

7-78

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P-45

Лаборатория ядерных проблем

"ВОССТАНОВЛЕНИЕ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ
ПО УГЛОВОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОДУКТОВ ИХ РАСПАДА"

Часть I.

Ю.Д. ПРОКОШКИН

1957 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

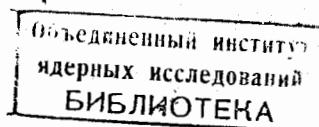
Лаборатория ядерных проблем

9
П-78

"ВОССТАНОВЛЕНИЕ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ
ПО УГЛОВОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОДУКТОВ ИХ РАСПАДА"

Ч а с т ь I.

Ю.Д. ПРОКОШКИН



1957 г.

В ряде случаев, когда нельзя получить прямые сведения о характере процессов образования и взаимодействия частиц ввиду малого времени их жизни, приходится ограничиваться исследованием функции распределения вторичных частиц, продуктов распада короткоживущих первичных частиц. Это имеет место, например, при исследовании образования Π^0 -мезонов, о свойствах которых можно узнать лишь регистрируя вторичные частицы, гамма-кванты. В качестве другого примера можно указать на процессы образования гиперонов и других тяжелых нестабильных частиц.

В указанных случаях необходимо знать, как связаны между собой угловые распределения первичных и вторичных частиц, т.е. решить задачу о восстановлении углового распределения первичных частиц. Ниже, в части I настоящей работы, эта задача рассмотрена для случая, когда скорость вторичных частиц равна скорости света или близка к ней. Общему решению задачи будет посвящена II часть. В основу части I положен материал, содержащийся в работе /I/.

I. Общие соотношения

Пусть в системе сферических координат /I/ известно угловое распределение $W(x_0, \varphi_0)$ первичных частиц, обладающих скоростью

β /в единицах скорости света/. Здесь $x_0 = \cos \vartheta_0$. В дальнейшем нас будет интересовать, каково в этой же системе координат /I/ угловое распределение $F(x, \varphi)$ вторичных частиц, образующихся при распаде первичных частиц. Функция $F(x, \varphi)$ рассматривается на расстояниях, значительно больших, чем свободный пробег первичных частиц.

Пусть первичные частицы летят в направлении $[x_0, \varphi_0]$ и $f(x'', \varphi'')$ есть угловое распределение вторичных частиц в системе координат /II/, связанной с первичной частицей /в большинстве случаев f изотропно/. Обозначим через β , скорость вто-

ричных частиц в системе координат /II/.

Совершим переход из системы /II/ в систему /I/ с координатами ϑ' , φ' , ось которой направлена вдоль $[\vartheta_0, \Psi_0]$, а центр координат совпадает с центром системы /I/. При этом переходе функция углового распределения трансформируется:

$$f'(x', \varphi') = f[x''(x'), \varphi'] dx''/dx', \quad I.1$$

$$x'' = \frac{\pm x' [\Psi^2(x') - (\beta/\beta_1)^2 (1-x'^2)]^{1/2}}{\gamma - (\beta/\beta_1)(1-x'^2)}, \quad I.2$$

$$\frac{dx''}{dx'} = Q(x', \beta, \beta_1) = \frac{[(1-\alpha^2\Psi^2(x'))^{1/2} \pm (1-\Psi^2(x'))^{1/2}]^2}{\gamma^2 \beta_1 \Psi^4(x')(1-\alpha^2\Psi^2(x'))^{1/2}}. \quad I.3$$

Здесь введены обозначения: $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\Psi^2(x') = 1 - \beta^2 x'^2$,

$\alpha = \gamma \gamma_1^{-1}$. При $\alpha < 1$ в формулах (I.2) и (I.3) следует учитывать только знак +. При $\alpha > 1$ плюс относится к частицам, летящим в переднюю полусферу в системе /II/, минус - в заднюю. Предельный угол ϑ'_{max} определяется из соотношения

$$\Psi^2(x') = 1/\alpha^2.$$

Наконец, совершим переход из промежуточной системы координат /I'/ в основную систему /I/. При трансформации $f' \rightarrow f$ входящие в нее функции X' и φ' заменяются выражениями через X и Ψ :

$$x'(x, x_0; \varphi - \varphi_0) = x x_0 + (1-x^2)^{1/2} (1-x_0^2)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad I.4$$

$$\sin \varphi' = (1-x^2)^{1/2} (1-x_0^2)^{-1/2} \sin(\varphi - \varphi_0) \quad I.5$$

Якобиан $\frac{\partial(x', \varphi')}{\partial(x, \varphi)}$ равен единице, ибо преобразование есть чистый поворот. Функция $f(x, \varphi)$ представляет собой количество вторичных частиц, испускаемых в направлении $[\vartheta, \varphi]$ первичными частицами, которые движутся в направлении $[\vartheta_0, \varphi_0]$ /всюду на единицу телесного угла/. Для получения функции углового распределения вторичных частиц $F(x, \varphi)$ при данном распределении $W(x_0, \varphi_0)$ остается перемножить W и f и проинтегрировать по x_0 и φ_0 :

$$F(x, \varphi) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} W(x_0, \varphi_0) \{ x'' [x'(x, x_0, \varphi - \varphi_0)], \varphi(x, x_0, \varphi - \varphi_0) \} \times Q[x'(x, x_0, \varphi - \varphi_0), \beta, \beta_1] dx_0 d\varphi_0 \quad I.6$$

В дальнейшем мы будем рассматривать весьма общий случай, когда первичные частицы распадаются изотропно: $f \equiv 1$

Пусть W не зависит от φ_0 . Тогда, интегрируя по φ_0 , получаем:

$$F(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{Y}(x, x_0, \beta, \beta_1) W(x_0) dx_0, \quad I.7$$

где

$$\mathcal{Y}(x, x_0, \beta, \beta_1) = \int_0^{2\pi} Q(x, x_0, \varphi - \varphi_0, \beta, \beta_1) d\varphi_0. \quad I.8$$

Угловое распределение $W(x_0)$ преобразуется в $F(x)$ интегральным оператором M :

$$F(x) = M(x, x_0) W(x_0). \quad I.9$$

Анализ уравнения /I.9/ при произвольных значениях γ и γ_1 затруднен из-за громоздкости входящих в /I.2, 3/ выражений.

Лишь в предельных случаях: $\gamma \gg \gamma_1$ /тривиальный случай, $M \approx 1$ / и $\beta_1 = 1$ формула /I.7/ упрощается. Последний случай будет рассмотрен ниже.

2. Угловое распределение вторичных
частиц при $\beta_1 = 1$

При $\beta_1 = 1$ ядро уравнения /I.9/ имеет вид:

$$J(x, x_0, \beta) = (1 - \beta x x_0) / 2 \gamma^2 [1/\gamma^2 + \beta(\beta x_0^2 - 2x x_0 + \beta x^2)]^{3/2} \quad 2.1$$

Соотношения /I.7, 2.1/ позволяют определить $F_n(x)$ при произвольном распределении $W(x_0)$. Для этого достаточно, например, разложить $W(x_0)$ в ряд Фурье. Тогда задача будет полностью решена, если известны решения уравнения $F_n(x) = M(x, x_0) x_0^n$.

Искомые функции $F_n(x)$ имеют вид:

$$F_n(x) = \beta^n \Psi^{-1}(x) \sum_{k=0}^{n+1} V_{nk} \delta_k, \quad 2.2$$

где $V_{nk} = C_{n+1}^k x^{n-k+2} - C_n^k x^{n-k}$ (Здесь и ниже примем: $C_m^{l < 0} = 0$), а δ_k определяются из рекуррентного соотношения:

$$\delta_{k+2} = \lambda_k + \mu_k \delta_k, \quad 2.3$$

где

$$\lambda_k = \frac{(1+\beta x)^3 (\beta-x)^{k+1} - (1-\beta x)^3 (-\beta-x)^{k+1}}{2k\gamma^2 \beta \Psi^2(x)}, \quad \mu_k = -\frac{1-x^2}{\gamma^2} \frac{k+1}{k}, \text{ а.}$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_1 = x/\gamma^2, \quad \delta_2 = (1-x^2)/\gamma^2 - \Psi(x) \operatorname{Arctg} \beta / \beta \gamma^2.$$

$$(\operatorname{Arctg} \beta = \operatorname{Env} \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)})$$

Из всех интервалов δ_k лишь δ_0 содержит в числителе γ^2 . Поэтому при $\beta \rightarrow 1$ в сумме /2.2/ неисчезающим является только первый член, что обеспечивает выполнение предельного соотношения: $F_n(x) \rightarrow x^n$ при $\beta \rightarrow 1$.

Из /2.2/ следует, что при n - четном /нечетном/ $F_n(x)$ есть

четный /нечетный/ полином степени n :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2k=E(n)} d(\beta)_{n,n-2k} x^{n-2k} \quad 2.4$$

Здесь $E(n)$ -ближайшее к n снизу четное число.

Коэффициенты $d(\beta)_{n,n-2k}$ являются суммой рациональной функции от β^2 /или, что то же самое, от γ^{-2} / и члена, содержащего $A \operatorname{arth} \beta$:

$$\beta^n d(\beta)_{n,n-2k} = \sum_{m=0}^{2m=E(n)} a_{n,n-2k,m} \beta^{-2m} + (\beta \gamma^2)^{-1} A \operatorname{arth} \beta \sum_{s=0}^{2s=E(n-1)} b_{n,n-2k,s} \gamma^{-2s} \quad 2.5$$

Несложные, но длительные преобразования приводят к выражениям для b :

$$b_{n,n-2k,s=0} = (-1)^s \frac{(2s+1)(2s-1)\dots 3}{2s(2s-2)\dots 2} (C_{n+1}^{2s+2} C_s^{s-k} - C_n^{2s+2} C_s^{s-k+1}) ,$$

$$b_{n,n-2k,s=0} = C_0^k C_{n+1}^{2s} - C_0^{k-1} C_n^{2s} . \quad 2.6$$

Для нахождения числа $a_{n,n-2k,s=0}$ удобно, не производя громоздких вычислений, воспользоваться предельным соотношением: $d(\beta)_{n,n-2k} \rightarrow \begin{cases} 0 & 2k \neq n \\ 1/(n+1) & 2k = n \end{cases}$ при $\beta \rightarrow 0$, из которого следует:

$$a_{n,n-2k,m} = (-1)^{m+1} \sum_{\ell=m}^{2\ell=E(n)} C_{\ell}^m \sum_{i=0}^{l=\ell} (-1)^i d_{\ell-i} \sum_{s=1}^{2s=E(n-1)} b_{n,n-2k,s} C_s^i , \quad 2.7$$

где $d_{\ell>0} = -2/(4\ell^2-1)$, $d_0 = 1$. Соотношения

/2.4 - 2.7/ справедливы для любого целого положительного n и полностью решают поставленную задачу.

В заключение отметим одно важное свойство функций $F(x)$, вытекающее из /2.4/. Пусть $W(x_0) = P_n(x_0)$, где

$P_n(x_0)$ — полином Лежандра n -ой степени. Тогда $F(x) = \sum_{i=0}^{2i=n} E_{n,n-2i} P_{n-2i}(x)$. Воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получаем:

$$E_{n,n-2i} \sim \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$$

Таким образом, полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора $M(x, x_0)$ (на это впервые было указано в работе /2/). Из формулы /2.4/ следует, что собственные значения оператора

$M(x, x_0)$ совпадают с определенными выше коэффициентами $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$

$$\alpha(\beta)_{nn} P_n(x) = M(x, x_0) P_n(x_0) \quad 2.8$$

3 Коэффициенты $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$

Здесь мы отметим несколько общих свойств функций $\alpha(\beta)$,

1. $\alpha(\beta)_{n,n-2k} \geq 0$.

3.1

2. При $\beta \rightarrow 0$ распределение $F(x)$ стремится к изотропному, причем более "анизотропные" члены исчезают быстрее:

$$\alpha(\beta)_{n,n-2k} / \alpha(\beta)_{n,n-2k-2} \rightarrow 0 \quad \beta \rightarrow 0 \quad 3.2$$

3. При $\beta \rightarrow 1$ справедливо обратное утверждение:

$$\alpha(\beta)_{n,n-2k-2} / \alpha(\beta)_{n,n-2k} \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 1 \quad 3.3$$

4. Особенность функций $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$ является их быстрое изменение в непосредственной близости от точки $\beta = 1$. Чем выше степень n , тем эта особенность проявляется ярче.

В заключение заметим, что при n -четном имеет место простое соотношение, весьма полезное при проверке вычислений:

$$\sum_{k=0}^{2k=E(n)} d(\beta)_{n,n-2k} / n-2k+1 = 1/2 \quad 3.4$$

Коэффициенты $d(\beta)_{n,n-2k}$ и соответствующие им функции $F_n(x)$ и их графики даны в Приложении. Вычисления выполнены для $n \leq 6^x/6$. Следует заметить, что вычисление $d(\beta)_{n,n-2k}$ по формулам /2.5 - 2.7/ представляет некоторые трудности, возрастающие при $\beta \rightarrow 0$. Так, в области $\beta < 0,5$ вычисления по указанным формулам приходится проводить с точностью $\sim 10^{-8}$. При малых значениях β удобнее пользоваться представлением функций $d(\beta)_{n,n-2k}$ с помощью рядов /см. также Приложение/:

$$d(\beta)_{n,n-2k} = \beta \sum_{l=1-n+E(n)}^{n-E(n)} g_{n,n-2k,l} \beta^{2l} \quad 3.5$$

где

$$g_{n,n-2k,l} = \frac{1}{2} C_0^{n-2k} + \sum_{\ell=0}^{2\ell=E(n+1)} \frac{(-1)^{\frac{E(n+1)-\ell}{2}}}{2l+2\ell-1} \sum_{2s=E(n-1)-2\ell} B_{n,n-2k,s} (C_s^{\frac{E(n+1)-\ell}{2}} - C_s^{\frac{E(n+1)-\ell-1}{2}})$$

4 Анизотропия угловых распределений $F_n(x)$.

Введем в рассмотрение следующий фактор, характеризующий анизотропию углового распределения вторичных частиц /относительно распределения первичных $F(x,1)$ / :

$$\eta = \frac{F_n(1,\beta) - F_n(0,\beta)}{F_n(1,1) - F_n(0,1)} = \sum_{k=0}^{2k=E(n)} d(\beta)_{n,n-2k} \quad 4.1$$

X/ Вычисления выполнены Г. Тентюковой и С. Беляковым.

График этой функции приведен на рис. 7. Как видно из этого рис., фактор η лишь в малой окрестности $\beta = 1$ близок к единице и быстро уменьшается при $\beta \rightarrow 0$, причем, анизотропия $|\eta|$ уменьшается тем быстрее, чем выше степень n .

Это указывает на определенные трудности, возникающие при проведении экспериментов, в которых исследуется угловое распределение вторичных частиц, а целью работы является получение сведений об угловом распределении первичных частиц /например, исследование углового распределения Π^0 -мезонов путем измерения углового распределения гамма-квантов от распада Π^0 -мезонов/. Даже при весьма больших значениях β угловое распределение вторичных частиц еще близко к изотропному, и требуется большая точность измерений, чтобы можно было восстановить угловое распределение первичных частиц /особенно в случае высоких степеней n /.

В качестве примера рассмотрим случай, когда Π^0 -мезоны распределены по закону $\frac{a+3\beta \cos^2 \vartheta}{2(a+\beta)}$ /что имеет место в весьма широком интервале энергий столкновения нуклонов/. Угловое распределение гамма-квантов имеет аналогичный вид:

$$F = \frac{a^* + 3\beta^* \cos^2 \vartheta^*}{2(a^* + \beta^*)}$$

Так как рассматриваемый пример носит лишь иллюстративный характер, положим $a = 0$. Тогда

$$\beta^*/(a^* + \beta^*) = \alpha_{22}$$

На рис. 8, где изображена эта функция, по оси абсцисс наряду со скоростью Π^0 -мезона β отложена также энергия протона E_p ,

сбразующего при соударении с иуклоном Π^0 -мезон со скоростью β

Из рис. 8 видно, что уже при энергии $E_p = 650$ МэВ угловое распределение гамма-квантов наполовину изотропно ($\beta^*/(\alpha^* + \beta^*) \approx 1/2$).

С уменьшением энергии до 340 МэВ это соотношение ухудшается до 1/8. Если учесть еще быстрое уменьшение выхода мезонов при снижении энергии протонов, то становится ясным, что при энергиях, близких к порогу образования Π -мезонов, выполнение опытов по исследованию углового распределения Π^0 -мезонов является чрезвычайно сложной задачей.

5. Изотропические углы

Угол ϑ^* и ему дополнительный $\bar{\Pi} - \vartheta^*$ мы будем называть "изотропическими" углами, если они удовлетворяют уравнению

$$F(x^*) + F(-x^*) = 2F|_{\beta=0} \quad 5.1$$

т.е. суммарный выход частиц под этими углами равен удвоенному выходу в случае изотропного распределения.

В силу свойств симметрии функций $F_n(x)$ при n -нечетном уравнение /5.1/ удовлетворяется тождественно. При n -четном /5.1/ переходит в

$$F_n(x^*) = F_0 \quad 5.2$$

или

$$\sum_{k=0}^{2k < n} \alpha(\beta)_{n,n-2k} (x^*)^{n-2k} = 1/2 \quad 5.3$$

Интегрируя $F_n(x)$ в интервале $0 - \bar{\Pi}$ и вычитая интеграл из /5.3/, получаем уравнение для определения x^* :

$$\sum_{k=0}^{2k=n} \alpha(\beta)_{n,n-2k} \left[(x^*)^{n-2k} - \frac{1}{n-2k+1} \right] = 0 \quad 5.4$$

Рассмотрим это уравнение несколько подробнее. Воспользовавшись указанными в § 3 свойствами функций $d(\rho)$, видим, что изотропический угол заключен в интервале

$$(n+1)^{-1/2} \leq x^* \leq 1/\sqrt{3}$$

5.5

С увеличением скорости β угол ϑ_n уменьшается: $\vartheta_n \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 1$ с уменьшением β — увеличивается: $\vartheta_n \rightarrow \pi/3$ при $\beta \rightarrow 0$. Только в случае $n=2$ указанный интервал вырождается в точку: $x_2^* = 1/\sqrt{3}$. Угол $\vartheta_2 = 54^\circ 45'$ является изотропическим при любом значении скорости первичной частицы β . На этот факт в свое время обратил внимание А. Тяпкин ^[3], указавший на возможность получения величины полного сечения образования Π^0 -мезонов путем измерения выхода гамма-квантов под указанным углом, если только Π^0 -мезоны распределены по закону $\frac{\alpha + \beta \cos^2 \theta}{2(\alpha + \beta)}$. Пусть $R(\beta)$ есть спектр первичных частиц. Выход вторичных частиц под углом ϑ^* определяется интегралом:

$$d\sigma/d\Omega(\vartheta^*) = \sigma/2\pi \int F_n(x^*, \beta) R(\beta) d\beta$$

В случае $n=0$ и 2 $F_n(x^*, \beta) = 1/2$ и так как $\int R(\beta) d\beta = 1$, то дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$ для угла ϑ^* при $n=0$ и 2 связано с полным сечением простым соотношением, которое не зависит ни от параметров углового распределения α и β , ни от энергетического спектра первичных частиц β :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{\text{общ}}}{d\Omega(\vartheta_2^*)} \quad 5.6$$

При $n > 2$ уравнение /5.4/ усложняется

$$d_{44}(x^4 - 1/5) + d_{42}(x^2 - 1/3) = 0$$

и т.д.

и уже не допускает решения, не зависящего от скорости β .

Однако, величина изотропического угла даже при больших n остается заключенной в весьма узком интервале углов. Границы этого интервала слабо зависят от n :

$$48^{\circ}05' \leq \vartheta_4^* \leq 54^{\circ}45'$$

$$43^{\circ}40' \leq \vartheta_6^* \leq 54^{\circ}45'$$

и т.д.

Следует также отметить, что благодаря свойству функций $\lambda(\beta)$, быстро изменяться лишь в непосредственной близости от точки $\beta = 1$ при не очень больших n , значения ϑ_n^* располагаются в основном вблизи верхней границы интервала / $54^{\circ}45'$ / и лишь при $\beta = 0,9 + 0,95$ /кинетическая энергия П-мезона больше 200 МэВ/ начинают быстро смещаться в сторону меньших углов /см., например рис. 6/. Благодаря этому выход частиц под углом ϑ_2^* практически не зависит от спектра первичных частиц, если $\beta < 0,9$. Так, если вычислить выход гамма-квантов под углом ϑ_2^* в случае углового распределения $W \sim x_0^4$ при двух крайних предположениях об энергетических спектрах П⁰-мезонов, образованных нуклонами с энергией 500-700 МэВ, то различие составляет всего 2-3%, что лежит за пределами точности современного эксперимента.

В реально встречающихся случаях высокие степени косинуса сравнительно слабо представлены в угловом распределении, так что соотношение /5.6/ остается справедливым при практически произвольном симметричном распределении первичных частиц.

Если в угловом распределении представлены и нечетные степени косинуса, то для получения величины полного сечения следует измерять выход под двумя углами:

$$\sigma = 2\pi [d\sigma/d\Omega(\vartheta_2^*) + d\sigma/d\Omega(\pi - \vartheta_2^*)]. \quad 5.7$$

Это соотношение справедливо для практически произвольного углового распределения Π^0 -мезонов.

Указанные изотропические свойства угловых распределений вторичных частиц избавляют от необходимости угловых измерений при определении величины полного сечения. Это существенно облегчает также задачу измерения функции возбуждения для первичных частиц, особенно в случае, когда их угловое распределение измеряется в исследуемом интервале энергий. Если известно, что угловое распределение первичных частиц симметрично /например, образование Π^0 -мезонов в соударениях протонов/, то достаточно измерить энергетическую зависимость выхода под одним углом /соответственно изменения угол наблюдения в лабораторной системе координат при измерении энергии бомбардирующих частиц/. В общем случае, когда нет сведений о симметрии углового распределения, измерение выходов следует вести под двумя углами: Θ_1 и Θ_2 , соответствующими углам ϑ_2^* и $\Pi - \vartheta_2^*$ в системе координат /I/. При этом нет необходимости изменять углы Θ_1 и Θ_2 с изменением энергии /если, конечно, исследуемый интервал энергии не слишком велик/. Последнее связано с тем, что функции $F_n(x)$ практически линейны в окрестности изотропических углов ϑ_2^* и $\Pi - \vartheta_2^*$, так как эти углы расположены вблизи точек перегиба функций $F_n(x)$. Благодаря этому изменения выходов под углами Θ_1 и Θ_2 компенсируют друг друга. Возможность фиксации углов наблюдения при измерении функции возбуждения предстает некоторые экспериментальные удобства, позволяя сохранять геометрию опыта неизменной.

6. Угловое распределение вторичных частиц при $\beta_1 \leq 1$

Для того, чтобы выяснить, как ведет себя функция $F_n(x)$ при $\beta_1 \leq 1$, разложим $Q(x, x_0, \beta, \beta_1)$ в ряд по степеням a^2 :

$$Q(x, x_0, \beta, \beta_1) \approx Q(x, x_0, \beta, 1) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 \quad 6.1$$

/здесь мы опустим нормирующий множитель/.

Интегрируя /6.1/, получаем:

$$\mathcal{I}(x, x_0, \beta, \beta_1) = \mathcal{I}(x, x_0, \beta, 1) - \frac{\pi}{\gamma_1^2} \quad 6.2$$

Отсюда следует /пусть n - четное/:

$$F_n(x) \approx \sum_{k=0}^{2k=E(n)} \alpha(\beta)_{n,n-2k} x^{n-2k} - \frac{2\pi}{\gamma_1^2} (n+1), \quad \gamma_1 \geq 10 \quad 6.3$$

Из /6.3/ видно, что с уменьшением γ_1 анизотропия функции $F_n(x)$ увеличивается. Влияние дополнительного члена становится заметным уже при очень больших значениях γ_1 /~10/, с уменьшением γ_1 различие между угловыми распределениями первичных и вторичных частиц быстро исчезает.

7. Приложения

I. Коэффициенты $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$

Введем функцию: $(\beta\gamma^2)^{-1} \operatorname{Arth}\beta = u(\beta)$

$$\alpha_{00} = 1, \quad \beta\alpha_{11} = 1 - u(\beta), \quad \beta^2\alpha_{22} = 1 + 2/\gamma^2 - 3u(\beta), \quad \beta^2\alpha_{20} = -1/\gamma^2 + u(\beta),$$

$$\beta^3\alpha_{33} = 1 + 13/2\gamma^2 - 3/2(4 + 1/\gamma^2)u(\beta), \quad \beta^3\alpha_{31} = -9/2\gamma^2 + 3(1 + 1/2\gamma^2)u(\beta),$$

$$\beta^4\alpha_{41} = 1 + 83/6\gamma^2 + 8/3\gamma^4 - 5(2/\gamma^2 + 3/2\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^4\alpha_{42} = -11/\gamma^2 + 4/\gamma^4 + 3(2/\gamma^2 - 3/\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^4\alpha_{40} = 1/2\gamma^2 + 1/\gamma^4 - 3/2\gamma^2u(\beta),$$

$$\beta^5\alpha_{55} = 1 + 97/4\gamma^2 + 113/8\gamma^4 - 15(1 + 3/2\gamma^2 + 1/8\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^5\alpha_{53} = -25(5/6\gamma^2 + 11/6\gamma^4 - 11/12\gamma^6) + 5(2/3 + 2/\gamma^2 + 1/4\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^5\alpha_{51} = 5(1/4\gamma^2 + 13/8\gamma^4) - 15(1/2\gamma^4 + 1/8\gamma^6)u(\beta),$$

$$\beta^6\alpha_{66} = 1 + 759/20\gamma^2 + 1779/40\gamma^4 + 16/5\gamma^6 - 21(1 + 5/2\gamma^2 + 5/8\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^6\alpha_{64} = -7(274/8\gamma^2 + 607/8\gamma^4 + 8/\gamma^6) + 15(1 + 5/\gamma^2 + 15/8\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^6\alpha_{62} = 3(3/4\gamma^2 + 83/8\gamma^4 + 2/\gamma^6) - 45(1/2\gamma^2 + 3/8\gamma^4)u(\beta),$$

$$\beta^6\alpha_{60} = 1/4\gamma^2 - 9/8\gamma^4 - 1/\gamma^6 + 15/8\gamma^4u(\beta).$$

II. Представление $d(\beta)_{n,n-2k}$ рядами

$$d_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3} \right) \beta^{2i+1},$$

$$d_{22} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3} \right) \beta^{2i}, \quad d_{20} = \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3} \right) \beta^{2i},$$

$$d_{33} = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i+1} + \frac{6}{2i+3} - \frac{5}{2i+5} \right) \beta^{2i+1}, \quad d_{31} = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{4}{2i+3} + \frac{3}{2i+5} \right) \beta^{2i+1},$$

$$d_{44} = \frac{5}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2i+1} + \frac{10}{2i+3} - \frac{7}{2i+5} \right) \beta^{2i}, \quad d_{42} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2i+1} - \frac{8}{2i+3} + \frac{5}{2i+5} \right) \beta^{2i},$$

$$d_{51} = \frac{15}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{7}{2i+3} + \frac{N}{2i+5} - \frac{5}{2i+7} \right) \beta^{2i+1}, \quad d_{40} = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{2}{2i+3} + \frac{1}{2i+5} \right) \beta^{2i},$$

$$d_{55} = \frac{15}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{15}{2i+3} + \frac{35}{2i+5} - \frac{21}{2i+7} \right) \beta^{2i+1}, \quad d_{53} = \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2i+1} + \frac{33}{2i+3} - \frac{65}{2i+5} + \frac{35}{2i+7} \right) \beta^{2i+1},$$

$$d_{51} = \frac{15}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{7}{2i+3} + \frac{11}{2i+5} - \frac{5}{2i+7} \right) \beta^{2i+1},$$

$$d_{66} = \frac{21}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2i+1} - \frac{35}{2i+3} + \frac{63}{2i+5} - \frac{33}{2i+7} \right) \beta^{2i}, \quad d_{64} = \frac{15}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{15}{2i+1} + \frac{85}{2i+3} - \frac{133}{2i+5} + \frac{63}{2i+7} \right) \beta^{2i},$$

$$d_{62} = \frac{45}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2i+1} - \frac{13}{2i+3} + \frac{17}{2i+5} - \frac{7}{2i+7} \right) \beta^{2i}, \quad d_{60} = \frac{1}{7} - \frac{15}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{3}{2i+3} + \frac{3}{2i+5} - \frac{1}{2i+7} \right) \beta^{2i}.$$

β	d_{11}	d_{20}	d_{22}	d_{31}	d_{33}	d_{40}	d_{42}	d_{51}
0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000
0,1000	0,0668	0,4980	0,0060	0,0799	0,0005	0,4971	0,0086	0,0000
0,2000	0,1344	0,4919	0,0244	0,1590	0,0038	0,4884	0,0344	0,0000
0,3000	0,2037	0,4813	0,0562	0,2366	0,0131	0,4735	0,0779	0,0000
0,4000	0,2758	0,4656	0,1032	0,3136	0,0329	0,4516	0,1394	0,0000
0,5000	0,3521	0,4438	0,1687	0,3816	0,0686	0,4249	0,2196	0,0000
0,6000	0,4344	0,4140	0,2580	0,4431	0,1302	0,3823	0,3170	0,0000
0,7000	0,5259	0,3731	0,3806	0,4902	0,2347	0,3301	0,4304	0,0000
0,8000	0,6320	0,3149	0,5551	0,5082	0,4171	0,2602	0,5472	0,0000
0,8500	-	-	-	-	-	0,2158	0,5952	0,0000
0,9000	0,7656	0,2240	0,8279	0,4570	0,7695	0,1618	0,6222	0,0000
0,9500	0,8547	0,1504	0,0487	0,3563	I,1156	0,0944	0,5600	I,0000
0,9750	0,9122	0,0967	I,2100	0,2544	I,4003	0,0524	0,4427	0,0000
I,0000	I,0000	0,0000	I,5000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000

х) Функции $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$ и соответствующие им распределения для нормированных распределений $W_n = n+1/2 \times \chi_n^2$.

x)

Таблицы функций $\alpha(\beta)_{n,n-2k}$

d_{44}	d_{51}	d_{53}	d_{55}	β	d_{60}	d_{62}	d_{64}	d_{66}
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000
$-2 \cdot 10^5$	0,0086	0,0008	$2 \cdot 10^{-6}$	0,1000	0,4967	0,0000	$0,10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$
0,0005	0,1698	0,0062	$7 \cdot 10^{-5}$	0,2000	0,4865	0,0348	0,0010	$9 \cdot 10^{-6}$
0,0028	0,2501	0,0213	0,0006	0,3000	0,4692	0,0891	0,0052	0,0001
0,0095	0,3239	0,0517	0,0026	0,4000	0,4442	0,1568	0,0173	0,0007
0,0250	0,3857	0,1070	0,0065	0,5000	0,4104	0,2409	0,0446	0,0029
0,0603	0,4344	0,1865	0,0263	0,6000	0,3663	0,3369	0,0998	0,0103
0,1322	0,4581	0,3135	0,0700	0,7000	0,3095	0,4360	0,2033	0,0314
0,2869	0,4399	0,4882	0,1862	0,8000	0,2362	0,5083	0,3903	0,1157
0,4292	0,4045	0,5915	0,3102	0,8500	0,1910	0,5193	0,5254	0,3838
0,6539	0,3384	0,7057	0,5190	0,9500	0,0767	0,3725	0,8425	0,9146
1,0946	0,2260	0,7270	1,0191	0,9750	0,0407	0,2469	0,8141	1,503
0,4999	0,1335	0,7224	1,4067	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,5000
2,5000	0,0000	0,0000	300000					

еления $F_n(x)$ (см. следующую таблицу) вычислены
т.е. отличаются от (2.5) множителем $(n+1)/2$.

Гу. Таблицы функций $F_n(\theta)$

β	$F_1(0^\circ)$	$F_1(10^\circ)$	$F_1(20^\circ)$	$F_1(30^\circ)$	$F_1(40^\circ)$	$F_1(50^\circ)$	$F_1(60^\circ)$	$F_1(70^\circ)$	$F_1(80^\circ)$	$F_1(90^\circ)$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1000	0,0668	0,0658	0,0628	0,0578	0,0512	0,0429	0,0334	0,0228	0,0116	0,0000
0,2000	0,1344	0,1324	0,1263	0,1164	0,1030	0,0864	0,0672	0,0460	0,0233	0,0000
0,3000	0,2037	0,2006	0,1915	0,1764	0,1561	0,1310	0,1019	0,0697	0,0354	0,0000
0,4000	0,2758	0,2717	0,2592	0,2389	0,2113	0,1773	0,1379	0,0943	0,0479	0,0000
0,5000	0,3521	0,3467	0,3308	0,3049	0,2697	0,2263	0,1760	0,1204	0,0611	0,0000
0,6000	0,4344	0,4278	0,4082	0,3762	0,3328	0,2792	0,2172	0,1486	0,0754	0,0000
0,7000	0,5258	0,5179	0,4942	0,4554	0,4028	0,3380	0,2629	0,1798	0,0913	0,0000
0,8000	0,6320	0,6224	0,5939	0,5473	0,4841	0,4083	0,3160	0,2162	0,1197	0,0000
0,9000	0,7656	0,7539	0,7184	0,6630	0,5864	0,4921	0,3828	0,2618	0,1329	0,0000
0,9500	0,8547	0,8417	0,8032	0,7402	0,6547	0,5494	0,4274	0,2923	0,1484	0,0000
0,9750	0,9122	0,8983	0,8572	0,7899	0,6987	0,5863	0,4561	0,3120	0,1584	0,0000
1,0000	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000

β	$F_2(0^\circ)$	$F_2(10^\circ)$	$F_2(20^\circ)$	$F_2(30^\circ)$	$F_2(40^\circ)$	$F_2(50^\circ)$	$F_2(55^\circ)$	$F_2(60^\circ)$	$F_2(70^\circ)$	$F_2(80^\circ)$	$F_2(90^\circ)$
0,0000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1000	0,5040	0,5038	0,5033	0,5025	0,5015	0,5005	0,5000	0,4995	0,4987	0,4982	0,4980
0,2000	0,5163	0,5155	0,5134	0,5102	0,5062	0,5019	0,4999	0,4980	0,4947	0,4926	0,4919
0,3000	0,5375	0,5358	0,5309	0,5234	0,5142	0,5044	0,4998	0,4953	0,4878	0,4830	0,4813
0,4000	0,5688	0,5657	0,5567	0,5430	0,5262	0,5082	0,4996	0,4914	0,4777	0,4687	0,4656
0,5000	0,6125	0,6074	0,5927	0,5703	0,5427	0,5134	0,4993	0,4859	0,4635	0,4438	0,4499
0,6000	0,6720	0,6642	0,6418	0,6075	0,5654	0,5205	0,4989	0,4785	0,4442	0,4218	0,4140
0,7000	0,7537	0,7422	0,7092	0,6585	0,5965	0,5302	0,4986	0,4683	0,4177	0,3846	0,3731
0,8000	0,8701	0,8533	0,8051	0,7313	0,6407	0,5441	0,4976	0,4537	0,3799	0,3317	0,3149
0,9000	I,0519	I,0269	0,9550	0,8449	0,7098	0,5657	0,4964	0,4310	0,3209	0,2490	0,2240
0,9500	I,1992	I,1675	I,0765	0,9370	0,7657	0,5832	0,4955	0,4126	0,2731	0,1820	0,1504
0,9750	I,3067	I,2701	I,1651	I,0042	0,8067	0,5960	0,4948	0,3992	0,2382	0,1331	0,0967
I,0000	I,5000	I,4547	I,3245	I,1250	0,8802	0,6190	0,4935	0,3750	0,1755	0,0452	0,0000

β	$F_3(0^\circ)$	$F_3(10^\circ)$	$F_3(20^\circ)$	$F_3(30^\circ)$	$F_3(40^\circ)$	$F_3(50^\circ)$	$F_3(60^\circ)$	$F_3(70^\circ)$	$F_3(80^\circ)$	$F_3(90^\circ)$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1000	0,0803	0,0791	0,0754	0,0695	0,0614	0,0515	0,0400	0,0273	0,0139	0,0000
0,2000	0,1628	0,1602	0,1526	0,1402	0,1235	0,1032	0,0800	0,0545	0,0276	0,0000
0,3000	0,2498	0,2456	0,2332	0,2134	0,1872	0,1556	0,1200	0,1814	0,0402	0,0000
0,4000	0,3442	0,3380	0,3199	0,2910	0,2533	0,2083	0,1598	0,1078	0,0542	0,0000
0,5000	0,4499	0,4410	0,4153	-0,3748	0,3229	0,2633	0,1992	0,1332	0,0666	0,0000
0,6000	0,5734	0,4608	0,5162	0,4684	0,3980	0,3194	0,2378	0,1568	0,0766	0,0000
0,7000	0,7249	0,7069	0,6554	0,5770	0,4810	0,3774	0,2744	0,1770	0,0863	0,0000
0,8000	0,9253	0,8988	0,8238	0,7110	0,5767	0,4373	0,3062	0,1905	0,0904	0,0000
0,8500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0000
0,9000	I,2265	I,1850	I,0680	0,8955	0,6959	0,4979	0,3247	0,1871	0,0834	0,0000
0,9500	I,4719	I,4164	I,2606	I,0332	0,7744	0,5250	0,3176	0,1665	0,0677	0,0000
0,9750	I,6547	I,5880	I,4010	I,1298	0,8243	0,5350	0,3023	0,1430	0,0515	0,0000
I,0000	2,0000	I,9102	I,6596	0,8990	0,8990	0,5306	0,2500	0,0800	0,0105	0,0000

β	$F_4(0^\circ)$	$F_4(10^\circ)$	$F_4(20^\circ)$	$F_4(30^\circ)$	$F_4(40^\circ)$	$F_4(50^\circ)$	$F_4(55^\circ)$	$F_4(60^\circ)$	$F_4(70^\circ)$	$F_4(80^\circ)$	$F_4(90^\circ)$
0,0000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1000	0,5057	0,5055	0,5047	0,5036	0,5022	0,5007	0,4000	0,4993	0,4981	0,4974	0,4971
0,2000	0,5234	0,5223	0,5192	0,5345	0,5088	0,5027	0,4998	0,4971	0,4924	0,4894	0,4884
0,3000	0,5542	0,5515	0,5444	0,5335	0,5201	0,5061	0,4994	0,4931	0,4826	0,4758	0,4735
0,4000	0,0005	0,5957	0,5821	0,5615	0,5367	0,5108	0,4985	0,4871	0,4681	0,4558	0,4516
0,5000	0,6794	0,6613	0,6382	0,6035	0,5622	0,5197		0,4812	0,4505	0,4314	0,4218
0,6000	0,7596	0,7464	0,7092	0,6539	0,5890	0,5234	0,4931	0,4653	0,4202	0,3919	0,3832
0,7000	0,8927	0,8718	0,8132	0,7423	0,6282	0,5302	0,4860	0,4460	0,3823	0,3432	0,3301
0,8000	I,0943	I,0607	I,9671	I,8320	I,6801	I,5349	I,4713	I,4150	I,3282	I,2770	I,2602
0,8500	I,2401	I,1966	I,0760	I,9036	I,7128	I,5345	I,4580	I,3914	I,2913	I,2341	I,2158
0,9000	I,4379	I,3802	I,2211	I,9963	I,7521	I,5300	I,4373	I,3582	I,2436	I,1812	I,1618
0,9500	I,7490	I,6670	I,4423	I,1301	I,7999	I,5119	I,3971	I,3028	I,1749	I,1123	I,0944
0,9750	I,9950	I,8924	I,6128	I,2281	I,8284	I,4905	I,3603	I,2568	I,1247	I,0671	I,0524
I,0000	2,5000	2,3512	I,9492	I,4062	I,8608	I,4258	I,2705	I,1562	I,0342	I,0228	I,0000

β	$F_5(0^\circ)$	$F_5(10^\circ)$	$F_5(20^\circ)$	$F_5(30^\circ)$	$F_5(40^\circ)$	$F_5(50^\circ)$	$F_5(60^\circ)$	$F_5(70^\circ)$	$F_5(80^\circ)$	$F_5(90^\circ)$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1000	0,0866	0,0852	0,0813	0,0749	0,0662	0,0555	0,0431	0,0294	0,0149	0,0000
0,2000	0,1761	0,1733	0,1651	0,1518	0,1337	0,1117	0,0865	0,0588	0,0297	0,0000
0,3000	0,2719	0,2674	0,2542	0,2328	0,2042	0,1696	0,1304	0,0880	0,0440	0,0000
0,4000	0,3783	0,3716	0,3520	0,3206	0,2792	0,2299	0,1750	0,1168	0,0578	0,0000
0,5000	0,4992	0,4896	0,4617	0,4174	0,3600	0,2928	0,2198	0,1444	0,0700	0,0000
0,6000	0,6472	0,6330	0,5922	0,5289	0,4491	0,3591	0,2647	0,1716	0,0810	0,0000
0,7000	0,8415	0,8199	0,7585	0,6658	0,5533	0,4315	0,3096	0,1966	0,0990	0,0000
0,8000	I,II42	I,0790	0,9808	0,8377	0,6725	0,5046	0,3478	0,2084	0,0981	0,0000
0,8500	I,3061	I,2592	I,I296	0,9450	0,7387	0,5381	0,3598	0,2090	0,0881	0,0000
0,9000	I,5632	I,4985	I,3215	I,0752	0,8103	0,5656	0,3619	0,2007	0,0801	0,0000
0,9500	I,9721	I,6491	I,6010	I,2374	0,8685	0,5569	0,3266	0,1671	0,0653	0,0000
0,9750	2,2627	2,I352	I,7941	I,3427	0,9245	0,5380	0,2913	0,1368	0,0452	0,0000
I,0000	3,0000	2,7789	2,I981	I,4613	0,7914	0,3285	0,0938	0,0140	0,0005	0,0000

β	$F_6(0^\circ)$	$F_6(10^\circ)$	$F_6(20^\circ)$	$F_6(30^\circ)$	$F_6(40^\circ)$	$F_6(50^\circ)$	$F_6(55^\circ)$	$F_6(60^\circ)$	$F_6(70^\circ)$	$F_6(80^\circ)$	$F_6(90^\circ)$
0,0000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1000	0,5067	0,5064	0,5055	0,5042	0,5025	0,5008	0,4999	0,4992	0,4978	0,4970	0,4967
0,2000	0,5274	0,5262	0,5225	0,5170	0,5102	0,5031	0,4997	0,4965	0,4912	0,4877	0,4865
0,3000	0,5637	0,5607	0,5521	0,5391	0,5233	0,5069	0,4991	0,4918	0,4797	0,4719	0,4692
0,4000	0,6190	0,6131	0,5966	0,5751	0,5423	0,5120	0,4977	0,4845	0,4628	0,4489	0,4442
0,5000	0,7021	0,6886	0,6599	0,6174	0,5677	0,5179	0,4946	0,4734	0,4392	0,4177	0,4100
0,6000	0,8133	0,7963	0,7487	0,6756	0,6004	0,5231	0,4883	0,4569	0,4071	0,5165	0,3662
0,7000	0,9802	0,9521	0,8746	0,7641	0,6417	0,5263	0,4761	0,4317	0,3638	0,3229	0,3095
0,8000	1,2504	1,2017	1,0689	0,8857	0,6922	0,5205	0,4497	0,3894	0,3012	0,2519	0,2362
0,8500	1,4513	1,3854	1,2076	0,9670	0,7220	0,5100	0,4264	0,3571	0,2593	0,2072	0,1010
0,9000	1,7349	1,6432	1,3984	1,0735	0,7513	0,4897	0,3907	0,3114	0,2061	0,1542	0,1388
0,9500	2,2063	2,0645	1,6922	1,2158	0,7701	0,4258	0,3229	0,2367	0,1333	0,08892	0,07668
0,9750	2,6045	2,4165	1,9282	1,3178	0,7694	0,3868	0,2635	0,1556	0,08310	0,04925	0,04065
1,0000	3,5000	3,1924	2,4098	1,4767	0,7070	0,2461	0,1246	0,05467	0,005607	0,000959	0,0000

Л и т е р а т у р а

1. В.Д.Прокошкин, ЖЭТФ, 31, 732, 1956; отчет ИЯП АН СССР, 1956.
 2. H. Anderson, E. Fermi, R. Martin, D. Nagle. Phys. Rev., 91, 155 (1955).
 3. А.А.Тяпкин, ЖЭТФ, 30, II50, 1956.
-
-

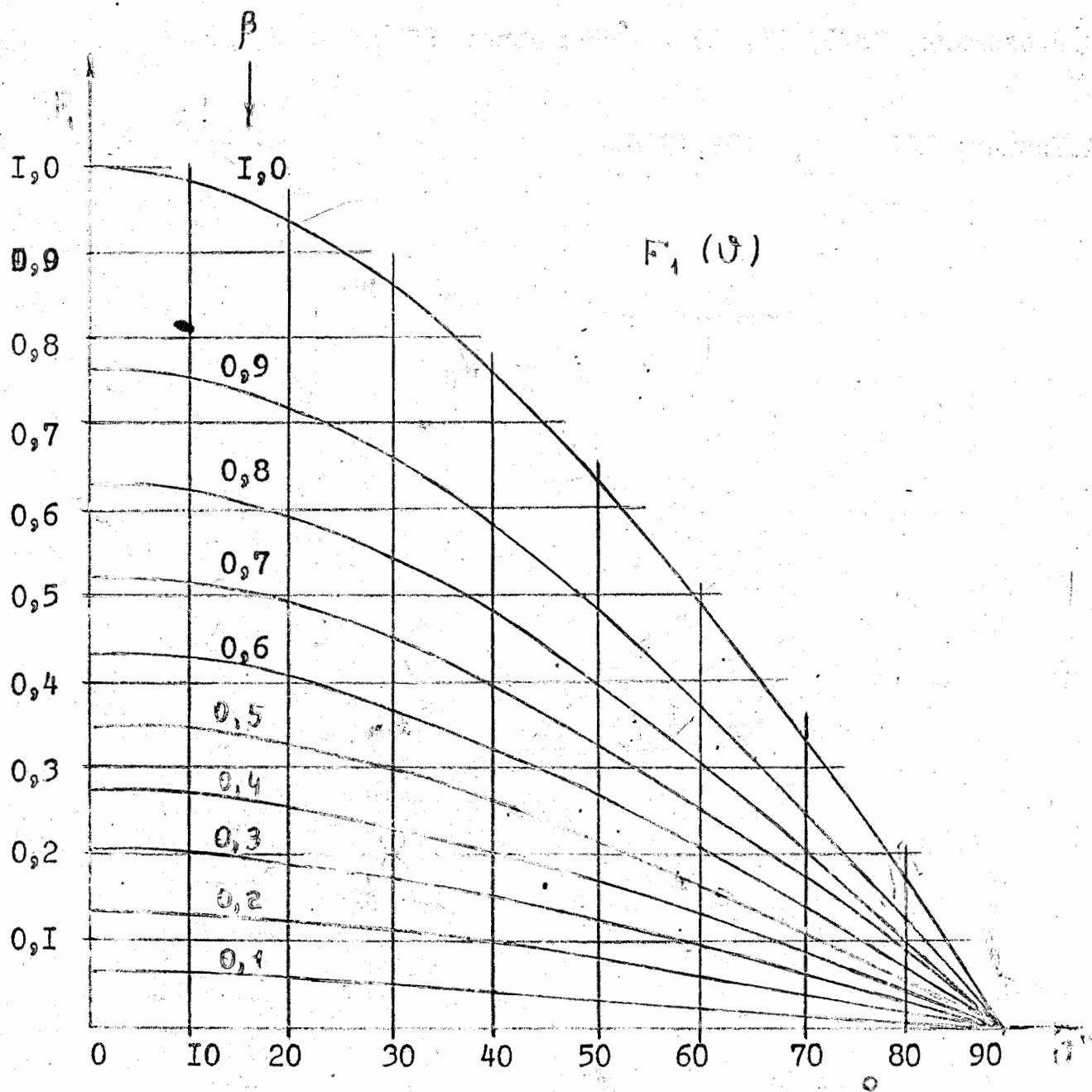


Рис. I

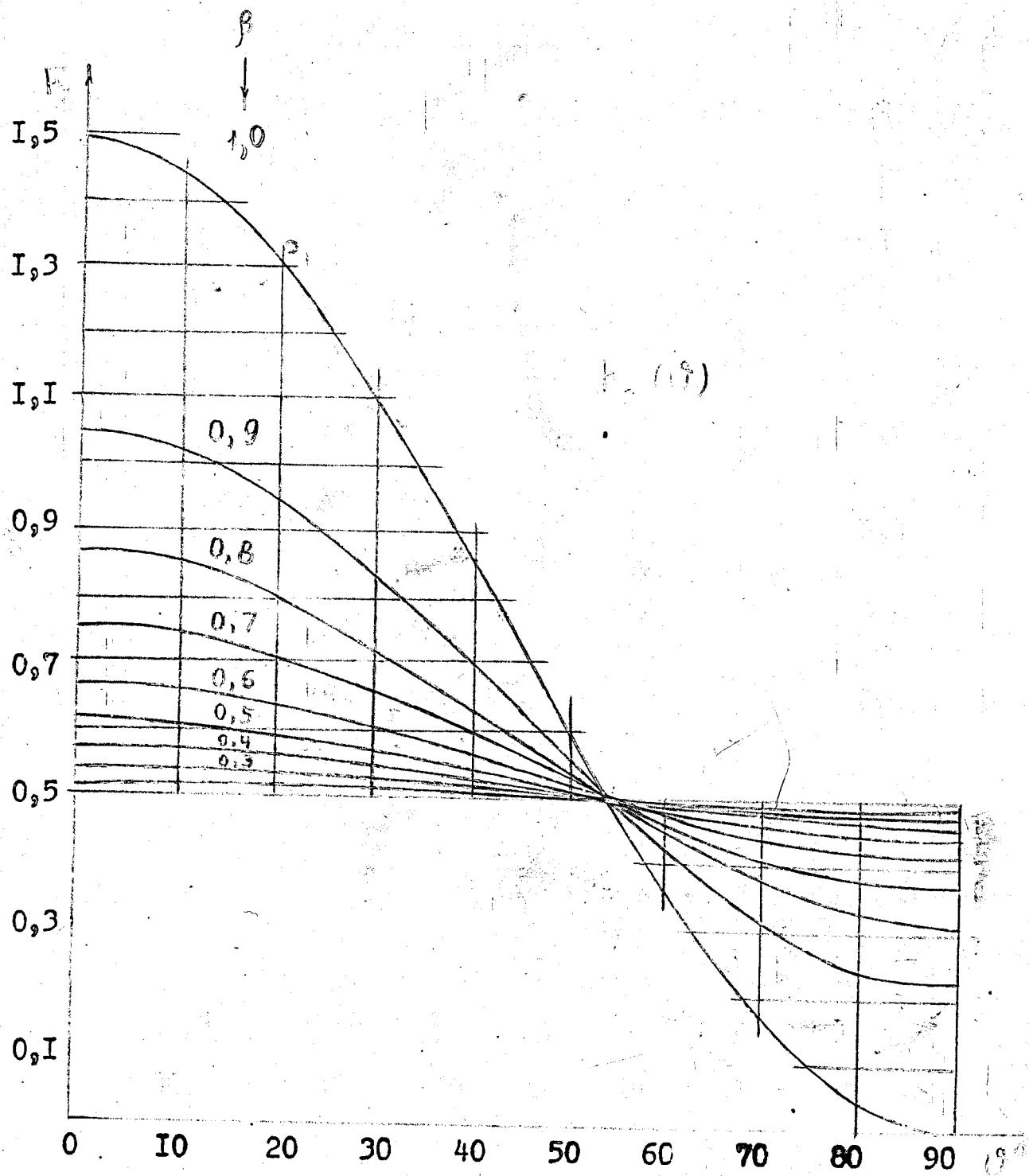


Рис.2

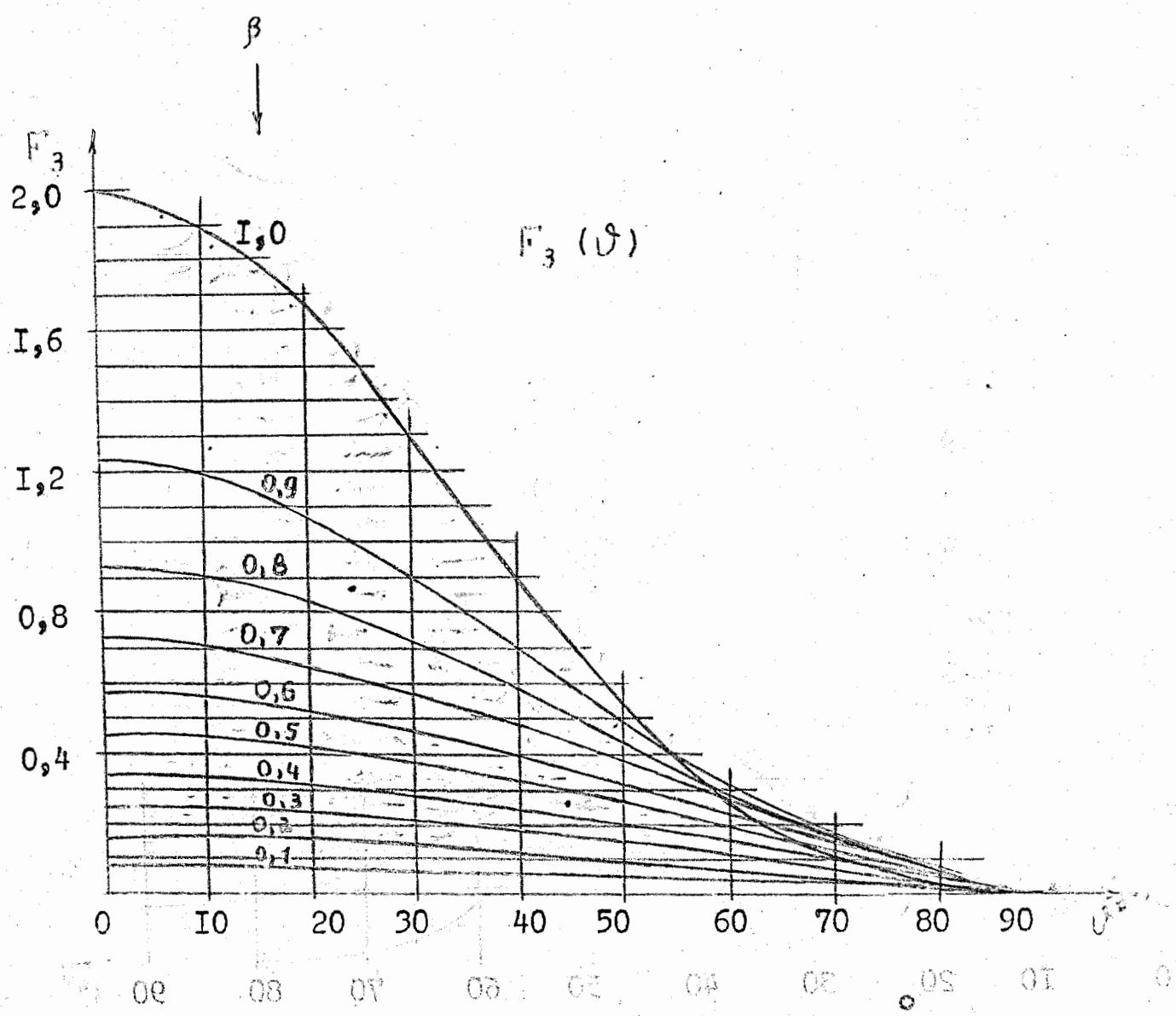


Рис.3

$F_3 \text{ при}$

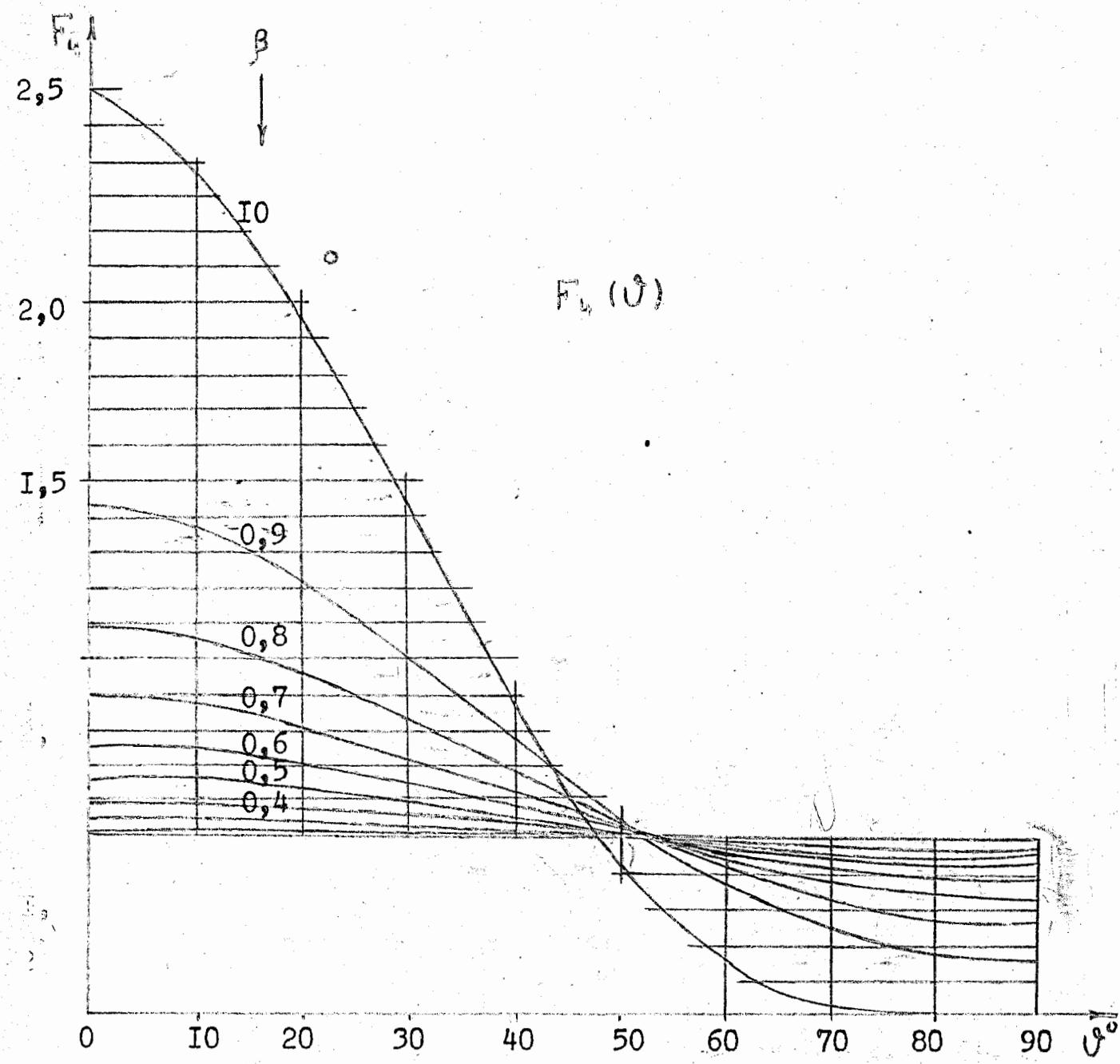


Рис.4

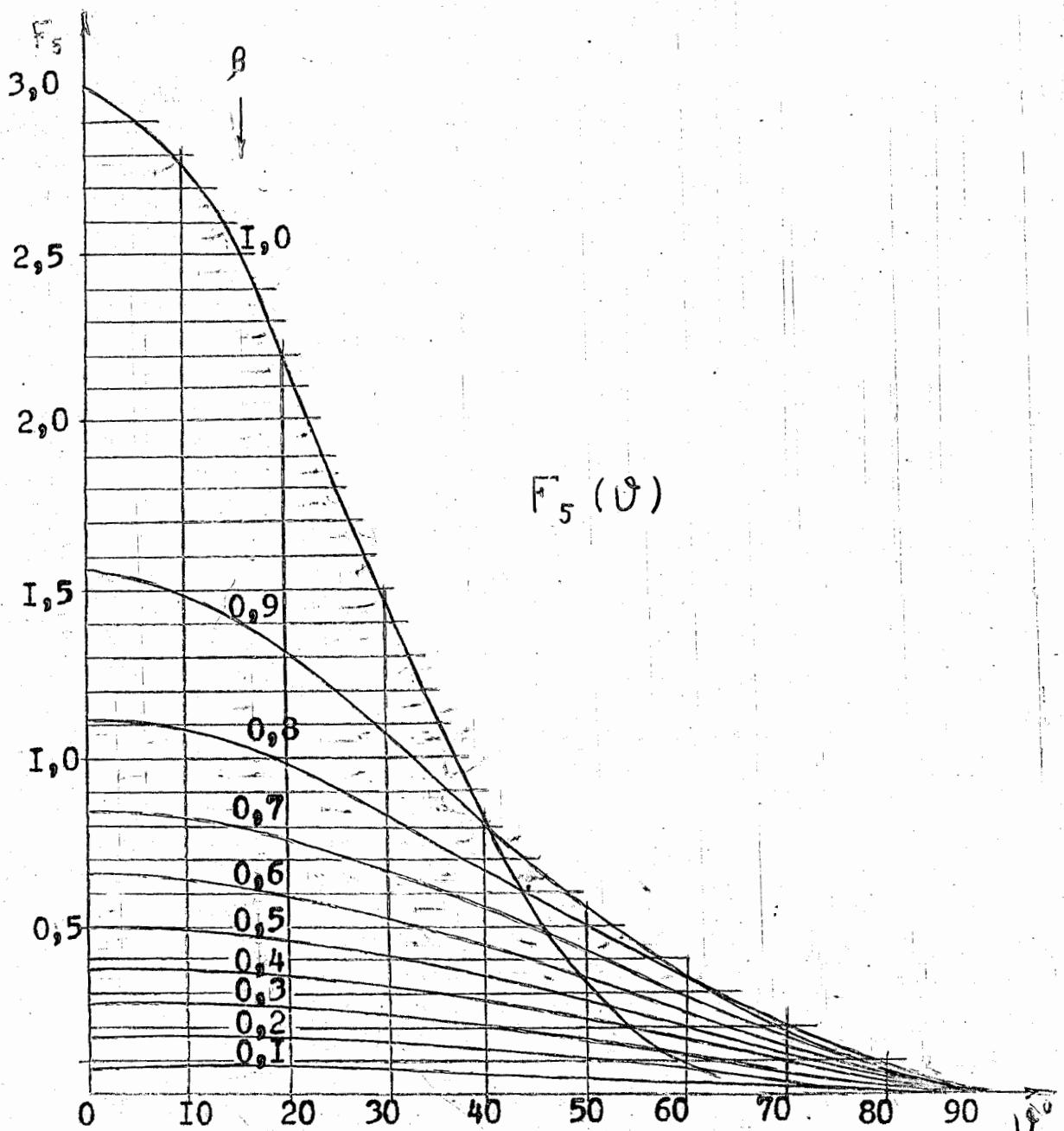


Рис. 5

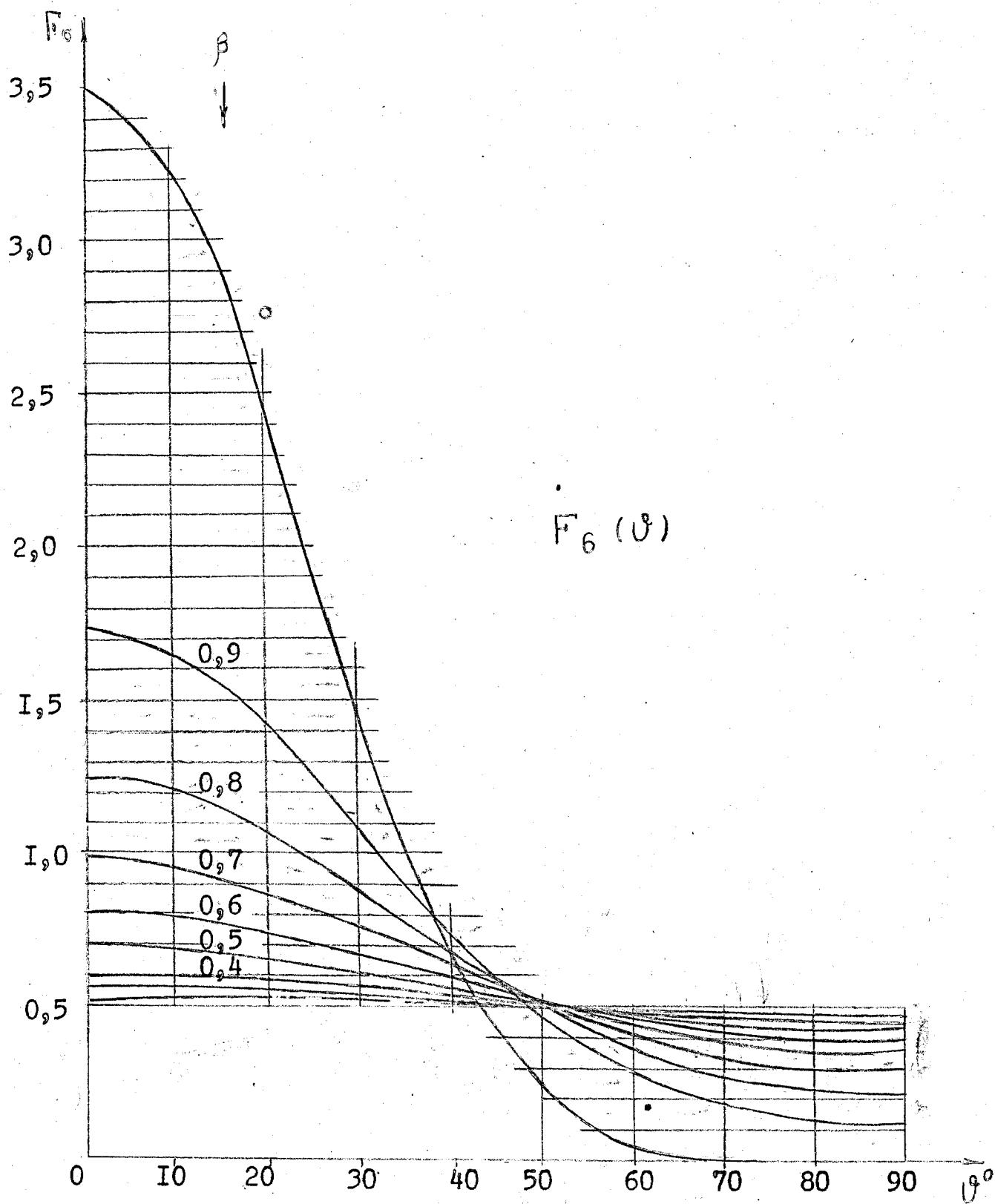
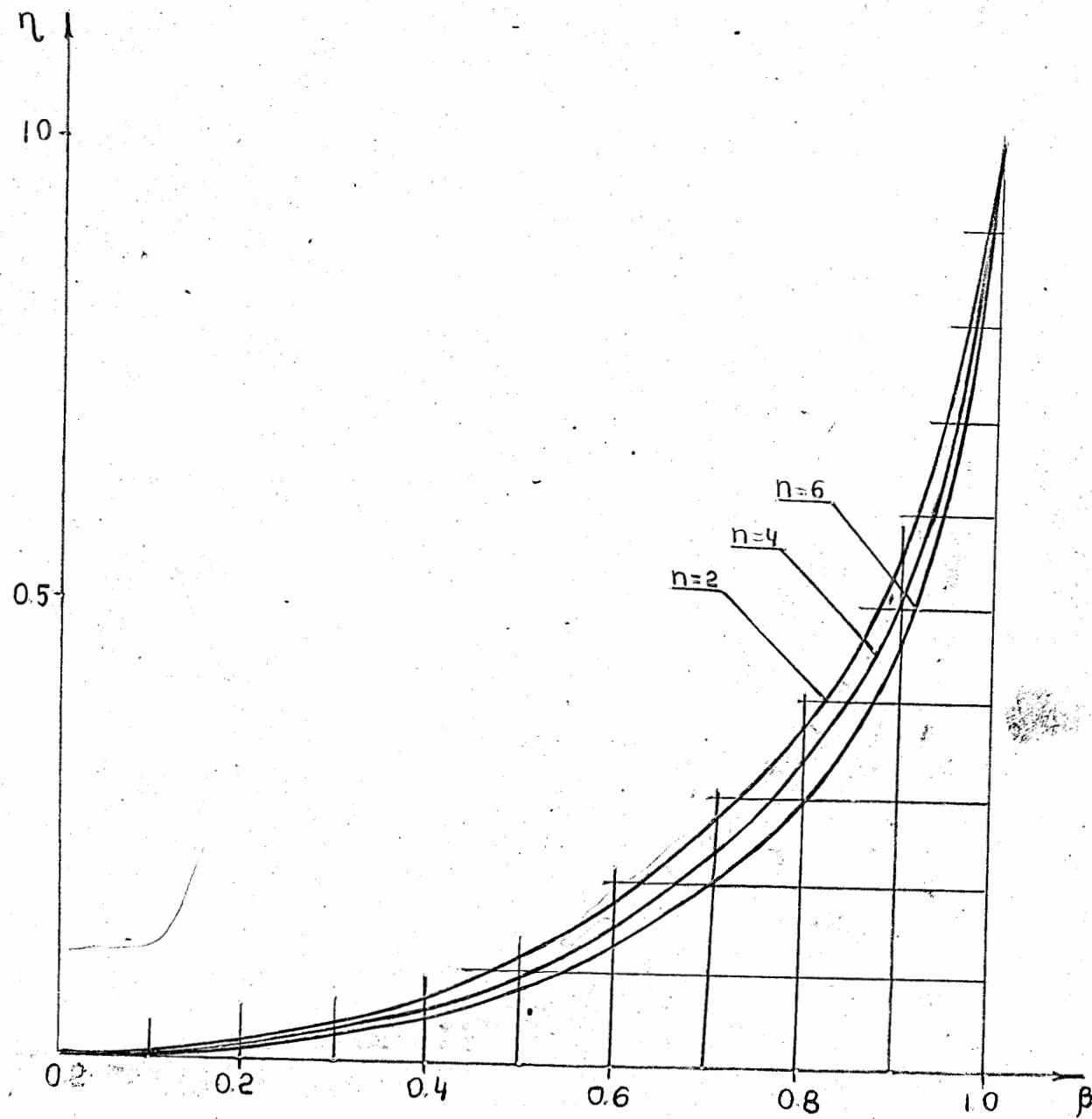


Рис.6



PUC. 7

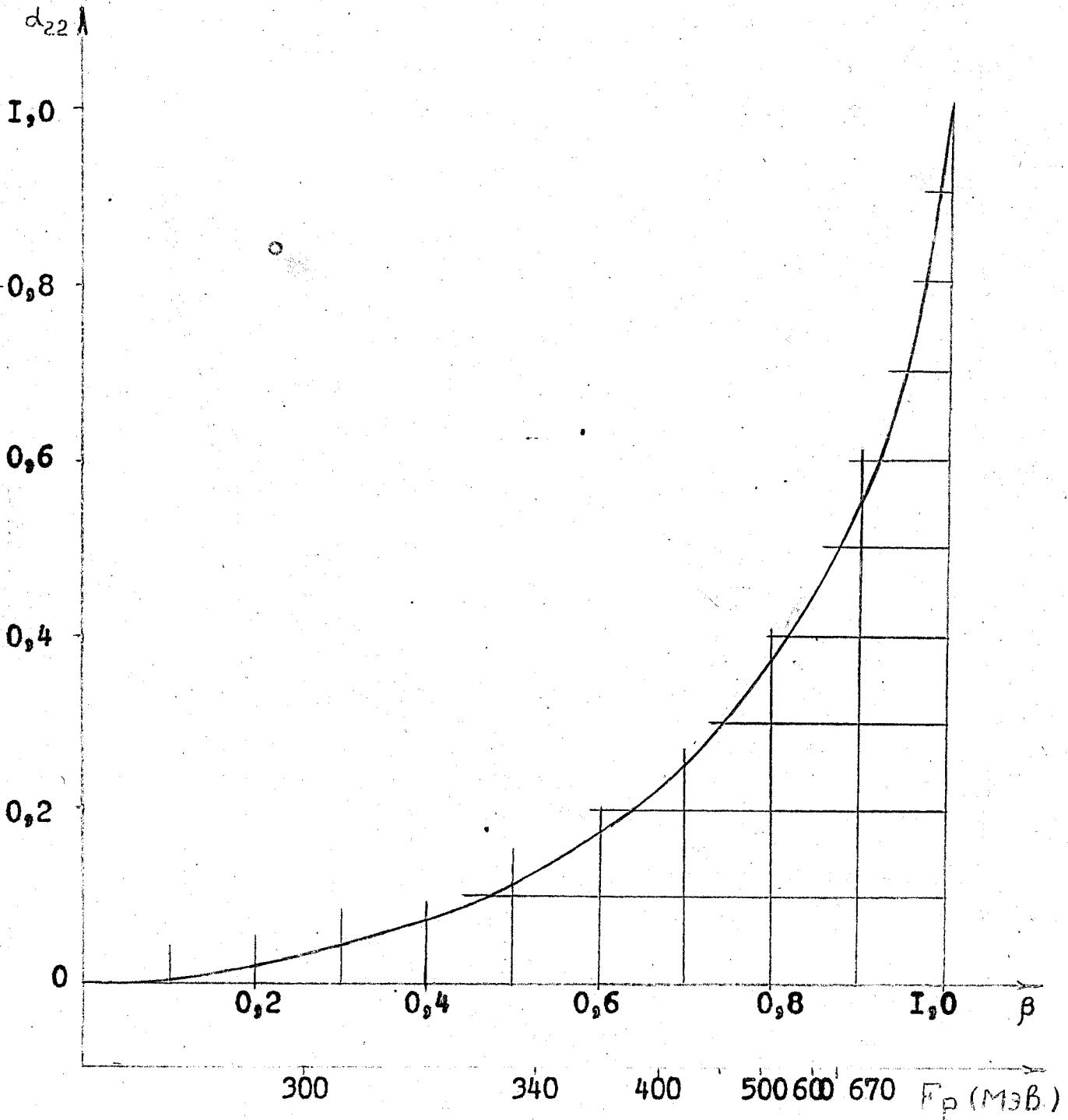


Fig. 8