ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА АН СССР

Р-425

Пу Фу-чо, С.В.Тябликов, Т.Шиклош

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Acta Physica Hung, 1960, т 11, № 4,
стр 323-332.

Дубна 1959 год

P-425

Пу Фу-чо, С.В.Тябликов, Т.Шиклош

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

RETARDED AND ADVANCED GREEN–FUNCTIONS IN THE QUANTUM THEORY OF ISOTROPIC FERROMAGNETICS

Pu Fu-chou, S.V. Tiablikov, T. Siklós

Retarded and advanced Green-functions for the calculation of the fundamental thermodynamical characteristics of isotropic ferromagnetics have been used in the papers [1] [2]. For the magnetization according to this method results are obtained which are valid for all temperatures. Here, in contract to those papers, we do not suppose, that we know in advance the orientation of the resulting magnetization with respect to the external magnetic field. This gives the possibility of investigating more complicated problems in the theory of magnetism.

Запаздывающие и опережающие функции Грина для расчета основных термодинамических характеристик изотропного ферромагнетика были применены в работах [1], [2]. Для намагниченности этим методом получаются результаты, годные для всего интервала температур. Здесь, в отличие от этих работ, не предполагаем заранее известной ориентацию результирующей намагниченности относительно напряжения внешнего магнитного поля, что дает возможность исследовать более сложные задачи в теории магнетизма.

1. Метод применения двухвременных запаздывающих и опережающих функций Грина в статистической физике изложен в работе [1]. На основе работы [2] кратко сформулируем основные результаты статьи [1].

Определим двухвременные запаздывающие и опережающие функции Грина соотношениями:

$$G_r(t-t') \equiv \langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_r = \theta(t-t') \langle [A(t), B(t')] \rangle$$
$$G_a(t-t') \equiv \langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_a = -\theta(t'-t) \langle [A(t), B(t')] \rangle, \qquad /1,1/$$

где

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Q^{-1} Sp \{ \mathcal{O} e^{-\frac{H}{\vartheta}} \}; \qquad Q = Sp \{ e^{-\frac{H}{\vartheta}} \} \qquad /1,2/$$

$$[A(t), B(t')] = A(t)B(t') - \eta B(t')A(t), \qquad \eta = \pm 1 \qquad /1,3/$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad /1,4/$$

причем усреднение ведется по большому ансамблю, так что H включает в себя член с $-\lambda N$ / λ – химический потенциал, N – число частиц/. /Химический потенциал не вводится, если число частиц в системе не фиксировано/. $A(t)$, $B(t)$ – операторы в представлении Гайзенберга, представляющиеся произведениями квантовых полевых функций, $\eta = \pm 1$, причем знак + или – берется из соображений удобства, независимо от статистик частиц.

Фурье-образы функций /1,1/

$$G_j(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_j(t)\, e^{iEt}\, dt \qquad /j = r, a/ \qquad /1,5/$$

в комплексной плоскости могут рассматриваться как единая аналитическая функция, регулярная вне вещественной оси вида:

$$G(E) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\left(e^{\frac{\omega}{\vartheta}} - \eta\right)\frac{d\omega}{E-\omega} \qquad /1,6/$$

$$G(E) = \begin{cases} G_r(E) & Jm\, E > 0 \\ G_a(E) & Jm\, E < 0 \end{cases}$$

$J(\omega)$ – спектральная интенсивность.

Тогда обычные средние значения /корреляционные функции/ определяются формулами:

$$\langle B(t')A(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\, e^{-i\omega(t-t')}\, d\omega$$

$$\langle A(t)B(t')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\vartheta}}\, e^{-i\omega(t-t')}\, d\omega. \qquad /1,7/$$

Функция $J(\omega)$ строится по функциям $G(E)$ по соотношению:

$$J(\omega)\left(e^{\frac{\omega}{\vartheta}} - \eta\right) = G(\omega + i\varepsilon) - G(\omega - i\varepsilon). \qquad /1,8/$$

Последняя в свою очередь определяется из решения цепочки зацепляющихся уравнений для функции Грина, получающейся дифференцированием /1,1/ по t :

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = i\,\delta(t-t')\langle[A(t),B(t)]\rangle + i\langle\langle \frac{dA(t)}{dt}\Big|B(t')\rangle\rangle, \qquad /1,9/$$

где $i\,\frac{dA(t)}{dt}$ берется из уравнений движения. В правой части /1,9/ получаются опять произведения полевых функций в большем, вообще говоря, числе.

Для решения система /1,9/ расцепляется путем представления одной или нескольких высших функций через низшие. Вносимая при этом погрешность может быть, видимо, оценена из рассмотрения следующего приближения.

2. В гайзенберговской модели изотропный ферромагнетик описывается гамильтонианом вида:

$$\tilde{H} = -\mu_0 \sum_{(f_1,\alpha)} \mathcal{H}^\alpha S^\alpha_{f_1} - \frac{1}{2} \sum_{(f_1,f_2,\alpha)} J(f_1,f_2)\, S^\alpha_{f_1} S^\alpha_{f_2}, \qquad /2,1/$$

где S^α_f - α - компонента оператора спина электрона, находящегося в узле f решетки /в единицах $\frac{\hbar}{2}$ /, μ_0 - магнетон Бора, $\mathcal{H}$ - внешнее магнитное поле, $J(f_1,f_2) = J(|f_1 - f_2|) > 0$ - обменный интеграл.

Перейдём от спиновых операторов к паулиевским с помощью преобразования:

$$S^\alpha_f = \gamma^\alpha_f (1 - 2n_f) + A^\alpha_f b_f + \overset{*}{A}{}^\alpha_f b^+_f, \qquad /2,2/$$

где $\vec{\gamma}_f$ - векторный коэффициент преобразования, подчиняющийся условию:

$$\sum_{(\alpha)} (\gamma^\alpha_f)^2 = 1$$

$$A^x_f = -\frac{\gamma^x_f \gamma^z_f}{\eta^z_f} - i\frac{\gamma^y_f}{\eta^z_f}\ ; \quad A^y_f = -\frac{\gamma^y_f \gamma^z_f}{\eta^z_f} + i\frac{\gamma^x_f}{\eta^z_f}\ ; \quad A^z_f = \eta^z_f$$

$$\eta^z_f = \{(\gamma^x_f)^2 + (\gamma^y_f)^2\}^{1/2} \qquad /2,3/$$

для векторов A_f и $\overset{*}{A}_f$ имеют место следующие соотношения:

$$(\overset{*}{A}_f A_f) = 2\ , \quad (A_f A_f) = (\overset{*}{A}_f \overset{*}{A}_f) = (A_f \gamma_f) = (\overset{*}{A}_f \gamma_f) = 0.$$

Операторы b_f и b^+_f подчиняются перестановочным соотношениям Паули:

$$b_f b^+_f + b^+_f b_f = 1\ ; \qquad b_f b_f = b^+_f b^+_f = 0$$

$$b_f b^+_g - b^+_g b_f = 0 \qquad b_f b_g - b_g b_f = 0 \qquad /f \neq g/ \qquad /2,4/$$

$$n_f = b^+_f b_f$$

В настоящей работе мы рассмотрим однодоменный ферромагнетик, все узлы решетки которого заполнены ионами одного сорта, и поэтому положим $\gamma_f^\alpha = \gamma_\alpha$. Гамильтониан /2,1/ с помощью преобразования /2,2/ перейдет к виду:

$$\tilde{H} = E_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \, , \qquad /2,5/$$

где

$$E_0 = -\mu_0 N (\mathcal{H}\gamma) - \frac{1}{2} N \mathcal{J}(0)$$

$$H_1 = -\mu_0 (\mathcal{H} A) \sum_{(f_1)} b_{f_1} - \mu_0 (\mathcal{H} \overset{*}{A}) \sum_{(f_1)} b_{f_1}^+$$

$$H_2 = 2\mu_0 (\mathcal{H}\gamma) \sum_{(f_1)} n_{f_1} + \sum_{(f_1 f_2)} 2\mathcal{J}(f_1 f_2) n_{f_1} - \sum_{(f_1 f_2)} 2\mathcal{J}(f_1 f_2) b_{f_1}^+ b_{f_2} \qquad /2,6/$$

$$H_3 = 0$$

$$H_4 = -\sum_{(f_1 f_2)} 2\mathcal{J}(f_1 f_2) n_{f_1} n_{f_2}$$

$$\mathcal{J}(0) = \frac{1}{N} \sum_{(f_1 f_2)} \mathcal{J}(f_1 f_2)$$

N - число узлов решетки.

Относительная намагниченность определяется соотношением:

$$M^\alpha = \langle S_f^\alpha \rangle = \gamma_\alpha \langle 1 - 2 n_f \rangle + A^\alpha \langle b_f \rangle + \overset{*}{A}{}^\alpha \langle b_f^+ \rangle \, . \qquad /2,7/$$

Определяя $i \frac{d\, b_g(t)}{dt}$ и $i \frac{d\, b_g^+(t)}{dt}$ из уравнения движения:

$$i \dot{b}_g(t) = [\, b_g, \tilde{H} \,] \quad ; \quad i \dot{b}_g^+(t) = [\, b_g^+, \tilde{H} \,] ,$$

получим следующие уравнения для функций Грина:

$$i \frac{d}{dt} \langle\langle b_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle = i\,\delta(t-t')\,\delta_{fg} + 2\mu_0 (\mathcal{H}\overset{*}{A}) \langle\langle n_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle +$$
$$+ 2 \{ \mu_0 (\mathcal{H}\gamma) + \mathcal{J}(0) \} \langle\langle b_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle - \sum_{(p)} 2\mathcal{J}(gp) \{ \langle\langle b_p(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle -$$
$$- 2 \langle\langle n_g(t) b_p(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle + 2 \langle\langle n_p(t) b_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle \}$$

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle b_g^+(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle = -2\mu_0(\mathcal{H}A)\langle\langle n_g(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle - 2\{\mu_0(\mathcal{H}\gamma)+J(0)\}\langle\langle b_g^+(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle +$$
$$+\sum_{(p)} 2J(gp)\{\langle\langle b_p^+(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle - 2\langle\langle n_g(t)b_p^+(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle + 2\langle\langle n_p(t)b_g^+(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle\} \qquad /2,8/$$

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle b_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle = 2\mu_0(\mathcal{H}\overset{*}{A})\langle\langle n_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle +$$
$$+2\{\mu_0(\mathcal{H}\gamma)+J(0)\}\langle\langle b_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle - \sum_{(p)} 2J(gp)\{\langle\langle b_p(t)|b_f(t')\rangle\rangle -$$
$$-2\langle\langle n_g(t)b_p(t)|b_f(t')\rangle\rangle + 2\langle\langle n_p(t)b_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle\}$$

/2,9/

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle b_g^+(t)|b_f(t')\rangle\rangle = -i\delta(t-t')\delta_{fg}\sigma - 2\mu_0(\mathcal{H}A)\langle\langle n_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle -$$
$$-2\{\mu_0(\mathcal{H}\gamma)+J(0)\}\langle\langle b_g^+(t)|b_f(t')\rangle\rangle + \sum_{(p)} 2J(gp)\{\langle\langle b_p^+(t)|b_f(t')\rangle\rangle -$$
$$-2\langle\langle n_g(t)b_p^+(t)|b_f(t')\rangle\rangle + 2\langle\langle n_p(t)b_g^+(t)|b_f(t')\rangle\rangle\},$$

где

$$\sigma = 1 - 2\langle n_g(t)\rangle = 1 - 2\bar{m}.$$

3. Для расцепления уравнений /2,8/, /2,9/ операторы Паули $b_g(t)$ и $b_g^+(t)$ представим в виде:

$$b_g(t) = \beta + \mu_g(t) \qquad b_g^+(t) = \beta^* + \mu_g^+(t), \qquad /3,1/$$

где $\mu_g(t)$ и $\mu_g^+(t)$ новые операторы, для которых нетрудно записать перестановочные соотношения, однако эти перестановочные соотношения нам не потребуются, а β и β^* c – числа. Причем

$$\beta = \langle b_g(t) \rangle \; ; \quad \beta^* = \langle b_g^+(t) \rangle \; ; \quad \langle \mu_g(t) \rangle = \langle \mu_g^+(t) \rangle = 0 .$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle\langle b_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle = \langle\langle \mu_g(t) | \mu_f^+(t') \rangle\rangle \equiv G_{gf}^{(1)} \\
&\langle\langle b_g^+(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle = \langle\langle \mu_g^+(t) | \mu_f^+(t') \rangle\rangle \equiv G_{gf}^{(2)} \\
&\langle\langle b_g(t) | b_f(t') \rangle\rangle = \langle\langle \mu_g(t) | \mu_f(t') \rangle\rangle \equiv G_{gf}^{(3)} \\
&\langle\langle b_g^+(t) | b_f(t') \rangle\rangle = \langle\langle \mu_g^+(t) | \mu_f(t') \rangle\rangle \equiv G_{gf}^{(4)} .
\end{aligned} \qquad /3,2/$$

Используя /3,1/, оператор $n_g(t)$ может быть записан в виде:

$$n_g(t) = b_g^+(t)\, b_g(t) = \bar{n} + \Omega_{gg}(t) + \beta^* \mu_g(t) + \beta \mu_g^+(t), \qquad /3,3/$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{n} = \langle n_g(t) \rangle = \beta^* \beta + \langle \mu_g^+(t) \mu_g(t) \rangle \\
&\Omega_{gg}(t) = \mu_g^+(t) \mu_g(t) - \langle \mu_g^+(t) \mu_g(t) \rangle \; ; \langle \Omega_{gg}(t) \rangle = 0 .
\end{aligned} \qquad /3,4/$$

Используя представление /3,1/ и формулу /3,3/ нетрудно убедиться в том, что все встречающиеся в уравнениях /2,8/ и /2,9/ функции могут быть выражены через $G_{f'f}^{(i)}$ и высшие функции, последние содержат произведения $\mu(t)$ и $\mu^+(t)$ в большем числе. Например:

$$\langle\langle n_g(t) | b_f^+(t') \rangle\rangle = \beta^* G_{gf}^{(1)} + \beta\, G_{gf}^{(2)} + \langle\langle \Omega_{gg}(t) | \mu_f^+(t') \rangle\rangle$$

и

$$\ll n_g(t)\, b_p(t) | b_f^+(t') \gg = \bar{n}\, G_{pf}^{(1)} + \beta^*\beta\, G_{gf}^{(1)} + \beta\beta\, G_{gf}^{(2)} +$$

$$+ \beta \ll \Omega_{gg}(t) | \mu_f^+(t') \gg + \beta^* \ll \mu_g(t)\, \mu_p(t) | \mu_f^+(t') \gg +$$

$$+ \beta \ll \mu_g^+(t)\, \mu_p(t) | \mu_f^+(t') \gg + \ll \Omega_{gg}(t)\, \mu_p(t) | \mu_f^+(t') \gg .$$

В первом приближении пренебрегаем высшими функциями, тогда уравнения для гриновских функций расцепляются, и для функций $G_{f'f}^{(j)}$ получаем следующую систему уравнений:

$$i\dot{G}_{gf}^{(1)} = \alpha_{11}(0)\, G_{gf}^{(1)} + \alpha_{12}(0)\, G_{gf}^{(2)} - \sum_{(p)} \alpha_{13}(gp)\, G_{pf}^{(1)} - \sum_{(p)} \alpha_{14}(gp)\, G_{pf}^{(2)} + i\,\delta(t-t')\,\delta_{fg}\,\delta$$

$$i\dot{G}_{gf}^{(2)} = -\alpha_{21}(0)\, G_{gf}^{(1)} - \alpha_{22}(0)\, G_{gf}^{(2)} + \sum_{(p)} \alpha_{23}(gp)\, G_{pf}^{(1)} + \sum_{(p)} \alpha_{24}(gp)\, G_{pf}^{(2)} \qquad /3,5/$$

$$i\dot{G}_{gf}^{(3)} = \alpha_{11}(0)\, G_{gf}^{(3)} + \alpha_{12}(0)\, G_{gf}^{(4)} - \sum_{(p)} \alpha_{13}(gp)\, G_{pf}^{(3)} - \sum_{(p)} \alpha_{14}(gp)\, G_{pf}^{(4)} \qquad /3,6/$$

$$i\, G_{gf}^{(4)} = -\alpha_{21}(0)\, G_{gf}^{(3)} - \alpha_{22}(0)\, G_{gf}^{(4)} + \sum_{(p)} \alpha_{23}(gp)\, G_{pf}^{(3)} + \sum_{(p)} \alpha_{24}(gp)\, G_{pf}^{(4)} - i\,\delta(t-t')\,\delta_{fg}\,\delta$$

где

$$\alpha_{11}(0) = 2\left\{ \mu_0(\mathcal{H}\gamma) + J(0)(\delta + 2\beta^*\beta) + \mu_0(\mathcal{H}\overset{*}{A})\beta^* \right\} = \overset{*}{\alpha}_{22}(0)$$

$$\alpha_{12}(0) = 2\left\{ \mu_0(\mathcal{H}\overset{*}{A})\beta + 2J(0)\beta\beta \right\} = \overset{*}{\alpha}_{21}(0) \qquad /3,7/$$

$$\alpha_{13}(gp) = 2J(gp)(\delta + 2\beta^*\beta) = \overset{*}{\alpha}_{24}(gp)$$

$$\alpha_{14}(gp) = 4J(gp)\beta\beta = \overset{*}{\alpha}_{23}(gp) .$$

Уравнения /3,5/ и /3,6/, применяя Фурье преобразование

$$G_{gf}^{(j)}(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} G_{gf}^{(j)}(E)\, e^{-iE(t-t')}\, dE \qquad /j=1,2,3,4/ \qquad /3,8/$$

$$G_{gf}^{(j)}(E) = \frac{1}{N} \sum_{(\kappa)} e^{i(f-g,\kappa)} G_{\kappa}^{(j)}, \qquad /3,9/$$

могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned} &(E - A_{\kappa}^{(1)}) G_{\kappa}^{(1)} - B_{\kappa}^{(1)} G_{\kappa}^{(2)} = \frac{i}{2\pi}\delta \quad ; \quad (E - A_{\kappa}^{(1)}) G_{\kappa}^{(3)} - B_{\kappa}^{(1)} G_{\kappa}^{(4)} = 0 \\ &B_{\kappa}^{(2)} G_{\kappa}^{(1)} + (E + A_{\kappa}^{(2)}) G_{\kappa}^{(2)} = 0 \quad ; \quad B_{\kappa}^{(2)} G_{\kappa}^{(3)} + (A_{\kappa}^{(2)} + E) G_{\kappa}^{(4)} = -\frac{i}{2\pi}\delta, \end{aligned} \qquad /3.10/$$

где

$$A_{\kappa}^{(1)} = 2\left\{\mu_0 (\mathcal{H}\gamma) + (J(0) - J(\kappa))(\delta + 2\beta^*\beta) + \mu_0 (\mathcal{H}\mathring{A})\beta^*\right\} = \overset{*}{A}_{\kappa}^{(1)} \qquad /3,11/$$

$$B_{\kappa}^{(1)} = 2\beta\left\{\mu_0 (\mathcal{H}\mathring{A}) + 2\beta (J(0) - J(\kappa))\right\} = \overset{*}{B}_{\kappa}^{(2)}.$$

Уравнения /3.10/ имеют решения:

$$G_{\kappa}^{(j)} = \frac{i}{2\pi} \frac{\delta}{2} \sum_{(l)} Z_j^{(l)}(\kappa) \frac{1}{\mathcal{E} - E_{\kappa}^{(l)}} \qquad /l = 1,2,3,4/, \qquad /3.12$$

где

$$\mathcal{E} = E - \alpha_{\kappa} \quad ; \quad \alpha_{\kappa} = \frac{1}{2}\left\{A_{\kappa}^{(1)} - A_{\kappa}^{(2)}\right\} \quad ; \quad A_{\kappa} = \frac{1}{2}\left\{A_{\kappa}^{(1)} + A_{\kappa}^{(2)}\right\}$$

$$E_{\kappa}^{(2n+1)} = E_{\kappa} = \sqrt{A_{\kappa}^2 - B_{\kappa}^{(1)} B_{\kappa}^{(2)}} \quad ; \quad E_{\kappa}^{(2n)} = -E_{\kappa}$$

$$Z_1^{(1)}(\kappa) = Z_1^{(2)}(\kappa) = -Z_4^{(1)}(\kappa) = -Z_4^{(2)}(\kappa) = 1$$

$$Z_1^{(3)}(\kappa) = Z_4^{(3)}(\kappa) = -Z_1^{(4)}(\kappa) = -Z_4^{(4)}(\kappa) = \frac{A_{\kappa}}{E_{\kappa}}$$

$$Z_2^{(1)}(\kappa) = -Z_2^{(2)}(\kappa) = -\frac{B_{\kappa}^{(2)}}{E_{\kappa}}$$

$$Z_3^{(1)}(\kappa) = -Z_3^{(2)}(\kappa) = -\frac{B_{\kappa}^{(1)}}{E_{\kappa}}$$

$$Z_2^{(3)}(\kappa) = Z_2^{(4)}(\kappa) = Z_3^{(3)}(\kappa) = Z_3^{(4)}(\kappa) = 0.$$

Подставляя в /3,9/ решения /3.12/ с помощью /1,8/ получим следующее выражение для спектральной интенсивности:

$$\mathcal{J}_j(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{\vartheta}} - 1} \sum_{(l)} \mathcal{Z}_j^{(l)}(\omega), \qquad /3.13/$$

где

$$\mathcal{Z}_j^{(l)}(\omega) = \int e^{i(g-f,k)} \mathcal{Z}_j^{(l)}(k)\, \delta(\omega - E_k^{(l)})\, d\vec{k}.$$

и тогда с помощью /1,7/ получаем следующие выражения для корреляционных функций /при $t = t'$ /:

$$\langle \mu_g \mu_f^+ \rangle = \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} d\vec{k} + \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} \frac{A_k}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k}$$

$$\langle \mu_g^+ \mu_f \rangle = -\frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} d\vec{k} + \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} \frac{A_k}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k} \qquad /3.14/$$

$$\langle \mu_g^+ \mu_f^+ \rangle = -\frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} \frac{B_k^{(2)}}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k}$$

$$\langle \mu_g \mu_f \rangle = -\frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{i(g-f,k)} \frac{B_k^{(1)}}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k}.$$

492 стр.

Заметим, что полученные корреляционные функции в более сложных задачах необходимы для исследования минимума свободной энергии.

Если положить $g = f$, выражения /3.14/ дают уравнения для определения σ, β, β^* :

$$\beta^* \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{A_k}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k} \qquad /3.15/$$

$$\beta^* \beta^* = \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{B_k^{(2)}}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k} \qquad /3.16/$$

$$\beta \beta = \frac{\sigma}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{B_k^{(1)}}{E_k} \operatorname{cth} \frac{E_k}{2\vartheta} d\vec{k}. \qquad /3.17/$$

Вектор преобразования $\vec{\gamma}$ определяется из условия минимума свободной энергии:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_\alpha} + \lambda \gamma_\alpha = 0,$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_\alpha} = S_p \left\{ \frac{\partial H}{\partial \gamma_\alpha} e^{-\frac{H}{\theta}} \right\}.$$

Условие минимума свободной энергии в нашем случае имеет вид:

$$-\sigma N \mu_0 \mathcal{H}_\alpha - \mu_0 N \frac{\partial(\mathcal{H}A)}{\partial \gamma_\alpha} \beta - \mu_0 N \frac{\partial(\mathcal{H}\overset{*}{A})}{\partial \gamma_\alpha} \beta^* + \lambda \gamma_\alpha = 0. \qquad /3.18/$$

Итак , мы получили 6 уравнений /3,15/ - /3.18/ для определения 6 неизвестных $\sigma, \beta, \beta^*, \vec{\gamma}$.

Из уравнений /3,16/, /3,17/ методом итераций можем вычислить β и β^*. В случае изотропного ферромагнетика итерация дает точное решение:

$$\beta = \beta^* = 0. \qquad /3.19/$$

Тогда из /3.18/ получим:

$$\sigma N \mu_0 \mathcal{H}_\alpha = \lambda \gamma_\alpha. \qquad /3.20/$$

Нетрудно убедиться в том, что из возможных двух решений /3.20/ минимуму свободной энергии соответствует решение $\vec{\gamma} \parallel \vec{\mathcal{H}}$ и таким образом для определения абсолютного значения относительной намагниченности $M = \sigma$ получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{v}{(2\pi)^3} \int cth \frac{E_k}{2\theta} d\vec{k}, \qquad /3.21/$$

где

$$E_k = 2 \left\{ \mu_0 \mathcal{H} + \sigma \left(\mathcal{I}(0) - \mathcal{I}(k) \right) \right\}.$$

Уравнение /3,21/ для относительной намагниченности, годное для всего интервала температуры, было раньше получено в работах [1] и [2] . В работе[2] дано решение уравнения /3.21/ для областей низких температур и точки Кюри /в последней при $\mathcal{H} = 0$ /, а также рассчитана парамагнитная восприимчивость выше точки Кюри.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, С.В.Тябликов. ДАН СССР, 53, 126, 1959.
2. С.В.Тябликов. Украинский математический журнал 1959 /в печати/.

Рукопись поступила в издательский отдел 30 октября 1959 года.