ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Р-449

В.С.Владимиров

О ДВОЙНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ДИАГРАММЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Дубна 1959 год

Р - 449

В.С. Владимиров

О ДВОЙНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ДИАГРАММЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

1. В недавних работах Мандельштама [1] и Тарского [2] было установлено, что амплитуда Фейнмана $\mathcal{F}$, соответствующая общей диаграмме четвертого порядка /рис. 1/ и рассматриваемая как функция двух инвариантов $s=(p_1+p_2)^2$ и $t=(p_1+p_3)^2$, допускает двойное спектральное представление вида

$$\mathcal{F}(s,t)=\int_{\ell_1}^{\infty}\int_{\ell_2}^{\infty}\frac{\rho(s',t')\,ds'dt'}{(s'-s)(t'-t)}, \qquad /1.1/$$

где спектральная функция ρ и пороги ℓ_1 и ℓ_2 - вещественны.

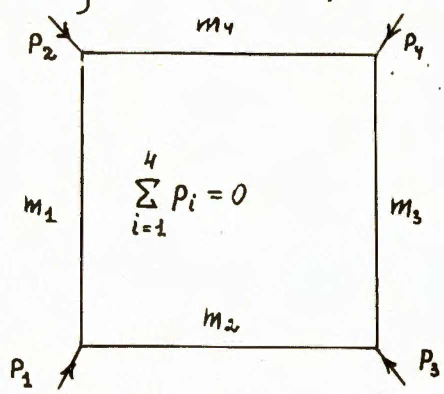

Рис. 1.

Другими словами, функция $\mathcal{F}(s,t)$ допускает аналитическое[x/] продолжение на комплексные значения s и t, причем областью аналитичности является произведение двух плоскостей комплексных переменных s и t с выключенными разрезами вдоль вещественных осей соответственно: $\mathrm{Re}\,s \geq \ell_1$, $\mathrm{Re}\,t \geq \ell_2$ [xx/]; кроме того, продолженная функция должна стремиться к нулю при приближении к бесконечно удаленным точкам, причем это стремление должно быть равномерным во всякой области, отстоящей от разрезов не меньше, чем на δ при любом $\delta>0$/не медленнее, чем $(SH^{-\alpha}, \alpha>0)/$.

---

x/ Под аналитичностью мы понимаем однозначность и голоморфность.

xx/ Область указанного вида рассматривается, конечно, на том листе римановой поверхности продолженной функции $\mathcal{F}$, где она принимает положительные значения при $s<\ell_1$ и $t<\ell_2$. Такие области в физической литературе иногда называют физическими листами.

В методе Мандельштама [1] явно вычислялась мнимая часть амплитуды $\mathcal{F}$, после чего аналитические свойства последней усматривались непосредственно. Им получено также явное выражение для спектральной функции ρ и приведены ограничения на массы, при которых представление /1.1/ имеет место.

Другим методом представление /1.1/ было доказано в работе Тарского [2] при тех же ограничениях на массы, что и у Мандельштама. Тарский, исходя из параметрического представления амплитуды Фейнмана, изучает структуру её /комплексных/ особенностей. При этом он опирается на результаты работы Карплюса, Зоммерфильда и Уичмена [3], где исследованы вещественные особенности функции $\mathcal{F}$. Оказывается, что при упомянутых выше ограничениях на массы, функция $\mathcal{F}$ аналитична на физическом листе. Поэтому для получения представления /1.1/ в этом случае остается дважды применить теорему Коши. В этой схеме доказывается существование спектральной функции ρ; ее явное аналитическое выражение не вычисляется.

В этой работе, на основе параметрического представления амплитуды $\mathcal{F}$, другим путем выводится представление /1.1/ и вычисляется соответствующая спектральная функция. Для этого при массовых переменных $\xi_i > 1$ /см.ниже формулу /2.3// исследуются аналитические свойства мнимой части амплитуды относительно одной из комплексных переменных, в то время как другая остается вещественной, и устанавливается представление /1.1/ в этом случае. Далее производится аналитическое продолжение равенства /1.1/ по массовым переменным. Это продолжение можно, однако, осуществить лишь в некоторой области переменных ξ_i, определенной неравенствами /2.5/ и /2.7/. Эта область совпадает с областью, найденной ранее Мандельштамом [1] и Тарским [2].

2. Амплитуда Фейнмана для диаграммы четвертого порядка /рис. 1/ с точностью до постоянного множителя приводится к интегралу вида /см. [3] /:

$$\mathcal{F}(x,y;\xi_i)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\,d\alpha_4}{\mathcal{D}_1^2} \qquad /2.1/$$

x/ Как известно, амплитуда рассеяния допускает аналитическое продолжение, полиномиально ограниченное на бесконечности. В этом случае представление /1.1/ претерпевает соответствующее изменение.

где

$$D_1 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2 + 2\alpha_1\alpha_2\xi_1 + 2\alpha_1\alpha_3 y + 2\alpha_2\alpha_3\xi_3 + 2\alpha_4\left(\alpha_1\xi_2 + \alpha_2 x + \alpha_3\xi_4\right), \qquad /2.2/$$

$$\xi_1 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - p_1^2}{2m_1m_2}, \quad \xi_2 = \frac{m_1^2 + m_4^2 - p_2^2}{2m_1m_4}, \quad \xi_3 = \frac{m_2^2 + m_3^2 - p_3^2}{2m_2m_3}, \quad \xi_4 = \frac{m_3^2 + m_4^2 - p_4^2}{2m_3m_4}, \qquad /2.3/$$

$$x = \frac{m_2^2 + m_4^2 - (p_1 + p_2)^2}{2m_2m_4}, \quad y = \frac{m_1^2 + m_3^2 - (p_1 + p_3)^2}{2m_1m_3} \qquad /2.4/$$

Переменные x и y линейно выражаются через s и t.

Предполагаем, что массы удовлетворяют условиям устойчивости

$$\xi_i > -1, \quad i = 1,2,3,4. \qquad /2.5/$$

<u>Теорема.</u> При условиях /2.5/ функция $\mathcal{F}$ имеет двойное спектральное представление

$$\mathcal{F}(x,y;\xi_i) = \frac{1}{2}\iint_D \frac{dx'dy'}{(x'-x)(y'-y)\sqrt{K(x',y';\xi_i)}} \qquad /2.6/$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие: либо одно из чисел ξ_i больше единицы, либо,— в противном случае, когда все эти числа меньше единицы, — они удовлетворяют неравенству

$$\theta \le 2\pi, \qquad /2.7/$$

где $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, $\theta_i = \arccos \xi_i$, $0 \le \theta_i \le \pi$.

В /2.6/ функция K задается формулой

$$K(x,y;\xi_i) = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & y & \xi_2 \\ \xi_1 & 1 & \xi_3 & x \\ y & \xi_3 & 1 & \xi_4 \\ \xi_2 & x & \xi_4 & 1 \end{vmatrix} = \qquad /2.8/$$

$$= x^2y^2 - x^2 - y^2 - 2xy\alpha + 2x\beta + 2y\gamma + \delta,$$

где

$$\alpha = \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3, \quad \beta = \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4, \quad \gamma = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4$$ /2.9/

$$\delta = 1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 + (\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3)^2.$$

Область интегрирования $\mathcal{D}$ в /2.6/ ограничена той ветвью кривой $\mathcal{K}(x',y';\xi_i)=0$, которая заключена между касательными $x'=\mathcal{L}_1,\ y'=\mathcal{L}_2$ /см.рис. 4,5 и 6/:

$$\mathcal{D}: \quad \mathcal{K}(x',y';\xi_i) \geq 0, \quad x' \leq \mathcal{L}_1, \quad y' \leq \mathcal{L}_2,$$ /2.10/

где пороги $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ определяются формулами

$$\mathcal{L}_1 = \max\left[\mathcal{L}(\xi_1,\xi_2), \mathcal{L}(\xi_3,\xi_4)\right], \quad \mathcal{L}_2 = \max\left[\mathcal{L}(\xi_1,\xi_3)\, \mathcal{L}(\xi_2,\xi_4)\right]$$ / 2.11/

$$\mathcal{L}(\xi_i,\xi_j) = \begin{cases} -1 & \text{если } \xi_i+\xi_j > 0 \\ \cos(\theta_i+\theta_j) & \text{если } \xi_i+\xi_j < 0. \end{cases}$$ /2.12/

Функция $\mathcal{F}(x,y;\xi_i)$ аналитична в области $\tilde{G}$, состоящей из следующих точек: комплексные переменные x и y пробегают соответствующие плоскости с разрезами

$$\operatorname{Im} x = 0, \quad \operatorname{Re} x \leq \mathcal{L}_1; \quad \operatorname{Im} y = 0, \quad \operatorname{Re} y \leq \mathcal{L}_2,$$ /2.13/

а точки (ξ_i) пробегают вещественную[x/] область G, определяемую неравенствами:

$$G: \quad \xi_i > -1, \quad \theta < 2\pi.$$ /2.14/

3. Докажем сформулированные в п.2 утверждения.

---

x/ Следовательно, аналитичность имеет место и в некоторой комплексной окрестности области G.

Выражение /2.1./ для функции $\mathcal{F}$ можно записать в виде:

$$\mathcal{F}(x, y; \xi_i) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}_\lambda(x, y; \xi_i)\Big/_{\lambda = 1+0}, \qquad /3.1/$$

где функция $\mathcal{F}_\lambda$ определена при всех $\lambda \geq 1$ формулой

$$\mathcal{F}_\lambda(x, y; \xi) = \int_{T_3}\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3}{\mathcal{D}_\lambda}, \qquad /3.2/$$

где

$$\mathcal{D}_\lambda(x, y; \alpha_i) = \lambda + 2\alpha_1\alpha_2(\xi_1 - 1) + 2\alpha_1\alpha_3(y - 1) + 2\alpha_2\alpha_3(\xi_3 - 1) + \qquad /3.3/$$

$$+ 2(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\left[\alpha_1(\xi_2 - 1) + \alpha_2(x - 1) + \alpha_3(\xi_4 - 1)\right].$$

Через T_n мы будем обозначать единичный симплекс в n -мерном пространстве,

$$T_n: \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq 1, \ \alpha_i \geq 0.$$

Будем теперь считать, что y и ξ_i фиксированы и удовлетворяют неравенствам

$$y > 1, \ \xi_i > 1, \ i = 1, \ldots, 4. \qquad /3.4/$$

Тогда при всех $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ из T_3 функция $\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x, y; \alpha_i)$ аналитична в плоскости комплексного переменного x с выключенным разрезом вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, x \leq 1 - 2\lambda$.

Действительно, $\mathcal{D}_\lambda \neq 0$, если только x невещественно, и $\mathcal{D}_\lambda > 0$ при $x > -\lambda$; последнее утверждение следует из неравенств /3.4/, в силу которых

$$\mathcal{D}_\lambda > \lambda - 4\lambda(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\alpha_2 \geq 0.$$

Отсюда, с помощью теорем Морера и Фубини следует аналитичность функции $\mathcal{F}_\lambda$ в той же разрезанной x -плоскости /на том листе римановой поверхности, где она принимает положительные значения при $x > 1 - 2\lambda$ /.

Для всех ε, $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{4}$, введем последовательность $\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}$ аналитических функций в разрезанной x - плоскости,

$$\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}(x, y; \xi_i) = \int_{T_{3,\varepsilon}}\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3}{\mathcal{D}_\lambda}, \qquad /3.5/$$

где $T_{3,\varepsilon}$ - множество точек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ из T_3, удовлетворяющих неравенству $\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \geq \varepsilon$. Ясно, что при $\varepsilon \to +0$

$$\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}(x,y;\xi_i) \to \mathcal{F}_\lambda(x,y;\xi_i) \qquad /3.6/$$

равномерно во всякой замкнутой области разрезанной x -плоскости.

Наконец, при всех $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ из $T_{3,\varepsilon}$ имеет место оценка

$$\frac{1}{|\mathcal{D}_\lambda(x,y;\alpha_i)|} < \frac{c_\lambda(\varepsilon, \delta_1, y)}{1+|x|}, \qquad /3.7\ /$$

всякий раз, когда точка x удалена от линии разреза не меньше чем на δ_1 при любом $\delta_1 > 0$ /см.рис. 2/.

Считая $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in T_{3,\varepsilon}$, применим к функции $\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x,y;\alpha_i)$ теорему Коши, выбрав в качестве контура интегрирования линию Γ /рис. 2/

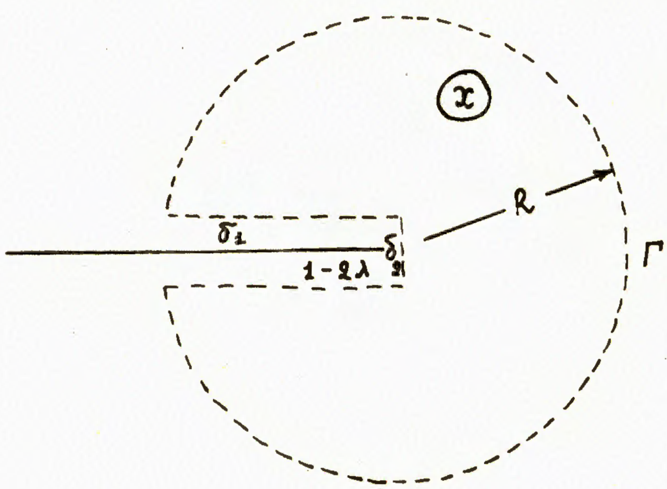

Рис. 2.

Если теперь устремить R к ∞, то, в силу /3.7/, интеграл по криволинейной части пути будет стремиться к нулю. Таким образом, получим

$$\frac{1}{D_\lambda(x,y;\alpha_i)} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{d\tau}{(1-2\lambda+\delta_2+i\tau-x)D_\lambda(1-2\lambda+\delta_2+i\tau, y;\alpha_i)} - \qquad /3.8/$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{1-2\lambda+\delta_2}^{1-2\lambda+2\delta_2} \left[\frac{1}{(x'+i\delta_1-x)D_\lambda(x'+i\delta_1,y;\alpha_i)} - \frac{1}{(x'-i\delta_1-x)D_\lambda(x'-i\delta_1,y;\alpha_i)}\right]\zeta(x')dx' +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\zeta(x')}{(x'+i\delta_1-x)D_\lambda(x'+i\delta_1,y;\alpha_i)} - \frac{\zeta(x')}{(x'-i\delta_1-x)D_\lambda(x'-i\delta_1,y;\alpha_i)}\right]dx',$$

где $\zeta(x')$ - непрерывная функция, равная 1 при $x'<1-2\lambda+\delta_2$ и равная 0 при $x'>1-2\lambda+2\delta_2$ / $\delta_2>0$ любое/.

Первый и второй интегралы в /3.8/ стремятся к нулю при $\delta_1\to 0$ в силу аналитичности функции $D_\lambda^{-1}(x',y;\alpha_i)$ при $x'>1-2\lambda$. Вычислим предел третьего интеграла в /3.8/ при $\delta_1\to+0$. Отметим предварительно, что равномерно по $x', -\infty<x'<\infty$,

$$\frac{\zeta(x')}{x'\pm i\delta_1-x} \longrightarrow \frac{\zeta(x')}{x'-x}, \qquad \text{при } \delta_1\longrightarrow 0. \qquad /3.9/$$

Кроме того, учитывая предположение $\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\geq\varepsilon$, при $\delta_1\to+0$ имеем

$$\frac{1}{D_\lambda(x'\pm i\delta_1,y;\alpha_i)} = \frac{1}{D_\lambda(x',y;\alpha_i)\pm i\delta_1\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)} \to \mp i\pi\delta\left[D_\lambda(x',y;\alpha_i)\right] + \qquad /3.10/$$

$$+\mathcal{P}\frac{1}{D_\lambda(x',y;\alpha_i)},$$

причем стремление к пределу происходит в смысле слабой сходимости.

Устремим в /3.8/ δ_1 к $+0$ и воспользуемся предельными соотношениями /3.9/ и /3.10/. Устремляя, далее, δ_2 к $+0$ и пользуясь определением функции ζ, получим

$$\frac{1}{D_\lambda(x,y;\alpha_i)} = -\int_{-\infty}^{1-2\lambda+0} \delta\left[D_\lambda(x',y;\alpha_i)\right]\frac{dx'}{x'-x}; \qquad /3.11/$$

причем последний интеграл необходимо интерпретировать как значение функционала δ на соответствующей основной функции.

Проинтегрируем равенство /3.11/ по области $T_{3,\varepsilon}$ и устремим $\varepsilon \to +0$. Используя соотношения /3.5/ и /3.6/, выводим

$$\mathcal{F}_\lambda(x,y;\xi_i) = -\int_{T_3} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \int_{-\infty}^{1-2\lambda+0} \delta\left[\mathcal{D}_\lambda(x',y;\alpha_i)\right] \frac{dx'}{x'-x} \qquad /3.12/$$

"Меняя" порядок интегрирования в /3.12/, наконец, получим

$$\mathcal{F}_\lambda(x,y;\xi_i) = \int_{-\infty}^{1-2\lambda+0} \Delta\mathcal{F}_\lambda(x',y)\frac{dx'}{x'-x}, \qquad /3.13/$$

где

$$\Delta\mathcal{F}_\lambda(x',y) = -\int_{T_3} \delta\left[\mathcal{D}_\lambda(x',y;\alpha_i)\right] d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 . \qquad /3.14/$$

Функция $\Delta\mathcal{F}_\lambda$ отличается лишь множителем π от мнимой части $\mathcal{F}_\lambda$.

4. Вычислим функцию $\Delta\mathcal{F}_\lambda$ при следующих предположениях:

$$x' \le 1-2\lambda,\quad y > 1+\left(\sqrt{\xi_2-1}+\sqrt{\xi_4-1}\right)^2,\quad \xi_i > 1,\ i=1,\dots,4. \qquad /4.1/$$

Используя /3.3/, представим $\mathcal{D}_\lambda$ в виде:

$$\mathcal{D}_\lambda(x',y;\alpha_i) = c_3\alpha_3^2 + 2b_3\alpha_3 + a_3, \qquad /4.2/$$

где

$$a_3 = \lambda + 2\alpha_1\alpha_2(\xi_1-1) + 2(1-\alpha_1-\alpha_2)\left[\alpha_1(\xi_2-1)+\alpha_2(x'-1)\right],$$
$$b_3 = (1-\alpha_1-\alpha_2)(\xi_4-1)+\alpha_1(y-\xi_2)+\alpha_2(\xi_3-x'),\quad c_3 = -2(\xi_4-1). \qquad /4.3/$$

<u>Лемма 1.</u> При предположениях /4.1/ $\mathcal{D}_\lambda > 0$ в той части T_3, где $a_3 > 0$ /рис. 3/. Если же $a_3 \le 0$, то $\mathcal{D}_\lambda$ обращается в нуль на поверхности $\alpha_3 = \alpha_3^+$, где использовано обозначение

$$\alpha_3^\pm = \frac{1}{c_3}\left(-b_3 \pm \sqrt{b_3^2 - c_3 a_3}\right). \qquad /4.4/$$

Для доказательства леммы предварительно отметим неравенства

$$c_3 < 0,\quad b_3 > 0,\quad b_3^2 - c_3 a_3 > 0 \qquad /4.5/$$

при всех (α_1, α_2) из T_2 . Первые два неравенства в /4.5/ вытекают из /4.1/. Третье из неравенств /4.5/ следует из неравенств

$$b_3^2 - c_3 a_3 \Big/_{\alpha_1=0} = \left[(1-\alpha_2)(\xi_4-1) + \alpha_2(x'+\xi_3-2)\right]^2 + 2\lambda(\xi_4-1) - 4\alpha_2^2(\xi_3-1)(x'-1) > 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(b_3^2 - c_3 a_3\right)\Big/_{\alpha_1=0} = b_3(y-\xi_2-\xi_4+1) - c_3\left[(1-\alpha_2)(\xi_2-1) + \alpha_2(\xi_1-x')\right] > 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\left(b_3^2 - c_3 a_3\right)\Big/_{\alpha_1=0} = \left[y-1-\left(\sqrt{\xi_2-1}+\sqrt{\xi_4-1}\right)^2\right]$$

$$\left[y-1-\left(\sqrt{\xi_2-1}-\sqrt{\xi_4-1}\right)^2\right] > 0.$$

Таким образом, оба корня $\alpha_3^{\pm}$ вещественны.

Принимая во внимание неравенство

$$\sqrt{b_3^2 - c_3 a_3} \equiv \sqrt{b_3'^2 - c_3 a_3'} > |b_3'|, \qquad /4.6/$$

где

$$a_3' = \lambda + 2\alpha_1\alpha_2(\xi_1-1) + 2(1-\alpha_1-\alpha_2)\left[\alpha_1(y-1)+\alpha_2(\xi_3-1)\right] > 0$$

$$b_3' = (1-\alpha_1-\alpha_2)(\xi_4-1) + \alpha_1(\xi_2-y) + \alpha_2(x^1-\xi_3),$$

заключаем, что корень α_3^- удовлетворяет неравенству $\alpha_3^- > 1-\alpha_1-\alpha_2$. При $a_3 > 0$ корень α_3^+ отрицательный. Только при $a_3 \leq 0$ корень α_3^+ неотрицательный и удовлетворяет неравенству $\alpha_3^+ < 1-\alpha_1-\alpha_2$. Последнее неравенство опять следует из /4.6/. Лемма доказана.

В силу леммы 1, из /3.14/ и /4.2/ получаем

$$\Delta F_\lambda(x^1, y) = -\int\limits_{T_2} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int\limits_0^{1-\alpha_1-\alpha_2} \delta\left(c_3\alpha_3^2 + 2b_3\alpha_3 + a_3\right) d\alpha_3 = \qquad /4.7/$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{T_2 \cap (a_3 \leq 0)} \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{\sqrt{b_3^2 - c_3 a_3}} .$$

Область интегрирования $T_2 \cap (a_3 \leq 0)$ заштрихована на рис. 3. Эта область определяется следующими неравенствами:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^0 , \quad \alpha_2^- \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^+ , \tag{4.8}$$

где $\alpha_2^\pm$ корни уравнения $a_3 = 0$,

$$\alpha_2^\pm = \frac{1}{2(1-x')} \left[(1-\alpha_1)(1-x') + \alpha_1 (\xi_2 - \xi) \pm \sqrt{d} \right] , \tag{4.9}$$

$$d = \left[(1-\alpha_1)(1-x') + \alpha_1 (\xi_2 - \xi_1) \right]^2 + 2\lambda (x'-1) + 4\alpha_1 (1-\alpha_1)(x'-1)(\xi_2 - 1) \tag{4.10}$$

и α_1^0 наименьший корень уравнения $d = 0$

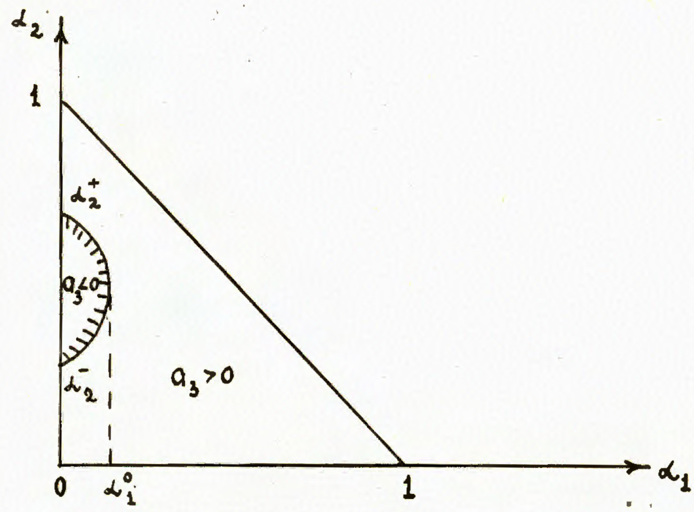

Рис. 3.

5. Вычислим интеграл /4.7/. Принимая во внимание /4.3/, запишем

$$b_3^2 - c_3 a_3 = c_2 \alpha_2^2 + 2 b_2 \alpha_2 + a_2 , \tag{5.1}$$

где

$$a_2 = \left[(1-\alpha_1)(\xi_1 - 1) + \alpha_1 (y - \xi_2) \right]^2 + 2\lambda (\xi_1 - 1) + 4\alpha_1 (1-\alpha_1)(\xi_2 - 1)(\xi_1 - 1) > 0 , \tag{5.2}$$

$$b_2=\left(\xi_3-\xi_4-x'+1\right)\left[\left(1-\alpha_1\right)\left(\xi_4-1\right)+\alpha_1\left(y-\xi_2\right)\right]+2\left(\xi_4-1\right)\left[\left(1-\alpha_1\right)\left(x'-1\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha_1\left(\xi_1-\xi_2\right)\right], \qquad /5.3/$$

$$c_2=\left(\xi_3-\xi_4-x'+1\right)^2-4\left(x'-1\right)\left(\xi_4-1\right)>0. \qquad /5.4/$$

Теперь, используя /5.1/ , получим

$$\Delta \mathcal{F}_\lambda\left(x',y\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{\alpha_1^0} d\alpha_1\int_{\alpha_2^-}^{\alpha_2^+}\frac{d\alpha_2}{\sqrt{c_2\alpha_2^2+2b_2\alpha_2+a_2}}=\frac{-1}{2\sqrt{c_2}}\int_0^{\alpha_1^0} ln\frac{\sqrt{c_2}\,b_3(\alpha_2^+)+c_2\alpha_2^++b_2}{\sqrt{c_2}\,b_3(\alpha_2^-)+c_2\alpha_2^-+b_2}d\alpha_1 \qquad /5.5/$$

Продифференцируем выражение /3.13/ по λ и подставим $\lambda=1+0$. Так как $\alpha_1^0=0$ и $\alpha_2^+=\alpha_2^-=1/2$ при $\lambda=1+0$ и $x'=-1$, то на основании /3.1/ и /5.5/ будем иметь

$$\mathcal{F}\left(x,y;\xi_i\right)=\int_{-\infty}^{-1+0}\Delta\mathcal{F}\left(x',y\right)\frac{dx'}{x'-x}, \qquad /5.6/$$

где

$$\Delta\mathcal{F}\left(x',y\right)=\frac{1}{2\sqrt{c_2}}\int_0^{\alpha_1^0}\frac{\partial}{\partial\lambda}ln\frac{\sqrt{c_2}\,b_3\left(\alpha_2^+\right)+c_2\alpha_2^++b_2}{\sqrt{c_2}\,b_3\left(\alpha_2^-\right)+c_2\alpha_2^-+b_2}\Bigg|_{\lambda=1+0}d\alpha_1. \qquad /5.7/$$

Формула /5.6/ справедлива при всех комплексных x , лежащих вне разреза

$$\mathcal{I}m\,x=0\,,\quad Re\,x\leqslant-1\,. \qquad /5.8/$$

Используя /4.3/, /4.9/, /5.2/-/5.4/, подсчитаем подинтегральное выражение в /5.7/. После сокращений получим

$$\Delta\mathcal{F}\left(x',y\right)=-\int_0^{\alpha_1^0}\frac{\left(x'-1\right)f\left(x',y,\alpha_1\right)d\alpha_1}{\left[f^2\left(x',y,\alpha_1\right)-c_2\left(x'\right)d\left(x',\alpha_1\right)\right]\sqrt{d\left(x',\alpha_1\right)}}, \qquad /5.9/$$

где c_2 и d определены формулами /5.4/ и /4.10/ соответственно и

$$f=\left(\xi_3-\xi_4-x'+1\right)\left[\left(1-\alpha_1\right)\left(x'-1\right)+\alpha_1\left(\xi_1-\xi_2\right)\right]+2\left(x'-1\right)\left[\left(1-\alpha_1\right)\left(\xi_4-1\right)+\alpha_1\left(y-\xi_2\right)\right]. \qquad /5.10/$$

Имеет место тождество

$$\frac{f^2-c_2 d}{2(x'-1)} \equiv \frac{b_2^2-c_2 a_2}{2(\xi_4-1)} = c_1 \alpha_1^2 + 2 b_1 \alpha_1 + a_1, \qquad /5.11/$$

где

$$a_1 = 2(x'-1)(\xi_3-1)(\xi_4-1)-c_2<0 \qquad /5.12/$$

$$b_1 = (x'-1)(y-\xi_2-\xi_4+1)(\xi_3+\xi_4-x'-1)-(\xi_4-1)(x'+\xi_2-\xi_1-1)(\xi_3-\xi_4+x'-1)- - c_2(\xi_2-1), \qquad /5.13/$$

$$\frac{1}{2}c_1 = (\xi_4-1)(x'+\xi_2-\xi_1-1)^2+(x'-1)(y-\xi_2-\xi_4+1)^2- - (\xi_3-\xi_4-x'+1)(x'+\xi_2-\xi_1-1)(y-\xi_2-\xi_4+1)+c_2(\xi_2-1). \qquad /5.14/$$

Из /4.2/, /5.1/ и /5.11/ следует соотношение[x/]

$$b_1^2-c_1 a_1 = c_2 \mathcal{K}, \qquad /5.15/$$

где функция $\mathcal{K}$ определена формулой /2.8/.

6. Исследуем аналитические свойства функции $\Delta\mathcal{F}(x',y)$ относительно переменной y. Мы по-прежнему считаем, что x' и ξ_i удовлетворяют неравенствам /4.1/: $x'\leq -1$, $\xi_i>1$.

Обозначим через $y^{\pm}(x')$, $y^-\leq y^+$, вещественные корни уравнения

$$\mathcal{K}(x',y;\xi_i)=0. \qquad /6.1/$$

Ниже, при доказательстве леммы 2, будет видно, что при $x'<-1$ эти корни всегда вещественны.

Имеет место

<u>Лемма 2.</u> Пусть $x'<-1$. Если $y>\bar{y}$, то уравнения

$$f(x',y,\alpha_1) \pm \sqrt{c_2(x')d(x',\alpha_1)} = 0 \qquad /6.2/$$

x/ Проще всего соотношение /5.15/ можно получить, если воспользоваться одной алгебраической леммой, касающейся квадратичных форм /см.например, Тарский [2], лемма 1В /.

не имеют корней в промежутке $[0,\alpha_1^\circ]$; если же $y<\bar{y}$, то эти уравнения имеют только по одному корню $\alpha_1^\pm$ в промежутке $[0,\alpha_1^\circ]$,

$$\alpha_1^\pm=\frac{1}{c_1}\left(-b_1\pm\sqrt{b_1^2-c_1a_1}\right).$$

Доказательство. Принимая во внимание /5.11/, заключаем, что уравнение

$$f^2-c_2d=0 \qquad /6.3/$$

имеет корни $\alpha_1^\pm$. Так как $f^2-c_2d=2a_1(x'-1)>0$ при $\alpha_1=0$ и $f^2-c_2d=f^2\geq 0$ при $\alpha_1=\alpha_1^\circ$, то в интервале $[0,\alpha_1^\circ]$ может быть либо два, либо ни одного корня $\alpha_1^\pm$.

Из /5.12/ - /5.14/ выводим при $|y|\to\infty$ асимптотические равенства

$$b_1^2-a_1c_1=O\left[y^2(x'^2-1)c_2\right]>0, \qquad /6.4/$$

$$\alpha_1^\pm=O\left\{\frac{1}{2y}\left[1+x'-\xi_3-\xi_7\mp \operatorname{sign} y\sqrt{(1+x'-\xi_3-\xi_7)^2+\frac{2a_1}{1-x'^2}}\right]\right\}. \qquad /6.5/$$

Приняв еще во внимание неравенство /5.12/, $a_1<0$, заключаем отсюда, что $\alpha_1^\pm$ принадлежит промежутку $[0,\alpha_1^\circ]$, если $y\to-\infty$. Так как, в силу /5.10/ и /5.11/,

$$f^2-c_2d=2a_1(x'-1)>0,\ f=(x'-1)(\xi_3+\xi_7-x'-1)<0 \qquad \text{при} \quad \alpha_1=0$$

то всегда

$$f\pm\sqrt{c_2d}<0\ ,\ \alpha_1=0. \qquad /6.6/$$

Кроме того, f положительно при $y\to-\infty$. Таким образом , при $y\to-\infty$

$$f\pm\sqrt{c_2d}=f>0,\ \alpha_1=\alpha_1^\circ. \qquad /6.7/$$

Неравенства /6.6/ и /6.7/ показывают, что уравнения /6.2/ при $y\to-\infty$ имеют только по одному корню в промежутке $[0,\alpha_1^\circ]$, причем уравнение $f+\sqrt{c_2d}=0$ имеет своим корнем меньшее число α_1^+ , а уравнение $f-\sqrt{c_2d}=0$ имеет своим корнем большее число α_1^- .

Эта ситуация сохранится при всех $y \le y^-(x')$ [x], где y^- меньший из /двух/ корней уравнения $b_1^2 - c_1 a_1 = 0$, т.е. в силу /5.15/ уравнения /6.1/. Действительно, так как при $y < y^-$ корни $\alpha_1^\pm$ различны, то, при допущении противного, возникло бы такое положение, когда один из этих корней еще останется в промежутке $[0, \alpha_1^0]$, в то время как другой уже вышел из него. Это положение, как отмечалось выше, не может иметь места.

При $y^- < y < y^+$ оба корня $\alpha_1^\pm$ комплексны. При $y \ge y^+$ оба корня $\alpha_1^\pm$ отрицательны, так как, в силу /6.5/, они отрицательны при $y \to +\infty$, а, в силу $a_1 < 0$, они не могут непрерывно перейти через нуль из отрицательной полуоси в положительную. Лемма доказана.

Изучим теперь аналитические свойства функции

$$g(x', y, \alpha_1) = \frac{2f(x', y, \alpha)}{f^2(x', y, \alpha_1) - c_2(x') d(x', \alpha_1)} \qquad /6.8/$$

по переменной y для всех $x' < 1$ и $0 \le \alpha_1 \le \alpha_1^0$.

Функция $g(x', y, \alpha_1)$ аналитична в плоскости комплексного переменного y с выключенным разрезом

$$\mathrm{Im}\, y = 0, \; \mathrm{Re}\, y \le y^-(x'). \qquad /6.9/$$

Ясно, что, в силу симметрии x и y в задаче, порог y^- при всех $x' < -1$ удовлетворяет неравенству

$$y^-(x') \le -1 \qquad /6.10/$$

.

/см. рис. 4 ; напомним, что пока массы удовлетворяют неравенствам $\xi_i > 1$ /.

Действительно, $f^2 - c_2 d \ne 0$, если y - невещественно.

---

[x] Такое $y = y^-$ непременно наступит; иначе при $y \to +\infty$ было бы $\alpha_1^\pm > 0$, что находится в противоречии с /6.5/, из которого следует $\alpha_1^\pm < 0$.

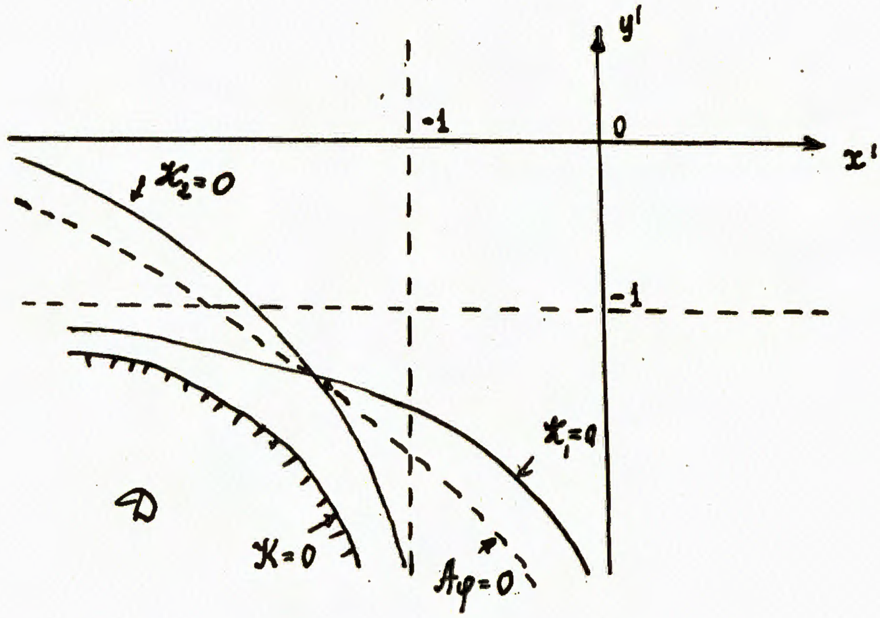

Рис. 4.

Для вещественных y достаточно воспользоваться леммой 2.

Отсюда следует аналитичность функции $\Delta\mathcal{F}(x',y)$ в той же разрезанной y -плоскости.

Наконец, из /6.8/ и /5.10/ при всех α_1, $0<\varepsilon\leq\alpha_1\leq\alpha_1^{\circ}$, следует такая оценка:

$$\left|g\left(x',y,\alpha_1\right)\right|<\frac{c\left(\varepsilon,\delta_1,x'\right)}{1+|y|} \qquad /6.11/$$

всякий раз, когда точка y удалена от линии разреза не меньше, чем на δ_1 при любом $\delta_1>0$.

7. Считая $\alpha_1\geq\varepsilon>0$, применим теорему Коши к функции $g(x',y,\alpha_1)$, выбрав в качестве контура интегрирования линию, аналогичную Γ /рис. 2/. Устремляя R к бесконечности и пользуясь /6.11/, получим

$$g(x',y,\alpha_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\frac{g(x',y^-+\delta_2+i\tau,\alpha_1)}{y^-+\delta_2+i\tau-y} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{y^-+\delta_2}^{y^-+2\delta_2}\left[\frac{g(x',y'+i\delta_1,\alpha_1)}{y'+i\delta_1-y} - \frac{g(x',y'-i\delta_1,\alpha_1)}{y'-i\delta_1-y}\right]\zeta(y')dy' + \qquad /7.1/$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{g(x',y'+i\delta_1,\alpha_1)\zeta(y')}{y'+i\delta_1-y} - \frac{g(x',y'-i\delta_1,\alpha_1)\zeta(y')}{y'-i\delta_1-y}\right]dy',$$

где $\zeta(y')$ - непрерывная функция, равная 1 при $y'<y^-+\delta_2$ и равная 0 при $y'>y^-+2\delta_2$; δ_2 - любое положительное число.

Принимая во внимание /6.1/, /5.10/ и предположение $\alpha_1 \geq \varepsilon$, имеем при $\delta_1 \to +0$

$$g(x',y'\pm i\delta_1,\alpha_1) = \frac{1}{f(x',y',\alpha_1)+\sqrt{c_2 d}\pm 2i\alpha_1(x'-1)\delta_1} + \qquad /7.2/$$

$$+\frac{1}{f(x',y',\alpha_1)-\sqrt{c_2 d}\pm 2i\alpha_1(x'-1)\delta_1} \longrightarrow \pm\pi i\delta\left(f+\sqrt{c_2 d}\right)\pm\pi i\delta\left(f-\sqrt{c_2 d}\right)+$$

$$+\mathcal{P}\frac{1}{f+\sqrt{c_2 d}}+\mathcal{P}\frac{1}{f-\sqrt{c_2 d}}.$$

Стремление к пределу в /7.2/ происходит в смысле слабой сходимости. Устремляя в /7.1/ δ_1 к нулю и рассуждая как и в п.3, при всех y вне разреза /6.9/ получим

$$g(x',y,\alpha_1) = \int_{-\infty}^{y^-+0}\left[\delta\left(f+\sqrt{c_2 d}\right)+\delta\left(f-\sqrt{c_2 d}\right)\right]\frac{dy'}{y'-y}. \qquad /7.3/$$

Умножая равенство /7.3/ на $\frac{1}{2}(1-x')d^{-1/2}$, интегрируя по α_1 в пределах от ε до α_1^0 , устремляя ε к $+0$, меняя порядок интегрирования и используя /5.9/, получим

$$\Delta F(x',y) = \int_{-\infty}^{y^-(x')+0}\frac{\rho(x',y')dy'}{y'-y}, \qquad /7.4/$$

где

$$\rho\,(x',y')=\frac{1-x'}{2}\int_0^{\alpha_1^0}\left[\delta\left(f+\sqrt{c_2 d}\right)+\delta\left(f-\sqrt{c_2 d}\right]\frac{d\alpha_1}{\sqrt{d}}\right. . \qquad /7.5/$$

Используя лемму 2, вычислим спектральную функцию ρ . Имеем

$$\rho\,(x',y')=\frac{1-x'}{|2f'\sqrt{d(x',\alpha_1^+)}+\sqrt{c_2}\,d'(x',\alpha_1^+)|}+\frac{1-x'}{|2f\sqrt{d(x',\alpha_1^-)}-\sqrt{c_2}\,d'(x',\alpha_1^-)|}= \qquad /7.6/$$

$$=\frac{(1-x')\sqrt{c_2}}{|2f'f(x',y',\alpha_1^+)-c_2 d'(x',\alpha_1^+)|}+$$

$$+\frac{(1-x')\sqrt{c_2}}{|2f'f(x',y',\alpha^-)-c_2 d'(x',\alpha_1^-)|},$$

где $f'=\dfrac{\partial f}{\partial d_1}$, $d'=\dfrac{\partial d}{\partial \alpha_1}$.

Поэтому, а также на основании /5.11/ и /5.15/, имеем:

$$2ff'-c_2 d'\Big|_{\alpha_1=\alpha_1^\pm}=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(f^2-c_2 d\right)\Big|_{\alpha_1=\alpha_1^\pm}=4(x'-1)(c_1\alpha_1^\pm+b_1)=$$

$$=\mp 4\,(1-x')\sqrt{b_1^2-c_1 a_1}=\mp 4\,(1-x')\sqrt{c_2 \mathcal{K}}.$$

Принимая это во внимание, получим из /7.6/

$$\rho\,(x',y')=\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{K}}} . \qquad /7.7/$$

8. Таким образом, на основании /5.8/ , /7.4/ и /7.7/, доказано двойное спектральное представление /2.6/:

$$\mathcal{F}(x,y;z_i)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx'}{x'-x}\int_{-\infty}^{y^-(x')}\frac{dy'}{(y'-y)\sqrt{\mathcal{K}}}=\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{D}}\frac{dx'dy'}{(x'-x)(y'-y)\sqrt{\mathcal{K}}}. \qquad /8.1/$$

Мы отбросили здесь в верхних пределах бесконечно малые положительные добавки $+0$, так как функция $\mathcal{K}^{-1/2}$ суммируема по области $\mathcal{D}$. Область интегрирования $\mathcal{D}$ заштрихована на рис. 4.

Равенство /8.1/, однако, доказано пока при условиях /4.1/,

$$y > 1 + \left(\sqrt{\xi_2 - 1} + \sqrt{\xi_4 - 1}\right)^2, \quad \xi_i > 1, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{8.2}$$

для всех комплексных x, не лежащих на разрезе /5.8/. Так как $\mathcal{F}(x, y; \xi_i)$ есть аналитическая функция всех своих аргументов в этой области /см.п.3 при $\lambda = 1$ /, то, в силу принципа аналитического продолжения, равенство /8.1/ сохраняется и для тех y, для которых правая часть этого равенства аналитична по y, т.е. заведомо для всех комплексных y, не лежащих на разрезе /см. /6.9/ и /6.10//:

$$\mathcal{I}m\, y = 0, \quad \mathcal{R}e\, y \leq -1. \tag{8.3}$$

9. Теперь осталось аналитически продолжить равенство /2.6/ по массовым переменным ξ_i со значений $\xi_i > 1$ на всю область G /см./2.14//.

Предварительно докажем лемму.

<u>Лемма 3.</u> Правая часть равенства / 2,6/ есть аналитическая функция всех своих аргументов в области $\widetilde{G}_1$, состоящей из следующих точек / x, y, ξ_i /: комплексные точки (x, y) пробегают произведение плоскостей с разрезами /2.13/, а точки (ξ_i) пробегают вещественную область G_1, состоящую из таких ξ_i, для которых найдется такой единичный вектор $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, что

$$\inf_{(x', y') \in \mathcal{D}} |A_\varphi|, \tag{9.1}$$

где область $\mathcal{D}$ определена неравенствами /2.10/ и

$$A_\varphi = -\frac{1}{2}\vec{n}\, \mathrm{grad}\, \mathcal{K} = \cos\varphi\, \mathcal{K}_1 + \sin\varphi\, \mathcal{K}_2, \tag{9.2}$$

$$\mathcal{K}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = -xy^2 + x + \alpha y - \beta, \quad \mathcal{K}_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = -yx^2 + y + \alpha x - \gamma. \tag{9.3}$$

Доказательство. Будем обозначать правую часть /2.6/, по-прежнему, буквой $\mathcal{F}$. Пусть $(\xi_i^0) \in G_1$. Тогда, в силу /9.1/, найдутся такой вектор $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, число $\varepsilon > 0$ и окрестность $\mathcal{N}(\xi_i^0)$ точки (ξ_i^0), что при всех (ξ_i) из $\mathcal{N}(\xi_i^0)$ и (x', y') из $\mathcal{D}$ будет выполнено неравенство $|A_\varphi| \geq \varepsilon$. /Напомним, что $\mathcal{D}$ зависит от ξ_i /.

Вычислим производные $\mathcal{F}$ по ξ_i из $\mathcal{N}(\xi_i^0)$. Непосредственное дифференцирование правой части /2.6/ невозможно. Пользуясь формулой Грина, перепишем /2.6/ в виде

$$\mathcal{F}(x, y; \xi_i) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\mathcal{K}}\ \vec{n}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{A_\varphi (x'-x)(y'-y)}\,dx'dy'. \qquad /9.4/$$

Теперь уже можно дифференцировать /9.4/ по ξ_i один раз. Дифференцируя и пользуясь опять формулой Грина, получим

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\mathcal{K}}\ \vec{n}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\mathcal{K}^i}{A_\varphi}\vec{n}\,\mathrm{grad} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)\frac{1}{A_\varphi (x'-x)(y'-y)}, \qquad /9.5/$$

где обозначено

$$\mathcal{K}^i = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \qquad /9.6/$$

И, вообще, если

$$\mathcal{F}^{(n,m,k,\ell)} = \frac{\partial^{n+m+k+\ell}\mathcal{F}}{\partial \xi_1^n \partial \xi_2^m \partial \xi_3^k \partial \xi_4^\ell} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\mathcal{K}}\ \varphi_{n,m,k,\ell}\,dx'dy', \qquad /9.7/$$

то, например,

$$\varphi_{n+1,m,k,\ell} = \left(\vec{n}, \mathrm{grad}\,\frac{\mathcal{K}^1}{A_\varphi} + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\varphi_{n,m,k,\ell}. \qquad /9.8/$$

При этом, в силу /9.7/, необходимо, очевидно, положить

$$\varphi_{0,0,0,0} = \vec{n}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{A_\varphi (x'-x)(y'-y)}. \qquad /9.9/$$

Принимая во внимание рекурентную формулу /9.8/, а также формулы /2.8/, /2.9/, /9.2/, /9.3/ и /9.11/, при всех (ξ_i) из $\mathcal{N}(\xi_i^0)$ и (x', y') из $\mathcal{D}$ выводим такие оценки:

$$|\varphi_{n,m,k,\ell}| < (n+m+k+\ell)!\,B^{n+m+k+\ell}(x'y')^{-2}, \qquad /9.10/.$$

где B некоторое достаточно большое число, зависящее от $N(\xi_i^0)$, но не зависящее от (x', y', ξ_i). Стало быть, для производных /9.7/ справедливы оценки

$$|\mathcal{F}^{(n,m,k,\ell)}| < C_1 (n+m+k+\ell)!\, B^{n+m+k+\ell}. \qquad /9.11/$$

Производные по переменным x и y изучаются тривиально.

Таким образом, функция $\mathcal{F}$ бесконечно-дифференцируемая по всем шести аргументам (x, y, ξ_i), и все ее производные $\mathcal{F}^{(N)}$ в некоторой окрестности каждой точки области $\tilde{G}_1$ удовлетворяют неравенствам

$$|\mathcal{F}^{(N)}| < N!\, C^N, \quad N = 0, 1, \ldots \qquad /9.12/$$

при достаточно большом C. Это и значит, что функция $\mathcal{F}$ аналитична в $\tilde{G}_1$. Лемма доказана.

10. В силу леммы 3 правая часть /2.6/ есть аналитическая функция всех своих аргументов в области $\tilde{G}_1$ /и, следовательно, в некоторой ее комплексной окрестности/. Левая часть /2.6/, амплитуда $\mathcal{F}$, аналитична в области $x > 1$, $y > 1$, $\xi_i > 1$ /см. п.3 при $\lambda = 1$ / и совпадает с правой частью при этих / x, y, ξ_i / /см. п.8/. В силу принципа аналитического продолжения функция $\mathcal{F}$ аналитична в области $\tilde{G}_1$ и в ней имеет место равенство /2.6/.

Для завершения доказательства утверждений, сформулированных в п.2, осталось показать, что $\tilde{G}_1 = \tilde{G}$. Для этого достаточно установить равенство

$$G_1 = G. \qquad /10.1/$$

Прежде всего отметим, что точки (ξ_i), которые расположены на участке границы $\theta = 2\pi$ области G, не принадлежат G_1. Действительно, в этом случае, в силу /2.11/, /2.12/ и /9.3/, точка $(x', y') = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ является особой для кривой $\mathcal{K} = 0$, так как в ней $\operatorname{grad} \mathcal{K} = 0$ /см.рис. 5 в работах [2, 1, 3] дано подробное описание кривой $\mathcal{K} = 0$ /. Поэтому в этой точке $A_\varphi = 0$ и неравенство /9.1/ не может быть выполнено ни при каком φ. Таким образом, справедливо включение $G_1 \subset G$.

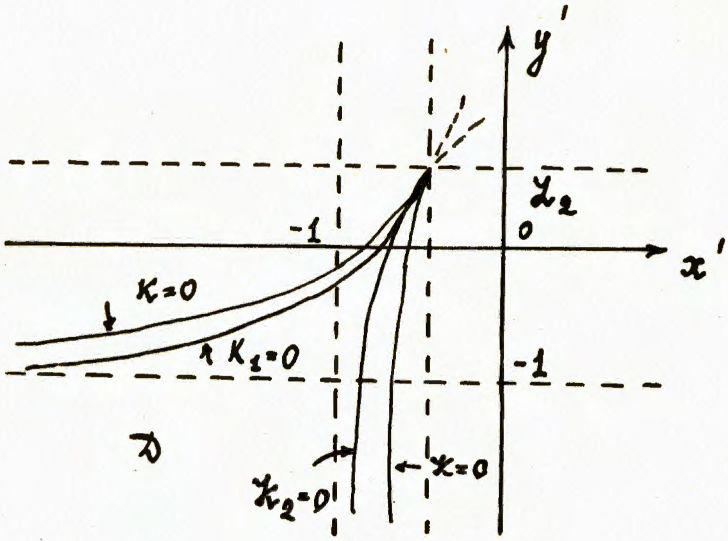

Рис. 5.

Для доказательства обратного включения изучим поведение кривых $\varkappa=0$, $\varkappa_1=0$ и $\varkappa_2=0$ в плоскости (x',y') при различных (ξ_i) из области /см.формулы /2.8/,/9.3/ и рис. 4, 5, 6/. Мы не будем здесь описывать полную структуру этих кривых, а рассмотрим только те из их ветвей , которые лежат в квадранте $x'\leq \mathcal{L}_1$, $y'\leq \mathcal{L}_2$. Кривая $\varkappa=0$ имеет две асимптоты, $x'=-1$ и $y'=-1$,и, если $\mathcal{L}_i>-1$, касательные $x'=\mathcal{L}_1$, $y'=\mathcal{L}_2$. Кривая $\varkappa_1=0$ имеет две асимптоты, $x'=0$ и $y'=-1$,и, при $\mathcal{L}_1>-1$, пересекает кривую $\varkappa=0$ в точке касания ее с прямой $x'=\mathcal{L}_1$. Аналогичными свойствами обладают и кривая $\varkappa_2=0$. Кривая $A_\varphi=0$ при любом φ, $0<\varphi<\pi/2$ имеет асимптоты $x'=0$ и $y'=0$.

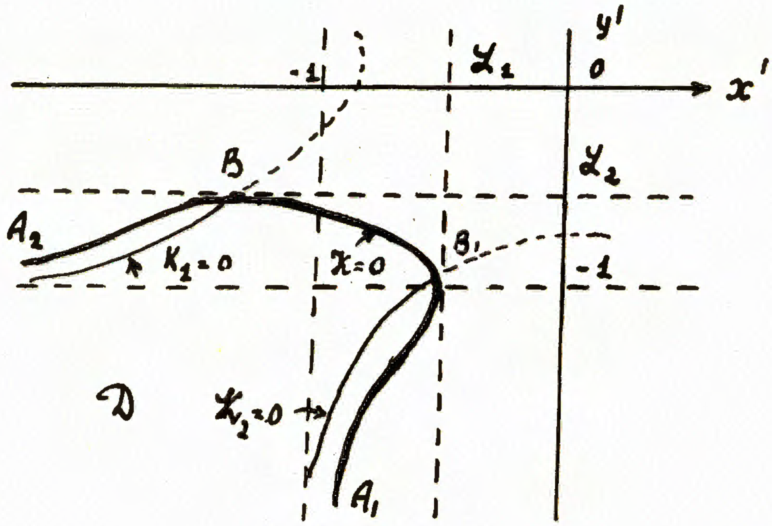

Рис. 6.

Докажем обратное включение, $G \subset G_1$. Пусть $(\xi_i) \in G$.

Рассмотрим случай, когда

$$\alpha+\beta=(\xi_1+\xi_3)(\xi_2+\xi_4)>0,\quad \alpha+\gamma=(\xi_1+\xi_2)(\xi_3+\xi_4)>0. \qquad /10.2/$$

В силу условия $\theta < 2\pi$, неравенства /10.2/ эквивалентны неравенствам

$$\xi_1+\xi_3>0,\quad \xi_2+\xi_4>0,\quad \xi_1+\xi_2>0,\quad \xi_3+\xi_4>0. \qquad /10.3/$$

Откуда по формулам /2.11/ и /2.12/ получаем $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2=-1$; кривые $\varkappa_i=0$ лежат вне $\mathcal{D}$. При приближении к асимптоте: $x'\to-1-0$, $y'\to-\infty$, $\varkappa_1\to+\infty$ и $\varkappa_2\to\alpha+\beta>0$; при приближении к асимптоте: $y'\to-1-0$, $x'\to-\infty$, $\varkappa_1\to\alpha+\gamma>0$ и $\varkappa_2\to+\infty$. Поэтому условие /9.1/ здесь выполнено при любом $\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha+\beta>0$, $\alpha+\gamma\le 0$. Здесь $\mathcal{L}_1\ge-1$ и $\mathcal{L}_2=-1$; кривая $\varkappa_2=0$ лежит вне области $\mathcal{D}$. Так как при приближении к асимптоте $x'\to-1-0$, $y'\to-\infty$, $\varkappa_2\to\alpha+\beta>0$, то условие /9.2/ будет выполнено при $\varphi=\pi/2$. Аналогично рассматривается и случай $\alpha+\beta\le 0$, $\alpha+\gamma>0$.

Таким образом, перечисленные точки (ξ_i) принадлежат области G_1.

Докажем, что и остальные точки (ξ_i) из G, т.е. точки, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha+\beta\leq 0\,,\quad \alpha+\gamma\leq 0\,,\quad 2\alpha+\beta+\gamma<0, \tag{10.4}$$

также принадлежат G_1.

Возьмем точку (ξ_i), принадлежащую области G и удовлетворяющую неравенствам /10.4/. Соединим ее непрерывной кривой C, целиком лежащей в G, с какой-либо точкой (ξ_i^0) из G, для которой условие /9.1/ выполнено при некотором φ_0, $0<\varphi_0<\pi/2$. Может случиться, что неравенство /9.1/ при $\varphi=\varphi_0$ выполнено в точке (ξ_i), и тогда $(\xi_i)\in G_1$. Пусть, напротив, это не так. Так как функция A_{φ_0} непрерывна[x], то на кривой C найдется первая точка (ξ_i'), в которой

$$\min_{(x',y')\in D} A_{\varphi_0}=0\,. \tag{10.5}$$

Так как точка (ξ_i') первая, в которой условие /9.1/ нарушается, то имеют место только две возможности: 1/ либо найдется такая точка (x',y') внутри или на границе D, в которой $\operatorname{grad} \varkappa=0$; 2/ либо, в случае, когда $\operatorname{grad}\varkappa\neq 0$ в D, кривая $A_{\varphi_0}=0$ лежит вне D, имея, по крайней мере, одну общую точку с границей $\varkappa=0$ области D.

Первая возможность при $\theta<2\pi$ не реализуется; она наступает, как отмечалось выше, при $\theta=2\pi$, когда $\operatorname{grad}\varkappa=0$ при $x'=\mathcal{L}_1$, $y'=\mathcal{L}_2$ /рис. 5, см. также [1,2] /.

Осталось рассмотреть вторую возможность. Так как асимптоты кривых $\varkappa=0$ и $A_{\varphi_0}=0$ различны, то точки (x',y') кривой $\varkappa=0$, где реализуется равенство /10.5/,

$$A_{\varphi_0}=0,\quad (x',y')\in S \tag{10.6}$$

---

x/ $A_\varphi\to+\infty$ при приближении к асмптотам: $x'\to-1+0,\ y'\to-\infty$ и $y'\to-1+0,\ x'\to-\infty$.

образуют компакт /ограниченное и замкнутое множество/. Обозначим его через S. Так как $\operatorname{grad} K \neq 0$ в D, то предположим, для примера, что в какой-либо точке компакта S $K_2 < 0$. Это неравенство, в силу /10.4/ и $\theta < 2\pi$, сохраняется и для всех точек из S x/. Пусть ζ достаточно малое положительное число. Принимая во внимание /9.2/ и /10.6/, в точках компакта S имеем

$$A\varphi_0+\zeta = \cos\varphi_0\, K_1 + \sin\varphi_0\, K_2 + \zeta(\cos\varphi_0\, K_1 - \sin\varphi_0\, K_2) + O(\zeta^2) =$$
$$= -\zeta K_2 \csc\varphi_0 + O(\zeta^2) > \zeta_1 > 0. \qquad /10.7/$$

Неравенство /10.7/ сохранится также и в некоторой окрестности N компакта S. В силу /10.5/ и /10.6/ на множестве $D - N$ выполнено неравенство $A\varphi_0 > 0$. Так как при приближении к асимптотам $x' = -1$ и $y' = -1$ $A\varphi_0 \to +\infty$, то найдется такое ζ_2, что $A\varphi_0 > \zeta_2$ во всех точках $D - N$. Но тогда последнее неравенство сохранится и при достаточно малом ζ. Отсюда и из /10.7/ будет следовать, что $A\varphi_0+\zeta > \zeta_0 > 0$ при всех (x', y') из D, если ζ и ζ_0 достаточно малы. Это значит, что точка (ξ_i') вместе с некоторой своей окрестностью принадлежит G_1.

Совершая, в силу леммы Гейне-Бореля, конечное число таких шагов по кривой C, выводим, что и точка (ξ_i) принадлежит области G_1. Таким образом, доказано включение $G \subset G_1$, а с ним и равенство /10.1/.

Как отмечалось выше, представление /2.6/ справедливо при всех (ξ_i) из области G. По непрерывности оно еще сохраняется и при $\theta = 2\pi$. При $\theta > 2\pi$ представление /2.6/ уже не имеет места. Тарский [2] показал, что в этом случае функция $\mathcal{F}$ имеет особенности, лежащие внутри физического листа. Таким образом, поверхность $\theta = 2\pi$ действительно является носителем особенностей /точек ветвления/ функции $\mathcal{F}$.

Пользуясь случаем, благодарю Н.Н.Боголюбова за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1959 года.

---

x/ В этом случае одно из чисел K_1 или K_2 непременно отрицательно. Касание кривых $K = 0$ и $A\varphi_0 = 0$ может происходить либо на участке A_1B_1, либо на участке A_2B_2 /рис. 6/.

Цитированная литература

1. S. Mandelstam. Analytic Properties of Transition Amplitudes in Perturbation Theory, (preprint, 1959).

2. J. Tarski, Spectral Representations in Perturbation Theory. III. The Scattering Amplitude with two Complex Invariants, (preprint, 1959).

3. R. Karplus, C. Sommerfield and E. Wichmann. Spectral Representations in Perturbation Theory. II. Two - Particle scattering, Phys. Rev., 114, (1959), 376-382