m_2)^2$ /например, в реакции $K^- + p \to \Sigma^- + \pi^+$ /один из однобарионных полюсов всегда лежит в непрерывном спектре. В остальных случаях можно добиться /при некоторых дополнительных ограничениях на t^2 /, чтобы все полюса находились в щели.

Чтобы исключить из дисперсионных соотношений интегрирование по отрицательным энергиям, необходимо рассмотреть наряду с амплитудой процесса /I/ еще и амплитуду "перекрестного" процесса /II/:

$$\langle p_2, q_1 | S | q_2, p_1 \rangle = \frac{(2\pi)^4 i}{\sqrt{4 q_1^0 q_2^0}} \delta(p_1 + q_2 - p_2 - q_1) \tilde{T}^{ret}\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right); \qquad /3.12/$$

---

x/ Автор благодарен Ю.Вольфу за обсуждение второй возможности.

xx/ Например, в случае процесса $(\bar{K} + N \to \Lambda + \pi)$ имеем приближенно $\nu_c^+ \approx -t^2 + 0{,}18 - \frac{\tau}{2M_1M_2}$, $\nu_c^- = t^2 + 0{,}07 + \frac{\tau}{2M_1M_2}$ и условие $\nu_c^- < \nu_c^+$ совместно с /2.12/ дает: $0{,}08 \leqq t^2 \leqq 0{,}086 - \frac{\tau}{2M_1M_2} < 0{,}086$.

здесь

$$\tilde{T}^{ret}(\kappa) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle p_2 \left| \frac{\delta j_2(-\frac{x}{2})}{\delta \varphi_1(\frac{x}{2})} \right| p_1 \rangle e^{i\kappa x} d_4 x . \qquad /3.13/$$

Заметим, что закон сохранения, содержащийся в /3.12/ $(p_1 + q_2 = p_2 + q_1)$, получается из /1.2/ путем замены $q_1 \to -q_1$, $q_2 \to -q_2$. Нетрудно отсюда получить, что кинематические характеристики процесса /II/, получаются из соответствующих характеристик процесса /I/ заменой $\nu \to -\nu$. Например антиэрмитова часть амплитуды /3.13/ может быть записана в виде:

$$\tilde{A}(\nu, t^2; \tau) = \pi \frac{M_1 + M_2}{2 M_1 M_2} \Big\{ \frac{|\nu + 1 + t^2|}{\sqrt{1 + t^2}} \sum_{\substack{n \\ p_{1n} = p_1 + q_2}} \langle p_2 | j_1(0) | p_{1n} \rangle \langle p_{1n} | j_2(0) | p_1 \rangle \delta \times (\nu + \nu_n^-(\tau)) - $$

$$- \frac{|-\nu + 1 + t^2|}{\sqrt{1 + t^2}} \sum_{\substack{n \\ p_{2n} = p_2 - q_2}} \langle p_2 | j_2(0) | p_{2n} \rangle \langle p_{2n} | j_1(0) | p_1 \rangle (\nu + \nu_n^+(\tau)) \Big\} = A_2(\nu) - A_1(-\nu); \qquad /3.14/$$

здесь ν_n^+ и ν_n^- задаются формулами /3.10/ и /3.11/.

Итак, для фиктивных процессов /I/ и /II/, в которых τ удовлетворяет /3.7/, можно написать систему дисперсионных соотношений. Как отмечалось, они выписаны в работе Джина [3] и мы не будем выписывать их здесь снова.

§ 4. Аналитическое продолжение антиэрмитовой части амплитуды по вспомогательной переменной τ

Выражение /3.9/ для антиэрмитовой части амплитуды может быть записано в виде

$$A(\nu, t^2; \tau) = \frac{1}{2(2\pi)^6} \bar{u}_2(\vec{p}_2) \tilde{D}(-p_1, p_2, -q_1, q_2) u_1(\vec{p}_1), \qquad /4.1/$$

здесь

$$\tilde{D}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \int D(x_1, x_2, 0, x_4) e^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2 + \kappa_4 x_4)} d_4 x_1 d_4 x_2 d_4 x_4 ,$$

а трансляционно-инвариантная функция $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$ определяется равенством:

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\langle 0 \right| \frac{\delta^2}{\delta \bar{\varphi}_2(x_2)\delta \varphi_1(x_1)} \left[j_2(x_4), j_1(x_3) \right] \left| 0 \right\rangle \qquad /4.2/$$

Здесь $\mathcal{U}_1(\vec{p}_1)$ и $\varphi_1(x_1)$ $(\bar{\mathcal{U}}_2(\vec{p}_2)$ и $\varphi_2(\dot{x}_2))$ соответственно спиноры и операторы поля нуклона /гиперона/. Исследование инвариантной функции $\tilde{D}$ /см.дополнение В/, аналогичное исследованиям антиэрмитовой частей для других процессов [5, 6], приводит к представлению $\tilde{D}$ в виде суммы Фурье-образов четырех трансляционно инвариантных функций, удовлетворяющих условию запаздывания по двум парам аргументов. К каждой их этих функций, следуя методу Боголюбова [5, 6] можно построить еще по три функции, удовлетворяющие "дополнительным" условиям запаздывания.

Таким образом, вопрос об аналитическом продолжении антиэрмитовой части амплитуды, сводится к нахождению области аналитичности Фурье-образов трансляционно-инвариантных функций $\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $i,j = r, a$, удовлетворяющих следующим условиям причинности[x/]:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{rr}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad &&\text{если } x_1 \lesssim x_3 \quad &&\text{или } x_2 \lesssim x_4, \\
&\mathcal{F}_{ra}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad &&\text{если } x_1 \lesssim x_3 \quad &&\text{или } x_2 \gtrsim x_4, \\
&\mathcal{F}_{ar}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad &&\text{если } x_1 \gtrsim x_3 \quad &&\text{или } x_2 \lesssim x_4, \\
&\mathcal{F}_{aa}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad &&\text{если } x_1 \gtrsim x_3 \quad &&\text{или } x_2 \gtrsim x_4.
\end{aligned} \qquad /4.3/$$

Их образы Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, определенные на многообразии $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ равенством

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\, \tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4) =$$

$$= \iiiint \mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) \exp\left\{ i (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4) \right\} dx_1 \dots dx_4, \qquad /4.4/$$

---

x/ Знак $x \lesssim y$ означает, что $x^0 \leqq y^0$ или $(x-y)^2 < 0$

удовлетворяют еще постулатам "спектральности":

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{F}}_{rj}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{aj}(k_1,k_2,k_3,k_4) && \text{если } k_1^2 < a_1^2 \text{ и } k_3^2 < b_1^2, \\
&\tilde{\mathcal{F}}_{ir}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{ia}(k_1,k_2,k_3,k_4) && \text{если } k_2^2 < a_2^2 \text{ и } k_4^2 < b_2^2, \\
&\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1,k_2,k_3,k_4) = 0 && \text{если } (k_2+k_4)^2 < c^2 \text{ или } k_2^0 + k_4^0 < 0,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

где положительные числа a_ℓ, b_ℓ и c подчинены условию

$$c > a_\ell - b_\ell \geq 0, \quad \ell = 1,2.$$

Разные члены разложения антиэрмитовой части амплитуды являются функциями типа /4.5/ со следующими значениями параметров a_ℓ, b_ℓ и c $(m_1 = m_K,\ m_2 = m_\pi,\ M_1 = M_N,\ M_2 = M_\Lambda$ или $M_\Sigma)$

$$c = M_2 + m_2, \quad a_1 = M_1 + m_2, \quad a_2 = M_2 + m_2, \quad b_1 = m_1 + 2m_2, \quad b_3 = 3m_2; \qquad /4.6а/$$

$$c = M_1 + m_2, \quad a_1 = M_1 + m_2, \quad a_2 = M_2 + m_2, \quad b_1 = 3m_2, \quad b_2 = m_1 + 2m_2. \qquad /4.6в/$$

Такие же члены, только в другом порядке, получаются и при рассмотрении антиэрмитовой части амплитуды процесса /II/ /см. Введение/.

Мы сформулируем и применим теорему об области аналитичности функций, удовлетворяющих условиям /4.4/ и /4.5/, являющейся обобщением основной теоремы Владимирова и Логунова [8]. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству, изложенному в работе [8] x/.

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $i,j = r,a$ - четыре обобщенные функции xx/ четырех 4-векторов, инвариантные относительно преобразованной из неоднородной ортохронной группы Лоренца. Предположим, что эти обобщенные функции удовлетворяют условиям запаздывания и опережения

---

x/ Мы приводим доказательство теоремы в дополнении C.

xx/ Под обобщенной функцией мы понимаем линейный функционал над пространством S Шварца [11], либо над некоторым из пространств $C(7, s, 16)$ Боголюбова [8].

/4.3/, а их Фурье-образы $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, /сосредоточенные на многообразии $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, / удовлетворяют условиям /4.5/.

Пусть далее положительные числа M_ℓ^2 и вещественные числа $\tau_q^\circ < b_q^2$ таковы, что[x]

$$\tau_\ell^\circ < \min_{\substack{\ell=1,2 \\ W \geq c}} \left\{ W^2 + M_\ell^2 - 2W \frac{a_\ell W + M_\ell^2 - a_\ell b_\ell}{W + a_\ell - b_\ell} \right\}. \qquad /4.7/$$

Тогда можно построить функцию $\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; W)$, обобщенную относительно вещественной переменной W, обращающуюся в нуль при $W < c$ и аналитическую при $W \geq c$ относительно совокупности пяти комплексных переменных $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ в некоторой области $D(W)$, содержащей все точки вида

$$z_1 = M_1^2, \quad z_2 = M_2^2, \quad z_3 = \tau_1, \quad z_4 = \tau_2, \quad z_5 = -4\Delta^2, \qquad /4.8/$$

где $\tau_\ell \leq \tau_\ell^\circ$, а инвариантная передача импульса $4\Delta^2 = -(k_1 + k_2)^2$ пробегает внутренность эллипса

$$A(W, \tau_1, \tau_2) + B(W, \tau_1, \tau_2)\cos\delta + iC(W, \tau_1, \tau_2)\sin\delta, \qquad /4.9/$$
$$0 \leq \delta \leq 2\pi.$$

Здесь A, B и C определяются соотношениями:

$$A(W, \tau_1, \tau_2) = \varphi_1^2(W, \tau_1) + \varphi_2^2(W, \tau_2) - \left(\frac{M_2^2 - M_1^2 + \tau_1 - \tau_2}{2W}\right)^2, \qquad /4.10/$$

$$\frac{1}{2} B(W, \tau_1, \tau_2) = \varphi_1(W, \tau_1)\varphi_2(W, \tau_2) + \sqrt{[\varphi_1^2(W, \tau_1) - \ell_1^2(W, \tau_1)][\varphi_2^2(W, \tau_2) - \ell_2^2(W, \tau_2)]}$$

$$\frac{1}{2} C(W, \tau_1, \tau_2) = \varphi_1(W, \tau_1)\sqrt{\varphi_2^2(W, \tau^2) - \ell_2^2(W, \tau_2)} + \varphi_2(W, \tau_2)\sqrt{\varphi_1^2(W, \tau_1) - \ell_1^2(W, \tau_1)},$$

---

[x] Отметим, что в частном случае, когда $a_1 = a_2 = M + m_\pi$, $M_1^2 = M_2^2 = M^2$, неравенство /4.7/ эквивалентно неравенству /1,5/ работы[8] и при этом проще по форме.

где
$$\varphi_\ell^2(W,\tau_e)=\frac{1}{4}\left(W+\frac{M_e^2-\tau_e^2}{W}\right)^2-M_e^2,\qquad \ell=1,2.$$
/4.11/

$$\varphi_\ell(W,\tau_e)^{x)}=\begin{cases}\sqrt{\varphi_\ell^2(W,\tau_e)+\dfrac{(a_e^2-M_e^2)(b_e^2-\tau_e)}{W^2-(a_e-b_e)}}\,, & \text{если } \tau_e\geq b_e\left(a_e-\dfrac{W^2}{a_e-b_e}\right)\\[2ex] \dfrac{a_e^2-M_e^2}{2W}+\dfrac{1}{2W}\sqrt{[(W+a_e^2)-\tau_e][(W-a_e)^2-\tau_e]}, & \text{если } \tau_e< b_e\left(a_e-\dfrac{W^2}{a_e-b_e}\right).\end{cases}$$
/4.12/

(При $\tau_\ell=b_\ell\left(a_\ell-\frac{W^2}{a_\ell-b_\ell}\right)$, $\varphi_\ell=\frac{1}{2W}\left(\frac{a_\ell}{a_\ell-b_\ell}W^2+a_\ell b_\ell-M^2\right)$, как для верхнего так и для нижнего выражения /4.12/).

Функция $\mathcal{F}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5;W)$ такова, что при вещественных p_1, p_2, p_3, p_4 из подпространства $p_1+p_2+p_3+p_4=0$, для которых величины $z_1=p_1^2$, $z_2=p_2^2$, $z_3=p_3^2$, $z_4=p_4^2$, $z_5=(p_1+p_2)^2$ принадлежат области $D\left(\sqrt{(p_2+p_4)^2}\right)$ имеет место представление

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1,p_2,p_3,p_4)=\mathcal{F}\left(p_1^2,p_2^2,p_3^2,p_4^2,(p_1+p_2)^2;\sqrt{(p_2+p_4)^2}\right)\qquad /4.13/$$

при $$(p_2+p_4)^2>c^2 \quad \text{и} \quad p_2^0+p_4^0>0.$$

---

x/ Легко видеть, что в случае неупругого рассеяния K-мезона на нуклоне вторая возможность осуществляется только при $\tau_\ell<0$ и для реальной точки $\tau_\ell=m_\ell^2$, $\varphi_\ell(W,\tau)$ дается верхним выражением /4.12/.

Сформулированная теорема охватывает как все процессы, отмеченные в [8] /упругое рассеяние мезонов на нуклонах, комптон-эффект на нуклоне, рассеяние мезона на мезоне, тормозное излучение γ -квантов в электрон-нуклонных столкновениях и фоторождение электронно-позитронных пар на нуклонах, фоторождение и виртуальное фоторождение мезона на нуклоне, рождение электронно-позитронных пар π -мезонами/, так и, в принципе, полностью неупругие процессы с K-мезонами и гиперонами, хотя, как мы увидим, она оказывается недостаточной для доказательства дисперсионных соотношений при экспериментальном значении массы K-мезонов.

Область аналитичности антиэрмитовой части по передаче импульса, согласно /4.7/, не пуста только, если при $\tau_\ell^0 = m_\ell^2$, $\ell = 1,2$

$$\tau_\ell^0 < \min_{W \geq c} \frac{W^3 - (a_\ell + b_\ell) W^2 + 2(a_\ell b_\ell - M_\ell^2) W + (a_\ell - b_\ell) M_\ell^2}{W + a_\ell - b_\ell} . \qquad /4.14/$$

Нетрудно проверить, что когда a_ℓ, b_ℓ и c задаются формулами /4.6/, а массы имеют свои экспериментальные значения, минимум в правой части /4.14/ достигается при $W = c$. В согласии с работой [4], получаемые таким образом неравенства не выполняются для реального значения массы K-мезона. Наиболее жесткие ограничения получаются, когда a_ℓ, b_ℓ и c принимают значения /4.6в/. В случае, когда $a_2 = M_\Lambda + m_\pi$, минимум в правой части /4.14/ приблизительно равен 8,2 m_π^2, в то время как нам необходимо продолжить функцию до точки $m_K^2 \approx 13 m_\pi^2$; если $a_2 = M_\Sigma + m_\pi$ минимум правой части /4.14/ равен 9,3 m_π^2, что тоже меньше требуемого значения /13 m_π^2 /. Отметим, что в случае, когда a_1, b_1 и c задаются равенствами /4.6а/ $(c = M_\Lambda + m_\pi)$, неравенство /4.14/ совпадает с ограничением, полученным Оме и Тейлором [10] для упругого рассеяния K-мезона на нуклоне.

По-видимому[x/], полученные ограничения на доказательство дисперсионнных соотношений нельзя снять, исходя только из аксиом причинности и спектральности. Не исключена, однако, возможность, что учет свойств симметрии

---

x/ Это показано в работе Бремерманна и др.[9] для случая рассеяния нуклона на нуклоне. Здесь положение аналогично.

амплитуды рассеяния позволит увеличить область аналитичности по квадрату мезонной массы τ .

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику Н.Н.Боголюбову за внимание к работе, В.С.Владимирову, А.А.Логунову и Н.А.Черникову - за полезные указания и обсуждения во время выполнения работы.

Дополнения

А. Физическая область изменения кинематических величин

В этом дополнении мы определим физическую область[x/] изменения инвариантов W^2 и Δ^2 соответственно ν и t^2 , определенных в § 2 /см. /2,2/ и /2.3//. В отличие от случая упругого рассеяния, здесь этот вопрос не является столь тривиальным.

Непосредственно можно определить область изменения W . За счет изменения нумерации всегда можно добиться того, чтобы $M_1+m_1 \geq M_2+m_2$ как, например, в случае реакции /1/ § 1. Тогда очевидно необходимым условием для того, чтобы векторы p_ℓ и q_ℓ лежали в физической области, является выполнение неравенства

$$W \geq M_1+m_1 . \qquad /A.1/$$

Поэтому наиболее естественно определить физическую область сначала в системе центра масс:

$$\vec{p}_1+\vec{q}_1=\vec{p}_2+\vec{q}_2=0. \qquad /A.2/$$

В этой системе

$$\vec{p}_\ell^{\,2}=\vec{q}_\ell^{\,2}=K_\ell^2=\frac{1}{4W^2}\left[W^2-(M_\ell-m_\ell)^2\right]\left[W^2-(M_\ell+m_\ell)^2\right],$$
$$p_\ell^0=\frac{W^2+M_\ell^2-m_\ell^2}{2W}, \quad q_\ell^0=\frac{W^2+m_\ell^2-M_\ell^2}{2W}, \quad \ell=1,2. \qquad /A,3/$$

---

x/ Мы будем говорить, что векторы p_1, q_1, p_2 и q_2, удовлетворяющие соотношениям /1.1/ и /1.2/, лежат в физической области, если все они вещественны, и $p_\ell^0>0$, $q_\ell^0>0$

... исследований
БИБЛИОТЕКА

Если θ угол между барионными импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ /в системе /А.2//,

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2 = K_1 K_2 \cos\theta, \qquad /A.4/$$

то векторы $\vec{p}_e$ и $\vec{q}_e$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= -\vec{q}_1 = K_1 \vec{e}_1, \\ \vec{p}_2 &= -\vec{q}_2 = K_2 \left(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2\right); \end{aligned} \qquad /A.5/$$

здесь $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - взаимно-ортогональные /трехмерные/ единичные векторы. Инвариант Δ^2 может быть записан в форме

$$4\Delta^2 \equiv -(p_1 - p_2)^2 = 2\left(p_1^0 p_2^0 - K_1 K_2 \cos\theta\right) - M_1^2 - M_2^2 .$$

Отсюда видно, что при заданном $W^2 \equiv S$, $4\Delta^2$ изменяется в интервале /см. также [4] /:

$$\begin{aligned} \varphi(s) \equiv 2p_1^0 p_2^0 - M_1^2 - M_2^2 - 2K_1K_2 \leqq 4\Delta^2 \leqq 2p_1^0 p_2^0 - M_1^2 - M_2^2 + \\ + 2K_1K_2 \equiv \varphi(s), \qquad s = W^2; \end{aligned} \qquad /A.6/$$

здесь

$$2P_1^0 P_2^0 - M_1^2 - M_2^2 = \frac{1}{2S}\left\{S^2 - \left(M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + m_2^2\right)S + \left(M_1^2 - m_1^2\right)\left(M_2^2 - m_2^2\right)\right\},$$

$$\begin{aligned} 2K_1K_2 = \frac{1}{2S}\Big\{ & S^4 - 2\left(M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + m_2^2\right)S^3 + \Big[4\left(M_1^2 + m_1^2\right)\left(M_2^2 + m_2^2\right) + \\ & + \left(M_1^2 - m_1^2\right)^2 + \left(M_2^2 - m_2^2\right)^2\Big]S^2 - 2\Big[\left(M_1^2 + m_1^2\right)\left(M_2^2 - m_2^2\right)^2 + \left(M_2^2 + m_2^2\right)\left(M_1^2 - m_1^2\right)^2\Big]S + \\ & + \left(M_1^2 - m_1^2\right)^2\left(M_2^2 - m_2^2\right)^2\Big\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Наименьшее значение, которое может принимать $4\Delta^2$ есть $(M_2 - M_1)^2$, так как в нашем случае $(M_2 - M_1)^2 < (m_1 - m_2)^2$, $\varphi(s)$ достигает этого значения при

$$S_0 = \frac{M_2 m_1^2 - M_1 m_2^2}{M_2 - M_1} + M_1 M_2 = (M_1 + m_1)^2 + \frac{M_1}{M_2 - M_1}\left[(M_1 + m_1 - M_2)^2 - m_2^2\right]. \quad /A.7/$$

В этой точке функция $\varphi(S)$ достигает минимума, равного

$$\min_{S \geq (M_1 + m_1)^2} \varphi(S) = \varphi(S_0) = -(M_2 - M_1)^2. \quad /A.8/$$

Можно показать, что это единственный экстремум функции $\varphi(S)$ в интервале $S \geq (M_1 + m_1)^2$, в то время как функция $\psi(S)$ монотонно возрастает на этом интервале. Отметим еще, что при $S = (M_1 + m_1)^2$

$$4\Delta^2 = \varphi = \psi = M_1 m_1 - \frac{m_1 M_2^2 + M_1 m_2^2}{M_1 + m_1} = \frac{M_1(m_1^2 - m_2^2) - m_1(M_2^2 - M_1^2)}{M_1 + m_1},$$

а при $S \to \infty$

$$\lim \varphi(S) = -0.$$

Область /A.1/ , /A.6/ может быть задана еще следующими неравенствами:

$$-(M_2 - M_1)^2 < 4\Delta^2,$$

$$W_+(\Delta) \leq W \leq \begin{cases} \infty & \Delta^2 > 0 \\ W_-(\Delta) & \Delta^2 < 0 \end{cases} ; \quad /A.9/$$

здесь

$$2W_\pm(\Delta) = 4\Delta^2 + M_1^2 + m_1^2 + M_2^2 + m_2^2 - \frac{(M_2^2 - M_1^2)(m_1^2 - m_2^2)}{4\Delta^2} \pm$$

$$\pm \operatorname{sign}\Delta^2 \left\{ \left(4\Delta^2 + M_1^2 + m_1^2 + M_2^2 + m_2^2 - \frac{(M_2^2 - M_1^2)(m_1^2 - m_2^2)}{4\Delta^2}\right)^2 - 4(M_1^2 - m_1^2)(M_2^2 - m_2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta^2}\left(M_2^2 - M_1^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\left(m_1^2 M_2^2 - m_2^2 M_1^2\right) \right\}^{1/2}.$$

В случае упругого рассеяния, когда $M_1 = M_2 = M$, $m_1 = m_2 = m$, $K_1 = K_2 = K$, неравенства /A.6/ и /A.9/ приобретают следующий простой вид:

$$0 \leqq \Delta^2 \leqq K^2 = \frac{[s-(M-m)^2][s-(M+m)^2]}{4s}, \qquad /A.6/$$

$$0 \leqq \Delta^2 \qquad W \geqq \sqrt{M^2+\Delta^2} + \sqrt{m^2+\Delta^2}. \qquad /A.9/$$

Переходя к инвариантам ν и t^2 по формулам /2.3/, мы легко получаем физическую область в этих переменных, которая совпадает с областью вещественности $\lambda(\nu, t^2)$ $(\nu > 0)$ /см. § 2/.

В. Анализ антиэрмитовой части амплитуды неупругого рассеяния

Трансляционно-инвариантная функция D /4.2/ может быть записана в виде:

$$D(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{i=1}^{4} \left(1-\mathcal{P}_{j_1 j_2}\right) D_i\,(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad /B.1/$$

где $\mathcal{P}_{j_1 j_2}$ - оператор перестановки токов $j_1(x_3)$ и $j_2(x_4)$. Инвариантные функции $D_i\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $i = 1,2,3,4$ задаются формулами

$$D_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle 0 \middle| \frac{\delta j_2(x_4)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)} \; \frac{\delta j_1(x_3)}{\delta\varphi_1(x_1)} \middle| 0 \right\rangle, \qquad /B.2/$$

$$D_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\left\langle 0 \middle| \frac{\delta j_2(x_4)}{\delta\varphi_1(x_1)} \; \frac{\delta j_1(x_3)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)} \middle| 0 \right\rangle;$$

$$D_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle 0 \middle| \frac{\delta^2 j_2(x_4)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)\,\delta\varphi_1(x_1)}\, j_1(x_3) \middle| 0 \right\rangle, \qquad /B.3/$$

$$D_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle 0 \middle| j_2(x_4)\, \frac{\delta^2 j_1(x_3)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)\,\delta\varphi_1(x_1)} \middle| 0 \right\rangle.$$

Покажем, что

$$(1-\mathcal{P}_{j_1 j_2})\tilde{D}_3(-p_1,p_2,-q_1,q_2) = (1-\mathcal{P}_{j_1 j_2})\tilde{D}_4(-p_1,p_2,-q_1,q_2) = 0, \qquad /B.4/$$

если $\quad q_1^2 < (m_1+2m_2)^2 \; (\equiv (m_K+2m_\pi)^2) \;$ и $\; q_2^2 < (3m_2)^2.$

Действительно, разлагая образ Фурье функции D_3 по полной системе состояний и пользуясь стабильностью одночастичных состояний , получим

$$\tilde{D}_3(K_1,K_2,K_3,K_4) = (2\pi)^4 \iint d_4x_1\, d_4x_2 \sum_n \int\limits_{K_n^2 \geq (m_1+2m_2)^2} d\vec{K}_n \langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_2(0)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)\delta\varphi_1(x_1)} \right| K_n \rangle$$

$$\langle K_n | j_1(0) | 0 \rangle \delta(K_n+K_3)\, e^{i(K_1x_1+K_2x_2)} = 0,$$

если $K_3^2 \; (\equiv q_1^2) < (m_1+2m_2)^2.$

Аналогично можно проверить, что

$$\tilde{D}_4(K_1,K_2,K_3,K_4) = 0 \qquad \text{если} \quad K_4^2 \; (\equiv q_2^2) < (3m_2)^2,$$

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{D}_3(K_1,K_2,K_3,K_4) = 0 \qquad \text{если} \quad K_4^2 < (3m_2)^2,$$

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{D}_4(K_1,K_2,K_3,K_4) = 0 \qquad \text{если} \quad K_3^2 < (m_1+2m_2)^2.$$

Таким образом

$$\tilde{D}(K_1,K_2,K_3,K_4) = \sum_{i=1}^{2} (1-\mathcal{P}_{j_1j_2})\tilde{D}_i(K_1,K_2,K_3,K_4), \qquad /B.5/$$

если $\quad K_3^2 < (m_1+2m_2)^2 \quad$ и $\quad K_4^2 < (3m_2)^2$.

Итак, антиэрмитова часть амплитуды представлена в виде суммы четырех слагаемых одинакового типа. Каждое из них есть образ Фурье от трансляционно-инвариантной функции четырех 4-векторов, удовлетворяющей свойству "запаздывания" по двум парам аргументов. Так как аналитические свойства этих функций рассматриваются одинаковым образом, рассмотрим подробнее, например, первую из них. Пусть

$$\mathcal{F}_{rr}^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv D_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle 0 \left| \frac{\delta j_2(x_4)}{\delta\bar{\varphi}_2(x_2)} \; \frac{\delta j_1(x_3)}{\delta\varphi_1(x_1)} \right| 0 \rangle \qquad /B.6/$$

Чтобы исследовать аналитические свойства Фурье-образа, функции /В.6/ рассмотрим /следуя [5,6] / вместе с $\mathcal{F}^{(1)}_{rr}(x_1,\dots,x_4)$ еще три вспомогательные функции

$$\mathcal{F}^{(1)}_{ra}(x_1,\dots,x_4) = \langle 0 \Big/ \frac{\delta J_2(x_2)}{\delta \varphi_2(x_4)} \frac{\delta j_1(x_3)}{\delta \varphi_1(x_1)} \Big/ 0 \rangle,$$

$$\mathcal{F}^{(1)}_{ar}(x_1,\dots,x_4) = \langle 0 \Big/ \frac{\delta j_2(x_4)}{\delta \bar{\varphi}_2(x_2)} \frac{\delta \bar{J}_1(x_1)}{\delta \varphi_1(x_3)} \Big/ 0 \rangle, \qquad /\text{В.7}/$$

$$\mathcal{F}^{(1)}_{aa}(x_1,\dots,x_4) = \langle 0 \Big/ \frac{\delta J_2(x_2)}{\delta \varphi_2(x_4)} \frac{\delta \bar{J}_1(x_1)}{\delta \varphi_1(x_3)} \Big/ 0 \rangle,$$

где

$$J_2(x_2) = i \frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}_2(x_2)} S^+, \quad \bar{J}_1(x_1) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_1(x_1)} S^+.$$

Первый индекс означает запаздывание (r) или опережение (a) по паре переменных (x_1, x_3), а второй индекс - по паре (x_2, x_4). Преобразование Фурье трансляционно-инвариантных функций определяется при помощи формулы /4.4/.

Чтобы исследовать вопрос, где обращаются в нуль функции $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}$ и их разности, воспользуемся тождествами

$$\frac{\delta j_2(x_4)}{\delta \bar{\varphi}_2(x_2)} - \frac{\delta J_2(x^2)}{\delta \varphi_2(x_4)} = i\left[j_2(x_4), J_2(x_2)\right],$$

$$\frac{\delta j_1(x_3)}{\delta \varphi_1(x_1)} - \frac{\delta \bar{J}_1(x_1)}{\delta \varphi_1(x_3)} = i\left[j_1(x_3), \bar{J}_1(x_1)\right].$$

Разлагая матричные элементы по полной системе состояния и используя спектральные условия, получим

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}_{rj}(k_1,\dots,k_4) = \tilde{\mathcal{F}}^{(1)}_{aj}(k_1,\dots,k_4), \qquad /\text{В.8}/$$

если $\quad K_1^2 < (M_1 + m_2)^2 \quad$ и $\quad K_3^2 < (m_1 + 2m_2)^2;$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{jr}^{(1)}(K_1, \dots, K_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{ja}^{(1)}(K_1, \dots, K_4), \qquad /B.9/$$

если $\quad K_2^2 < (M_2 + m_2^2) \quad$ и $\quad K_4^2 < (3m_2)^2;$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{(1)}(K_1, \dots, K_4) = 0, \qquad /B.10/$$

если $\quad (K_2 + K_4)^2 = (K_1 + K_3)^2 < (M_2 + m_2)^2 \quad$ и $\quad (K_2 + K_4)^2 \neq M_\Lambda^2;\ M_\Sigma^2,$

или $\quad K_2^0 + K_4^0 < 0.$

Чтобы освободиться от одногиперонных полюсов в условии /B.10/ достаточно умножить все функции $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{(1)}(K_1, \dots, K_4)$ на полином

$$\left[(K_2 + K_4)^2 - M_\Lambda^2\right]\left[(K_2 + K_4)^2 - M_\Sigma^2\right],$$

или, что то же самое, вместо функций $\mathcal{F}_{ij}^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ рассматривать функции

$$\left[M_\Lambda^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2\right]\left[M_\Sigma^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2\right]\mathcal{F}_{ij}^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad /B.11/$$

$$\left(\text{здесь} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i^0}\frac{\partial}{\partial x_k^0} - \frac{\partial}{\partial x_i^1}\frac{\partial}{\partial x_k^1} - \frac{\partial}{\partial x_i^2}\frac{\partial}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_i^3}\frac{\partial}{\partial x_k^3}\right).$$

Определим функции

$$\mathcal{P}_{j_1 j_2}\mathcal{F}_{rr}^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \mathcal{P}_{j_1 j_2}\mathcal{D}_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad /B.12/$$

$$\mathcal{F}_{rr}^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \mathcal{D}_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad /B.13/$$

$$\mathcal{P}_{j_1 j_2}\mathcal{F}_{rr}^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \mathcal{P}_{j_1 j_2}\mathcal{D}_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad /B.14/$$

и достроим как и для $\mathcal{F}_{rr}^{(1)}$ функции $\mathcal{F}_{ij}^{(2)}$, $\mathcal{P}_{j_1j_2}\,\mathcal{F}_{ij}^{(1,2)}$, где $i,j = r, a$. Тогда, вместо /4.15/, /4.16/ и /4.17/ будем иметь

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{rj}^{(1)}(K_1,K_2,K_3,K_4) = \mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{aj}^{(1)}(K_1,K_2,K_3,K_4),$$

если $K_1^2 < (M_1+m_2)^2$ и $K_4^2 < (3m_2)^2$;

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ir}^{(1)}(K_1,\dots,K_4) = \mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ia}^{(1)}(K_1,\dots,K_4),$$

если $K_2^2 < (M_2+m_2)^2$, $K_3^2 < (m_1+2m_2)^2$;

и $\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{(1)}(K_1,\dots,K_4) = 0$, если $(K_2+K_3)^2 < (M_1+m_2)^2$

$(K_2+K_3)^2 \neq M_1^2$; $\mathcal{F}_{rj}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{aj}^{(2)}(K_1,\dots,K_4)$

если $K_3^2 < (m_1^2 + 2m_2^2)$ и $K_2^2 < (M_2+m_2)^2$;

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ir}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{ia}^{(2)}(K_1,\dots,K_4)$$

если $K_1^2 < (M_1+m_2)^2$ и $K_4^2 < (3m_2)^2$;

$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = 0$, если $(K_1+K_4)^2 < (M_1+m_2)^2$ и $(K_1+K_4)^2 \neq M_1^2$;

$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{rj}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = \mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{aj}^{(2)}(K_1,\dots,K_4)$, если $K_2^2 < (M_2+m_2)^2$ и $K_4^2 < (3m_2)^2$

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ir}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = \mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ia}^{(2)}(K_1,\dots,K_4)$$

если $K_1^2 < (M_1+m_2)^2$ и $K_3^2 < (m_1+2m_2)^2$;

$$\mathcal{P}_{j_1j_2}\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{(2)}(K_1,\dots,K_4) = 0$$

если $(K_2+K_4)^2 < (M_2+m_2)^2$ или $K_2^0 + K_4^0 < 0$ и

$(K_1+K_3)^2 \neq M_\Lambda^2, M_\Sigma^2$.

Таким образом, вопрос об аналитическом продолжении антиэрмитовой части амплитуды действительно сводится к нахождению области аналитичности Фурье-образов инвариантных причинных функций, удовлетворяющих условиям /4.3/, /4,5/ , /4.6/.

С. Доказательство теоремы § 4.

Доказательство теоремы, сформулированной в начале § 4, опирается на следующую лемму[x/] Владимирова и Логунова[8].

Лемма. Пусть обобщенные функции $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$ обладают свойством запаздывания и опережения соответственно:

$$\mathcal{F}_r(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \leq 0 \; ; \quad \mathcal{F}_a(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \geq 0.$$

Пусть, кроме того, их преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_i(p)$, $i = r, a$ совпадают в области

$$t - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + b^2} < p_0 < -t + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + a^2}. \qquad /C.1/$$

Предполагаем, что $2t > a - b \geq 0, \;\; b > 0.$

Тогда существует функция $\tilde{\mathcal{F}}(\kappa)$ четырех комплексных переменных κ

$$\kappa = (\kappa^0, \kappa^1, \kappa^2, \kappa^3) \equiv p + iq = (p^0 + iq^0, \vec{p} + i\vec{q}),$$

голоморфная в области $G(a, b; t)$ точек κ, удовлетворяющих условиям:

либо $q^2 > 0$, либо при $q^2 \leq 0$, p удовлетворяет /C.1/ и

$$v_1(p^0, \tilde{p}) \equiv -ab - t^2 + p^2 + \sqrt{[4t^2 - (a-b)^2]\vec{p}^{\,2} + [t(a+b) - p^0(a-b)]^2} < q^2, \qquad /C.2/$$

если $p^0 + \tilde{p} \leq \dfrac{a+b}{a-b}\, t$;

$$v_2(p^0, \tilde{p}) \equiv \frac{t - p^0 - \tilde{p}}{t + p^0 + \tilde{p}} \left[a^2 + \vec{p}^{\,2} - (p_0 + t)^2\right] < q^2, \qquad /C.3/$$

если $p^0 + \tilde{p} \geq \dfrac{a+b}{a-b}\, t$;

здесь использовано обозначение $\tilde{p} = |\vec{p}|$.

---

x/ При доказательстве этой леммы [8] используется интегральное представление Дайсона[7].

Функция $\tilde{\mathcal{F}}(k)$ такова, что при вещественных p из области /С.1/

$$\tilde{\mathcal{F}}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_r(p) = \tilde{\mathcal{F}}_a(p).$$

Приступаем к доказательству основной теоремы[x/].

Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $\mathcal{F}_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ их можно рассматривать как обобщенные функции трех 4-векторов, например, $y_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 - x_4$, $y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$. Это приводит к функциям

$$\mathcal{F}_{ij}(y_1,y_2,y_3) = \mathcal{F}_{ij}(x_1-x_3,\, x_2-x_4,\, x_1-x_2+x_3-x_4) = \mathcal{F}_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4),$$
$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1,k_2,k_3) = \tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1+k_3,\, k_2-k_3,\, k_3-k_1,\, -k_2-k_3), \qquad /С.4/$$

где $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1,k_2,k_3)$ отличается множителем 2^{-4} от Фурье-образа функции $\mathcal{F}_{ij}(y_1,y_2,y_3)$. Для доказательства второго соотношения /С.4/ заметим, что

$$x_1 - x_3 = y_1,\quad x_2 - x_3 = \frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3),\quad x_4 - x_3 = \frac{1}{2}(y_1-y_2-y_3)$$

и, следовательно

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \tilde{\mathcal{F}}_{ij}\left(p_1 + \frac{p_2+p_4}{2},\, \frac{p_2-p_4}{2},\, -\frac{p_2+p_4}{2}\right).$$

При помощи подстановки $p_1 + \frac{1}{2}(p_2+p_4) = k_1,\ \frac{1}{2}(p_2-p_4) = k_2,\ -\frac{1}{2}(p_2+p_4) = k_3$ с учетом условия $p_1+p_2+p_3+p_4 = 0$ мы получаем отсюда /С.4/. Положив

$$p_1 = k_1+k_3,\quad p_2 = k_2-k_3,\quad p_3 = k_3-k_1,\quad p_4 = k_2-k_3,$$

находим

$$k_3 = \frac{1}{2}(p_1+p_3),\quad p_1^2 = (k_1+k_3)^2,\quad p_2^2 = (k_2-k_3)^2,\quad p_3^2 = (k_3-k_1)^2,$$
$$p_4^2 = (k_2+k_3)^2,\quad (p_1+p_4)^2 = (k_1-k_2)^2,\quad (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2. \qquad /С.5/$$

В силу условия /4.5/ $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(k_1,k_2,k_3)$ обращаются в нуль в области, где

$$4k_3^2 < c^2 \qquad \text{или} \qquad k_3^0 > 0. \qquad /С.6/$$

---

x/ Мы следуем схеме доказательства основной теоремы в работе[8]. См.также работу Боголюбова и Владимирова[5].

Поэтому, на основании лоренцовской инвариантности функции можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы

$$K_3 = -\left(W/2 ,\ 0 \right).$$

В этой системе $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}\ (-K_1, K_2, K_3)$ будем записывать в виде $\tilde{f}_{ij}(K_1, K_2, W)$, где $i = a$ если $i_1 = r$ и наоборот: $f_{ij}(y_1, y_2; y^\circ) = \mathcal{F}_{aj}\ (-y_1, y_2; y^\circ)$. Таким образом, мы приходим к системе четырех обобщенных функций $f_{ij}\ (y_1, y_2, y^\circ)$ девяти переменных $(y_1^\circ, \vec{y_1}, y_2^\circ, \vec{y_2}, y^\circ)$, которые обладают в силу /4.3/, /4.5/ и /С.4/ следующими свойствами:

1/
$$\begin{aligned} &f_{rr}(y_1, y_2; y^\circ) = 0, && \text{если } y_1 \lesssim 0 && \text{или } y_2 \lesssim 0, \\ &f_{ra}(y_1, y_2; y^\circ) = 0, && \text{если } y_1 \lesssim 0 && \text{или } y_2 \gtrsim 0, \\ &f_{ar}(y_1, y_2; y_\circ) = 0, && \text{если } y_1 \gtrsim 0 && \text{или } y_2 \lesssim 0, \\ &f_{aa}(y_1, y_2; y^\circ) = 0, && \text{если } y_1 \gtrsim 0 && \text{или } y_2 \gtrsim 0; \end{aligned} \qquad /С.7/$$

2/
$$\tilde{f}_{rj}\ (K_1, K_2; W) = \tilde{f}_{aj}\ (K_1, K_2; W), \ \text{если}\ \frac{W}{2} - \sqrt{b_1^2 + \vec{K}_1^2} < K_1^\circ < -\frac{W}{2} + \sqrt{a_1^2 + \vec{K}_1^2},$$

$$\tilde{f}_{ir}\ (K_1, K_2; W) = \tilde{f}_{ia}(K_1, K_2; W), \ \text{если}\ \frac{W}{2} - \sqrt{b_2^2 + \vec{K}_2^2} < K_2^\circ < - \frac{W}{2} + \sqrt{a_2^2 + \vec{K}_2^2}; \qquad /С.8/$$

3/
$$\tilde{f}_{ij}\ (K_1, K_2; W) = 0 \ \text{если}\ W < C. \qquad /С.9/$$

4/ Функции $\tilde{f}_{ij}\ (K_1, K_2; W)$ инвариантны относительно пространственных вращений и отражений векторов $\vec{K_1}$ и $\vec{K_2}$.

Из /С.7/ и /С.8/ видно, что две пары функций $\tilde{f}_{rj}\ (K_1, K_2; W)$ и $\tilde{f}_{aj}\ (K_1, K_2; W)$ удовлетворяют условиям леммы относительно K_1. Применяя эту лемму, придем к функциям $\tilde{\mathcal{F}}_j\ (K_1, K_2; W)$, $j = r, a$, голоморфным относительно K_1 в области $G\ (a_1, b_1; \frac{W}{2})$ и обобщенным относительно $(K_2; W)$. Функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(K_1, K_2; W)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_a(K_1, K_2; W)$ тоже удовлетворяют условиям леммы относительно переменной K_2 . Применяя второй раз лемму, получим функцию $\tilde{\mathcal{F}}\ (K_1, K_2; W)$, голоморфную по совокупности переменных (K_1, K_2) из области

$G\left(a_1, b_1; \frac{W}{2}\right) \times G\left(a_2, b_2; \frac{W}{2}\right)$ и обобщенную относительно вещественной переменной W. Здесь мы воспользовались теоремой Гартогса /см., например,[12] гл. 11/, которая гласит: если функция $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ голоморфна по каждой переменной при фиксированных остальных, то она голоморфна и по совокупности переменных $(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Полученная функция $\tilde{\mathcal{F}}(K_1, K_2; W)$ при вещественных (K_1, K_2) из области /С.8/ совпадает с функциями $\tilde{f}_{ij}(K_1, K_2; W)$.

В силу условия инвариантности относительно пространственных вращений функция $\tilde{\mathcal{F}}(K_1, K_2; W)$ зависит от K_1 и K_2 посредством пяти скалярных переменных: K_1^0, K_2^0, $\vec{K}_1^2$, $\vec{K}_2^2$, $\vec{K}_1 \vec{K}_2$. Вместо них введем эквивалентную систему переменных $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, положив

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(K_1^0 + \frac{W}{2}\right)^2 - \vec{K}_1^2 \quad (= p_1^2), \\
z_2 &= \left(K_2^0 + \frac{W}{2}\right)^2 - \vec{K}_2^2 \quad (= p_2^2), \\
z_3 &= \left(K_1^0 - \frac{W}{2}\right)^2 - \vec{K}_1^2 \quad (= p_3^2), \\
z_4 &= \left(K_2^0 - \frac{W}{2}\right)^2 - \vec{K}_2^2 \quad (= p_4^2), \\
z_5 &= \left(K_1^0 - K_2^0\right)^2 - \left(\vec{K}_1 - \vec{K}_2\right)^2 \quad (= (p_1 + p_2)^2), \\
&\left(W^2 = (p_2 + p_4)^2\right),
\end{aligned} \qquad /C.10/$$

так что $\tilde{\mathcal{F}}(K_1, K_2; W) = \mathcal{F}(z_1, z_2, \dots z_5; W)$. Из /С.10/ получаем

$$K_1^0 = \frac{z_1 - z_3}{2W}, \quad K_2^0 = \frac{z_2 - z_4}{2W}, \quad \left(\vec{K}_1 - \vec{K}_2\right)^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{2W}\right)^2,$$

$$\vec{K}_1^2 = \frac{W^2}{4} - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{2W}\right)^2, \quad \vec{K}_2^2 = \frac{W^2}{4} - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{2W}\right)^2. \qquad /C.11/$$

$$K = \left\{ \frac{M^2-\tau}{2W},\ \vec{p} + i\sqrt{\vec{p}^2 - \varphi^2(w,\tau)}\ \vec{e} \right\}, \qquad /C.16/$$

где $\vec{e}$ вещественный единичный вектор, ортогональный к $\vec{p}$, а вещественный вектор $\vec{p}$ удовлетворяет неравенству:

$$\varphi^2(W,\tau) \leqq \vec{p}^{\,2}. \qquad /C.17/$$

В рассматриваемом случае, очевидно, $\varphi^2 \leqq 0$. Из /4.11/ следует, что неравенства /C.1/ для точек K /C.16/ выполнены, если $\tau < b^2$ и $M^2 < a^2$. Действительно, для точек вида /C.16/ неравенства /C.1/ имеют вид

$$\frac{W}{2} - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + b^2} < \frac{M^2-\tau}{2W} < -\frac{W}{2} + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + a^2},$$

или

$$\varphi^2(W,\tau) + M^2 < \vec{p}^{\,2} + a^2,$$

$$\varphi^2(W,\tau) + \tau - \left(\frac{M^2-\tau}{W}\right)^2 < \vec{p}^{\,2} + b^2,$$

откуда в силу /C.17/ следует сделанное утверждение. Условия /C.2/ и /C.3/ принимают соответственно вид:

$$\frac{W^2}{4} + ab + \varphi^2(W,\tau) - \frac{M^2-\tau}{4W^2} > \left\{ \left[W^2 - (a-b)^2\right]\vec{p}^{\,2} + \left[\frac{W}{2}(a+b) - \frac{M^2-\tau}{2W}(a-b)\right]^2 \right\}^{1/2}$$

если $\dfrac{M^2-\tau}{2W} + \tilde{p} \leqq \dfrac{W}{2}\,\dfrac{a+b}{a-b}$;

$$\left(\frac{W}{2} - \frac{M^2-\tau}{2W} - \tilde{p}\right)\left(a^2 - M^2 + \vec{p}^{\,2} - \varphi^2(W,\tau)\right) < \left(\frac{W}{2} + \frac{M^2-\tau}{2W} + \tilde{p}\right)\left(\varphi^2(W,\tau) - \vec{p}^{\,2}\right),$$

если $\dfrac{M^2-\tau}{2W} + \tilde{p} > \dfrac{a+b}{a-b}\,\dfrac{W}{2}$.

Решая эти неравенства относительно $\vec{p}^{\,2} \equiv \tilde{p}^2$ получаем:

$$\vec{p}^{\,2} < u^2(W,\tau) \equiv \varphi^2(W,\tau) + \frac{a^2 - M^2}{W^2 - (a-b)^2}\,(b^2-\tau) = \qquad /C.18/$$

$$= \frac{1}{4W^2}\left(\tau - W^2 - M^2 + 2W\,\frac{aW + M^2 - ab}{W + a - b}\right)\left(\tau - W^2 - M^2 - 2W\,\frac{aW - M^2 + ab}{W - a + b}\right), \qquad /C.18/$$

если $\dfrac{M^2-\tau}{2W} + \tilde{\rho} \leqq \dfrac{W}{2}\,\dfrac{a+b}{a-b}$;

$$\omega(W,\tau) \leqq \tilde{\rho} \leqq v(W,\tau), \qquad /C.19/$$

если $\dfrac{M^2-\tau}{2W} + \tilde{\rho} > \dfrac{a+b}{a-b}\,\dfrac{W}{2}$, где

$$v_e(W,\tau_e) = \frac{a_e^2 - M_e^2}{2W} + \frac{1}{2W}\sqrt{[(W-a_e)^2 - \tau_e][(W+a_e)^2 - \tau_e]},$$

$$\omega_e(W,\tau_e) = \frac{a_e^2 - M_e^2}{2W} - \frac{1}{2W}\sqrt{[(W-a_e)^2 - \tau_e][(W+a_e)^2 - \tau_e]}. \qquad /C.20/$$

Из разложения функции $U^2(W,\tau)$ на множители /C.18/ видно, что требование /4.7/ обеспечивает положительность минимума $U^2(W,\tau)$.

Покажем, что в /C.19/ на самом деле не возникают ограничения на $\tilde{\rho}$ снизу. Действительно, по условию, неравенства /C.19/ справедливы только, если

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\,\frac{W}{2} - \frac{M^2-\tau}{2W}\right)^2 \leqq U^2(W,\tau).$$

Это последнее неравенство преобразуется к виду

$$\tau \leqq b\left(a - \frac{W^2}{a-b}\right). \qquad /C.21/$$

С другой стороны нетрудно видеть, что неравенство /C.21/ эквивалентно неравенству

$$\omega(W,\tau) \leqq \frac{a+b}{a-b}\,\frac{W}{2} - \frac{M^2-\tau}{2W};$$

Таким образом условие $\tilde{\rho} \geqq \omega(W,\tau)$ выполнено автоматически в области, в которой оно справедливо.

Попутно показано, что неравенства /С.19/ и /С.20/ могут быть записаны в виде
$$\tilde{\rho} \leqq \psi\,(w,\tau),$$
где функция ψ определены формулой /4.12/.

На основании /С.17/ и /С.12/ получаем следующий результат: все точки /С.16/, для которых
$$max\,\left(0,\ \varphi^2(w,\tau)\right) \leqq \tilde{\rho}^2 \leqq \psi^2(w,\tau)$$
принадлежат области голоморфности $G\,(a,b;\,w)$.

Выясним условия, которые обеспечивают непустоту области /С.23/ при всех $\tau \leqq \tau_0$ и всех $w \geqq c$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства
$$\psi^2(w,\tau) > 0\,,\quad \psi^2(w,\tau) - \varphi^2(w,\tau) > 0.$$
Из /4.11/ и /4.12/ видно, что функции φ^2 и ψ^2 убывают с возрастанием τ. Докажем, что $\psi^2 - \varphi^2$ тоже убывает с возрастанием τ . Для первого выражения /4.12/ это очевидно. Для второго выражения, когда $\tau \leqq b\left(a-\frac{w^2}{a-b}\right)$, имеем
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi^2(w,\tau)-\varphi^2(w,\tau)\right) = \frac{1}{4w^2}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{(a^2-M^2)^2 +$$
$$+\left[(w+a)^2-\tau\right]\left[(w-a)^2-\tau\right] + 2\,(a^2-M^2)\sqrt{(w^2+a^2-\tau)^2-4w^2a^2}$$
$$+\,4M^2w^2 - (w^2+M^2-\tau)^2\Big\} =$$
$$= \frac{a^2-M^2}{2w^2}\left\{\frac{\tau-a^2-w^2}{\left[\tau^2-2\,(w^2+a^2)\tau+(w^2-a^2)^2\right]^{1/2}} - 1\right\} < 0,$$
$$\left(\psi^2(w,0)-\varphi^2(w,0) = 0\right).$$

Таким образом, условия /C.24/ выполнены, если

$$\varphi^2(w,\tau^\circ)>0, \qquad \varphi^2(w,\tau^\circ)>\psi^2(w,\tau^\circ).$$

Но эти последние неравенства обеспечиваются условием /4.7/.

Итак, точки $k_\ell = p_\ell + iq_\ell$, $\ell=1,2$, удовлетворяющие условиям /C.13/, принадлежат области голоморфности $G(a_1,b_1;w)\times G(a_2,b_2;w)$, если выполнены неравенства

$$\max\left[0,\psi_\ell^2(w,\tau_\ell)\right]<\vec{p}_\ell^{\,2}<\varphi_\ell^2(w,\tau_\ell),\quad \ell=1,2. \qquad /C.25/$$

В силу изложенного к области аналитичности $D(w)$ функции $\mathcal{F}(z_1,\dots,z_5;w)$ принадлежат те значения z_5 /при данных $\tau_\ell \leqq \tau_\ell^\circ$ /, которые могут быть представлены в виде /C.14/ хотя бы при одном наборе чисел μ_ℓ , ν_ℓ и $\tilde{p}_\ell$, удовлетворяющих соответственно условиям /C.15/ и /C.25/. Чтобы получить границу соответствующей области надо поставить знак равенства в первом неравенстве /C.15/ и в неравенстве /C.25/. Тогда можно положить

$$-\mu_1=\mu_2=\cos\delta,\quad \nu_1=\nu_2=\sin\delta,\quad \tilde{p}_\ell=\varphi_\ell(w,\tau_\ell).$$

Таким образом мы приходим к эллипсу /4.9/. Теорема доказана полностью.

Докажем еще, что всем эллипсам /4.9/ принадлежат вещественные Δ^2 из промежутка

$$\max_{\substack{w\geq c\\ \tau_\ell\leqq\tau_\ell^\circ}}\left[A(w,\tau_\ell)-B(w,\tau_\ell)\right]<\Delta^2<\min_{w\geq c}\left[A(w,\tau_\ell^\circ)+B(w,\tau_\ell^\circ)\right].$$

Для этой цели достаточно заметить, что в силу установленных свойств монотонности функций ψ^2, φ^2 и $\varphi^2-\psi^2$, функции A и B /4.10/ при $w\geqq c$ монотонно убывают с возрастанием τ_ℓ .

Рукопись поступила в издательский отдел
18 января 1960 года.

Литература

1. S. Okubo. Prog.Theor.Phys. 19, 43, (1958).

2. М.К.Поливанов. ДАН СССР, 118, 679 /1958/.

   Ю.Вольф. Дисперсионные соотношения для неупругих процессов с К-мезонами. ЖЭТФ, 37, 1379 /1959/.

3. Y.S. Jin. Nuovo Cim. 12, 455, (1959).

4. R.F. Streater. Nuovo Cim., 13, 57, (1959).

5. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Москва, 1958.

   Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров. Изв. АН СССР, серия математическая, 22, 15, 1958.

6. А.А.Логунов. Вопросы теории дисперсионных соотношений для неупругих процессов /Препринт ОИЯИ, 1959/.

   А.А.Логунов. НДВШ, физ.мат.науки № 4, 207 /1958/.

7. E.J. Dyson. Phys. Rev. 110, 1460, (1958).

8. В.С.Владимиров и А.А.Логунов. Доказательство некоторых дисперсионных соотношений в квантовой теории поля. Изв. АН СССР, серия математическая 23, 661 /1959/ /см.препринт ОИЯИ Р-260 /1958/ . См.также доклад Д.В.Ширкова на 9-й Международной конференции по физике высоких энергий /Киев, 1959/.

9. H.J. Bremermann, R. Oehme and J.G. Taylor. Phys.Rev. 109, 2178, (1958).

10. R. Oehme and J.G. Taylor. Phys.Rev. 113, 371, (1959).

11. L. Schwartz. Theorie des distributions, v 1-II, Paris, 1950–51.

12. С.Бохнер и У.Т.Мартин. Функции многих комплексных переменных, Москва, 1951 г.