

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

Р - 409

В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбанко, Л.А. Саркисян

ФОРМИРОВАНИЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ШИММ

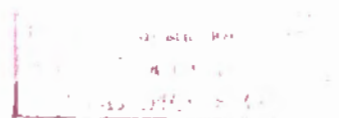
Дубна 1959 год

P - 409

В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян

7/884

ФОРМИРОВАНИЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ШИММ



А н н о т а ц и я

Излагается метод формирования периодических магнитных полей для ускорителей с пространственной вариацией. В предположении равномерного намагничивания вычислены составляющие напряженности магнитного поля системы криволинейных шимм. Приведены расчетные и экспериментальные значения амплитуды и фазы основной гармоники магнитного поля системы тонких шимм прямоугольного сечения, изогнутых по спиральям Архимеда.

В в е д е н и е

В последние годы широкое распространение получили предложения об использовании в циклических ускорителях заряженных частиц магнитного поля, напряженность которого изменяется периодически не только по азимуту, но и по радиусу^{/1-5/}. Для ускорителей этого типа необходимый закон изменения магнитного поля в медианной плоскости можно представить следующим образом:

$$H_z(z, \varphi) = H(z) \{ 1 + \varepsilon(z) \cos[\beta(z) - N\varphi] \}, \quad /1/$$

где $H(z)$ - аксиально-симметричное /среднее/ магнитное поле; $\varepsilon(z)$ - глубина вариации, обеспечивающая пространственную устойчивость движения частиц.

В настоящее время известны два метода формирования магнитных полей, заданных в медианной плоскости в форме /1/.

Первый метод определения необходимой конфигурации полюсных наконечников состоит в придании им формы одной из эквипотенциальных поверхностей, определяемых из решения трехмерного уравнения Лапласа при заданных граничных условиях в медианной плоскости^{/6-8/}. К недостаткам этого метода следует отнести:

1/ нарушение при больших индукциях эквипотенциальности полюсных наконечников из-за появления отдельных областей насыщения;

2/ невозможность аналитического расчета краевого эффекта магнитного поля, всегда существующего в магнитных системах ускорителей;

3/ трудность практической реализации рельефного профиля полюсных наконечников.

Второй метод, разработанный в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований, базируется на разделении поля, заданного выражением /1/ на две части, и, соответственно этому, формирование магнитного поля распадается на две практически самостоятельные задачи: первая задача состоит в создании вариации поля $H(z)\varepsilon(z)\cos[\beta(z)-N\varphi]$, а вторая включает в себя формирование среднего магнитного поля $H(z)$ с помощью кольцевых шимм^{/9/}.

Данная работа посвящена расчету магнитного поля криволинейных шимм, с помощью которых формируется в медианной плоскости необходимый закон вариации. Идея использования криволинейных шимм основана на том, что для двух прямолинейных шимм, расположенных симметрично относительно средней плоскости, максимум H_z составляющей напряженности магнитного поля находится точно под их серединой, а для кольцевых шимм этот максимум незначительно смещается от окружности среднего радиуса шимм. Поэтому можно предполагать, что шиммы прямоугольного сечения, располагаемые по линиям максимальной напряженности магнитного поля $\psi = \frac{\beta(z)}{N}$, будут в первом приближении давать в медианной плоскости заданный закон фазы вариации магнитного поля.

Для того, чтобы величина амплитуды вариации $H(z) \xi(z)$ не зависела от изменения среднего поля, геометрия шимм /соотношение между высотой и шириной/ и внешнее намагничивающее поле должны быть выбраны из условия близости магнитного состояния шимм к насыщению.

Этот метод оправдал себя на практике при создании циклотрона с пространственной вариацией^{/10/}. Магнитное поле этого циклотрона было сформировано тонкими спиральными шиммами, намагниченными до насыщения^{/11/}.

1. Магнитное поле криволинейных шимм

В дальнейшем будем предполагать, что шиммы в зазоре электромагнита намагничиваются до насыщения по направлению вертикальной составляющей напряженности магнитного поля. В этом случае магнитное поле шиммы произвольной конфигурации можно рассчитать в предположении равномерного осевого намагничивания из следующих выражений:

$$\vec{H} = -g \operatorname{grad} \Phi(z, \varphi, z),$$
$$\Phi(z, \varphi, z) = M \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{1}{\rho} \cdot dV',$$

/2/

где Φ - скалярный магнитный потенциал; ρ - расстояние от точки наблюдения / z, φ, z / до переменной точки / z', φ', z' / элемента

объема dV' , $M = M_z$ - намагниченность образца по оси Z , которую мы принимаем равной предельной намагниченности M_s /для большинства сортов технического железа $M_s = \frac{21000 \pm 500}{4\pi}$ эрстед /12/.

Используя интегральное представление /13/

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} e^{-|\mathbf{z} - \mathbf{z}'| \lambda} J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') d\lambda, \quad /3/$$

можно найти магнитный потенциал двух шимм, симметрично расположенных относительно плоскости $Z = 0$, в области $|\mathbf{z}| < h_1(z)$ в виде

$$\Phi = 2M \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \int_S \cos m(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} [e^{-\lambda h_1(z')} - e^{-\lambda h_2(z)}] \operatorname{sh} \lambda z J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') d\lambda dS', \quad /4/$$

где $\epsilon_m = 1$ при $m = 0$; $\epsilon_m = 2$ при $m > 0$; $z = h_1(z)$, $z = h_2(z)$ - поверхности, ограничивающие протяженность шимм по вертикали.

Из /4/ следует, что потенциал и составляющие напряженности магнитного поля шимм ограниченной высоты определяются как разность соответствующих величин для шимм неограниченной высоты с границами $h_1(z)$ и $h_2(z)$. Учитывая это, в дальнейших преобразованиях будем полагать $h_2 \rightarrow \infty$. Пусть проекция шимм на плоскость $Z = 0$ представляет область S , ограниченную дугами окружностей $z = R_H$ и $z = R_K$ и произвольными кривыми $\varphi = \beta_1(z)$, $\varphi = \beta_2(z)$. Тогда

$$\Phi = 4M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{m} \int_{R_H}^{R_K} \cos m\left[\varphi - \frac{\beta_1(z') + \beta_2(z')}{2}\right] \sin m \frac{\beta_2(z') - \beta_1(z')}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_1(z')} \operatorname{sh} \lambda z J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') d\lambda z' dz'. \quad /5/$$

Выражение /5/ позволяет найти составляющие напряженности магнитного поля шимм с произвольными границами $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$. Однако для целей формирования периодических магнитных полей можно ограничиться случаем, когда эти границы имеют одинаковую форму, но сдвинуты относительно друг друга на угол α . Составляющие напряженности магнитного поля таких шимм можно представить в виде:

$$H_z = 4M \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\sin \frac{m\alpha}{2}}{m} \int_{R_H}^{R_K} \cos m[\varphi - \beta(z)] \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_1(z')} \operatorname{ch} \lambda z J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') \lambda d\lambda z' dz', \quad /6/$$

$$H_z = 4M \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\sin \frac{m\lambda}{2}}{m} \int_{R_H}^{R_K} \cos m[\varphi - \beta(z')] \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_1(z')} \operatorname{sh} \lambda z J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') \lambda d\lambda z' dz', \quad /7/$$

$$H_y = - \frac{8M}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\lambda}{2} \int_{R_H}^{R_K} \sin m[\varphi - \beta(z')] \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_1(z')} \operatorname{sh} \lambda z J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') d\lambda z' dz'. \quad /8/$$

Выражения /6/, /7/, /8/ определяют составляющие магнитного поля криволинейных шимм в форме ряда Фурье. Нулевой член / $m=0$ / соответствует среднему полю, а остальные члены / $m>0$ / определяют гармоники магнитного поля двух криволинейных шимм. В формуле /8/ суммирование начинается с $m=1$, так как среднее значение H_y - составляющей во всей области изменения z равно нулю. Легко видеть, что выражения для составляющих среднего поля H_z и H_z с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$ описывают распределение магнитного поля кольцевых образцов, полученных вращением шимм вокруг оси z . В плоскости $z=0$.

$$H_z(z, \varphi, 0) = H_y(z, \varphi, 0) = 0.$$

Используя формулу /13/

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda h_1} J_m(\lambda z) J_m(\lambda z') d\lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{z z'}} Q_{m-1/2} \left(\frac{h_1^2 + z^2 + z'^2}{2 z z'} \right),$$

выражение для $H_z(z, \varphi, 0)$ можно записать в виде:

$$H_z(z, \varphi, 0) = \frac{2M d}{\pi z^{3/2}} \int_{R_H}^{R_K} \left[-\frac{d}{dx} Q_{-1/2}(x) \right] \frac{h_1(z')}{\sqrt{z'}} dz' +$$

$$+ \frac{8M}{\pi z^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\lambda}{2}}{m} \int_{R_H}^{R_K} \left[-\frac{d}{dx} Q_{m-1/2}(x) \right] \cos m[\varphi - \beta(z')] \frac{h_1(z')}{\sqrt{z'}} dz', \quad /9/$$

где $Q_{m-1/2}(x)$ - сферическая функция Лежандра $\overline{\text{II}}$ -го рода от аргумента

$$\chi = \frac{[h_1(z')]^2 + z^2 + z'^2}{2zz'}$$

Выражение /9/ удобно представить в форме

$$H_z(z, \varphi) = H(z) + \sum_{m=1}^{\infty} H_m(z) \cdot \cos[m\varphi - \beta_m(z)], \quad /10/$$

где амплитуды и фазы гармоник определяются как

$$H_m(z) = \sqrt{[H_m^c(z)]^2 + [H_m^s(z)]^2}, \quad /11/$$

$$\beta_m(z) = \text{Arctg} \frac{H_m^s(z)}{H_m^c(z)}, \quad /12/$$

$$H_m^c(z) = \frac{8M \sin \frac{m\delta}{2}}{\pi m z^{3/2}} \int_{R_H}^{R_K} \cos m\beta(z') \left[-\frac{d}{dx} Q_{m-1/2}(x) \right] \frac{h_1(z')}{\sqrt{z'}} dz', \quad /13/$$

$$H_m^s(z) = \frac{8M \sin \frac{m\delta}{2}}{\pi m z^{3/2}} \int_{R_H}^{R_K} \sin m\beta(z') \left[-\frac{d}{dx} Q_{m-1/2}(x) \right] \frac{h_1(z')}{\sqrt{z'}} dz'.$$

Амплитуды гармоник при $z = 0$ обращаются в нуль, а с ростом радиуса возрастают по закону

$$H_m(z) = z^m \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_{ms} z^{2s},$$

где γ_{ms} - коэффициенты, зависящие от номера гармоники и параметров шимм.

Для создания вариации поля с заданной периодичностью необходимо использовать N пар одинаковых шимм, сдвинутых относительно друг друга на угол $\theta = \frac{2\pi}{N}$, $\theta > \delta$. Разложение магнитного поля такой системы в ряд Фурье при $z = 0$ будет иметь вид:

$$H_z(z, \varphi) = NH(z) + N \sum_{m=1}^{\infty} H_{mN}(z) \cos[\beta_{mN}(z) - mN\varphi]. \quad /14/$$

При этом в разложении поля будут присутствовать только гармоники с периодичностью, кратной N . Следует отметить, что среднее поле и амплитуды гармоник системы из N пар одинаковых шимм в N раз больше соответствующих величин в разложении поля одной пары. На практике это позволяет определять амплитуды гармоник магнитного поля системы криволинейных шимм из экспериментов, проведенных с одиночными шиммами.

При определенном выборе параметров системы шимм отклонения вариации поля от гармонического закона могут быть сделаны незначительными. В частности, полагая $\alpha = \frac{\pi}{N}$, получим разложение только по нечетным гармоникам относительно N

$$H_z(z, \varphi) = N H(z) + N \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} H_{(2m-1)N}(z) \cos[\beta_{(2m-1)N}(z) - (2m-1)N\varphi]. \quad /15/$$

Так как наличие высших гармоник в законе магнитного поля не нарушает условий устойчивости движения частиц, то рассмотренная система криволинейных шимм может быть использована для формирования магнитного поля, заданного выражением /1/. Для системы N пар криволинейных шимм ограниченной высоты $2b(z) = h_2(z) - h_1(z)$ среднее магнитное поле, амплитуды и фазы гармоник вычисляются по формулам

$$H(z, 2b) = N H(z, h_1) - N H(z, h_2),$$

$$H_k(z, 2b) = N \sqrt{[H_k^s(z, h_1) - H_k^s(z, h_2)]^2 + [H_k^c(z, h_1) - H_k^c(z, h_2)]^2}, \quad /16/$$

$$\beta_k(z, 2b) = A z c \operatorname{tg} \frac{H_k^s(z, h_1) - H_k^s(z, h_2)}{H_k^c(z, h_1) - H_k^c(z, h_2)},$$

где $k = mN$ / $m = 1, 2, 3 \dots$ /, а значения $H(z, h_2)$, $H_k^s(z, h_2)$, $H_k^c(z, h_2)$ вычисляются из /11/ и /13/ с заменой h_1 на h_2 .

2. Магнитное поле шимм с границей в форме
спирали Архимеда.

Для циклотрона с пространственной вариацией одним из возможных законов магнитного поля в медианной плоскости является следующий:

$$H_z(z, \varphi) = H(z) \left\{ 1 + \varepsilon(z) \cos \left[\frac{z}{\lambda} - N\varphi \right] \right\}, \quad /17/$$

где $2\pi\lambda$ - радиальный шаг и N - периодичность структуры поля. В этом случае линии максимальной напряженности магнитного поля имеют форму спиралей Архимеда $z = \lambda N\varphi$. Для создания заданной вариации поля можно использовать систему из N пар шимм, сдвинутых относительно друг друга на угол $\frac{2\pi}{N}$ и имеющих границы в форме спиралей Архимеда. Если $h_1(z) = h_1 = \text{Const}$, то среднее поле и амплитуды гармоник магнитного поля такой системы шимм при $z = 0$ определяются из выражений

$$H(z) = \frac{2MdNh_1}{\pi z^{3/2}} \int_0^{R_k} \left[-\frac{d}{dx} Q_{-1/2}(x) \right] \frac{dz'}{\sqrt{z'}} \quad /18/$$

$$H_k^s = \frac{8MN \cdot \sin \frac{m\lambda}{2} \cdot h_1}{\pi k z^{3/2}} \int_0^{R_k} \left[-\frac{d}{dx} Q_{k-1/2}(x) \right] \sin k \frac{z'}{a} \frac{dz'}{\sqrt{z'}} \quad /19/$$

$$H_k^c = \frac{8MN \cdot \sin \frac{m\lambda}{2} \cdot h_1}{\pi k z^{3/2}} \int_0^{R_k} \left[-\frac{d}{dx} Q_{k-1/2}(x) \right] \cos k \frac{z'}{a} \frac{dz'}{\sqrt{z'}} \quad /19/$$

где $k = mN$ / $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ / , $a = \lambda N$ - параметр спирали.

Если $R_k \rightarrow \infty$, то при $z \rightarrow \infty$ амплитуды гармоник поля $H_k = \sqrt{(H_k^c)^2 + (H_k^s)^2}$ стремятся к определенному пределу. Так как кривизна границ шимм $k(z) = \frac{2a^2 + z^2}{(a^3 + z^3)^{3/2}}$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, то предельные значения будут равны амплитудам гармоник в разложении поля бесконечной системы прямолинейных шимм с такими же геометрическими размерами /рис. 1/.

Составляющую магнитного поля H_z двух прямолинейных шимм неограниченной длины, расположенных симметрично относительно плоскости $z = 0$, можно найти из /2/ в следующем виде:

$$H_z^{(I)}(y, z) = 2M \int_{-c}^c \left\{ \frac{(z+h_1)}{(z+h_1)^2 + (y-y')^2} - \frac{(z-h_1)}{(z-h_1)^2 + (y-y')^2} \right\} dy' \quad /20/$$

Тогда магнитное поле системы шимм, показанных на рис. 1, запишется в виде следующего ряда:

$$H_z(y, z) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} H_z^{(I)}(y + 2\pi\lambda s, z) \quad /21/$$

Можно показать, что ряд /21/ сходится равномерно и абсолютно, что позволяет его почленно интегрировать, а также группировать в отдельные ряды, удобные для расчетов. В силу этого /21/ можно переписать следующим образом:

$$H_z(y, z) = 2M \int_{-c}^c \left\{ \frac{z+h_1}{(2\pi\lambda)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{z+h_1}{2\pi\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{2\pi\lambda} + s\right)^2} - \frac{z-h_1}{(2\pi\lambda)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{z-h_1}{2\pi\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{\lambda} + s\right)^2} \right\} dy' \quad /22/$$

Бесконечные ряды в /22/ можно просуммировать, пользуясь преобразованием /14/

$$\frac{z \pm h_1}{2\pi\lambda} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \frac{1}{\left(\frac{z \pm h_1}{2\pi\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{2\pi\lambda} + s\right)^2} = \pi \frac{\operatorname{sh} \frac{z \pm h_1}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{z \pm h_1}{\lambda} - \cos \frac{y-y'}{\lambda}} \quad /23/$$

Разлагая полученный результат в ряд Фурье, найдем

$$H_z(y, z) = 4M \frac{c}{\lambda} + 8M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{c}{\lambda}}{k} \cdot e^{-k \frac{h_1}{\lambda}} \operatorname{ch} k \frac{z}{\lambda} \cos k \frac{y}{\lambda} \quad /24/$$

В плоскости $z = 0$ амплитуды гармоник поля в разложении /24/ запишутся в виде

$$H_k^* = 8M \frac{\sin k \frac{c}{\lambda}}{k} \cdot e^{-k \frac{h_1}{\lambda}} \quad /25/$$

Для шимм ограниченной высоты $2b$ выражение предельных амплитуд можно записать следующим образом:

$$H_k^* = 8M \frac{\sin k \frac{c}{\lambda}}{k} e^{-k \frac{h_1}{\lambda}} \left(1 - e^{-k \frac{2b}{\lambda}} \right) \quad /26/$$

Выражение /26/ может быть использовано для предварительного выбора параметров системы спиральных шимм. Так как для циклотрона с пространственной вариацией требуемая глубина вариации пропорциональна λ , представляет интерес нахождения максимального значения $\frac{dH_z}{dy}$ в разложении поля /24/. Ограничиваясь основной гармоникой / $K = 1$ / для $Z = 0$ и фиксированных h и $2b$, получим, что максимальное значение $\left(\frac{H_1}{\lambda} \right)$ достигается при

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad /27/$$

$$h_1 = \lambda + \frac{2b}{e^{\frac{2b}{\lambda}} - 1} \quad /28/$$

Шиммы, параметры которых удовлетворяют соотношениям /27/, /28/ будем называть оптимальными. Так как $c = a \frac{d}{2}$, то /27/ эквивалентно условию $d = \frac{\pi}{N}$, то есть для оптимальных шимм разложение поля будет иметь вид /15/. Выбор оптимального значения λ для заданных h и $2b$ можно производить по кривым, приведенным на рис. 2. На том же рисунке дана зависимость радиальной ширины шимм $2c$ от λ согласно условию /27/.

3. Условие насыщения и влияние полюсных наконечников на поле шимм

При расчете магнитного поля системы криволинейных шимм предполагалось, что магнитное состояние их близко к насыщению. В заданном внешнем поле это может реализоваться только при определенном соотношении между шириной и высотой шимм. Магнитное состояние шимм и условия их насыщения можно описать с помощью магнитометрического размагничивающего фактора и известных кривых намагничивания вещества /9/. Так, для прямолинейной

шиммы неограниченной длины магнитометрический размагничивающий фактор определяется по формуле^{/15/}:

$$N_v = 8 \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - \frac{2b}{c} \ln\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) + \frac{2c}{b} \ln\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right), \quad /29/$$

где $2c$ - толщина, $2b$ - высота шиммы.

На рис. 3 приведена зависимость параметров такой шиммы от внешнего поля, при котором намагниченность ее по оси Z равна предельной намагниченности M_s и $0,95 M_s$. Для построения этих кривых была использована кривая намагничивания углеродистой стали^{/12/} и зависимость $N_v = f(b, c)$, определяемая формулой /29/. На основании этих кривых выбирается соотношение между высотой и шириной, при котором магнитное состояние шиммы будет близким к насыщению.

При расчете магнитного поля шимм, помещенных в зазор электромагнита, необходимо учитывать влияние полюсных наконечников на поле шимм. Наиболее просто это можно произвести, если считать полюсные наконечники плоскими и безграничными поверхностями, а магнитную проницаемость их постоянной. В этом случае результирующее магнитное поле будет включать в себя дополнительно поля от двух бесконечных систем зеркально отраженных шимм. При этом намагниченность зеркально отраженных шимм определяется выражением /9/

$$M_{\text{отр}}^{(n)} = M \cdot \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^n, \quad /30/$$

где μ - магнитная проницаемость полюсных наконечников; n - номер отражения.

Для системы шимм с границей в форме спирали Архимеда влияние полюсных наконечников можно оценить из анализа изменения предельных амплитуд /26/ при учете отражений. Производя суммирование H_z - составляющей магнитного поля системы прямолинейных шимм /рис. 1/ и их отражений, найдем выражения предельных амплитуд в следующем виде:

$$H_k^* = 8M \frac{\sin k \frac{c}{\lambda}}{k} \cdot e^{-k \frac{h_1}{\lambda}} \frac{\left(1 - e^{-k \frac{2b}{\lambda}}\right) \left(1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-k \frac{2(h_m - h_1 - b)}{\lambda}}\right)}{1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-k \frac{2h_m}{\lambda}}}, \quad /31/$$

где h_m - полузазор электромагнита.

Для случая $\mu \gg 1$ и $h_1 + 2b = h_m$ /31/ приводится к форме

$$H_k^* = 8M \frac{\sin k \frac{c}{\lambda}}{k} e^{-k \frac{h_1}{\lambda}} \frac{1 - e^{-k \frac{4b}{\lambda}}}{1 - e^{-k \frac{2h_m}{\lambda}}}. \quad /32/$$

Из /32/ видно, что влияние первого отражения сводится к увеличению высоты шиммы в два раза, а вклад всех последующих отражений при $h_m > 2\lambda$ дает увеличение основной гармоники $/K=1/$ менее чем на 2%.

4. Тонкие шиммы

Формирование магнитных полей с глубиной вариации в несколько процентов может быть осуществлено с помощью криволинейных шимм, толщина которых, отсчитанная по нормали к осевой линии, постоянна и мала по сравнению с другими геометрическими размерами. Такие шиммы будем называть тонкими. В этом случае элемент площади в /4/ можно представить как

$$ds' = \delta \sqrt{z_0^2(\psi') + \left(\frac{dz_0}{d\psi'}\right)^2}, \quad /33/$$

где δ - толщина, $z_0 = z_0(\psi)$ - уравнение осевой линии шиммы.

Для системы N пар тонких шимм, сдвинутых относительно друг друга на угол $\frac{2\pi}{N}$, компоненты Фурье магнитного поля в плоскости симметрии $/z = 0/$ можно представить в виде:

$$H_z(z) = \frac{2M \sqrt{\delta h_1}}{\pi z^{3/2}} \int_{\psi_H}^{\psi_K} \sqrt{\frac{z_0^2(\psi') + \left(\frac{dz_0}{d\psi'}\right)^2}{z_0^3(\psi')}} \left[-\frac{d}{dx} Q_{-1/2}(x) \right] d\psi' \quad /34/$$

$$H_k^c = \frac{4MN\delta h_1}{\pi z^{3/2}} \int_{\psi_n}^{\psi_k} \sqrt{\frac{z_0^2(\psi') + \left(\frac{dz_0}{d\psi'}\right)^2}{z_0^3(\psi')}} \left[-\frac{d}{d\chi} Q_{k-1/2}(\chi) \right] \cos k\psi' d\psi'$$

/35/

$$H_k^s = \frac{4MN\delta h_1}{\pi z^{3/2}} \int_{\psi_n}^{\psi_k} \sqrt{\frac{z_0^2(\psi') + \left(\frac{dz_0}{d\psi'}\right)^2}{z_0^3(\psi')}} \left[-\frac{d}{d\chi} Q_{k-1/2}(\chi) \right] \sin k\psi' d\psi',$$

где $\chi = \frac{h_1^2 + z^2 + z_0^2(\psi')}{2z z_0(\psi')}$, а ψ_n и ψ_k угловые координаты начала и конца шиммы. Для системы тонких шимм, изогнутых по спирали Архимеда $z_0 = a\psi$, предельные амплитуды гармоник магнитного поля описываются выражением

$$H_k^* = 4M \frac{\delta}{\chi} e^{-k\frac{h_1}{\chi}} \left(1 - e^{-k\frac{2b}{\chi}} \right),$$

/36/

которое является частным случаем формулы /26/.

Для формирования магнитного поля циклотрона с пространственной вариацией, разработанного и запущенного в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований^{/10/}, была использована система тонких спиральных шимм со следующими параметрами: $N = 4$; $h_1 = 4,0$ см; $2b = 4,0$ см; $\delta = 1,2$ см; $a = 5,377$ см; $R_k = a\psi_k = 58,0$ см. Схематический чертеж этой системы шимм приведен на рис.4. На рис. 5 представлена зависимость амплитуды основной гармоники магнитного поля от радиуса. Расчет амплитуды основной гармоники производился по формулам /35/, то есть шиммы считались неограниченными по высоте. Экспериментальные значения получены из гармонического анализа разности магнитных полей, измеренных в центральной плоскости зазора электромагнита СП-44В ϕ 120 см, $2h_m = 22$ см с установленной системой шимм и без нее. Из приведенной зависимости видно, что амплитуда возрастает с увеличением радиуса, достигая 95% от предельного значения H_k^* уже на радиусе ~ 20 см. В интервале радиусов 25-50 см амплитуда вариации остается практически постоянной и равной предельному значению. Локальное увеличение амплитуды на конечных радиусах происходит за счет краевого эффекта и связано с неоптимальным выбором параметра a . На

том же рисунке даны отклонения фазы максимума основной гармоники от угла спирали $\psi = \frac{z}{\alpha}$. За исключением краевых участков спиральных шимм эти отклонения не превышают 0,1 радиана.

Совпадение расчетных и экспериментальных значений, указывает на возможность расчета изложенным методом вариации магнитного поля с точностью 2-3%.

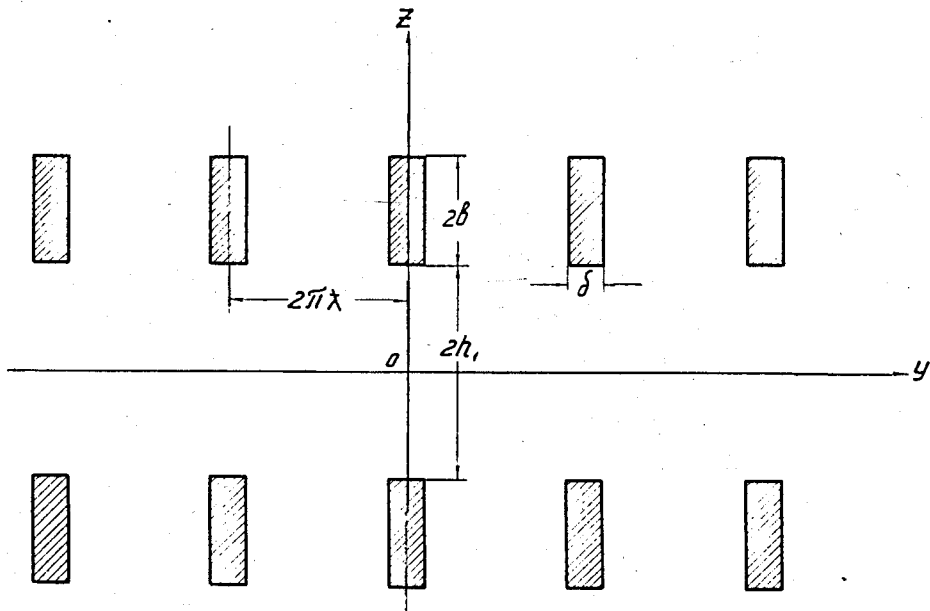
В заключение авторы выражают благодарность В.П. Дмитриевскому за постоянное внимание к работе, ценные обсуждения и замечания.

Рукопись поступила в издательский отдел 19 сентября 1959 года.

Л и т е р а т у р а

1. D.W. Kerst, K.M. Terwilliger et al. Fixed field alternating gradient accelerator with spirally ridged poles Phys.Rev. 98, 1153 (1955).
2. А.А. Коломенский, В.А. Петухов, М.С. Рабинович. Новый ускоритель заряженных частиц-кольцевой фазотрон. Сборник "Некоторые вопросы теории циклических ускорителей". АН СССР /1955/.
3. P.D. Dunn, L.B. Mullett, T.G. Pickavance et al. Accelerator studies at A.E.R.E., Harwell. CERN Symposium. 1956.
4. В.П. Дмитриевский. О предельной энергии частиц в ускорителях типа циклотрон с пространственной вариацией магнитного поля. Отчет ЛЯП ОИЯИ /1955/.
5. В.Е. Кольга. Применение в ускорителях периодических магнитных полей специального вида. Отчет ЛЯП ОИЯИ /1958/.
6. D.W. Kerst. Gap in spirally ridged pole. MURA, DWK-10 (1955).

7. Лю Мао-сань.. Расчет профиля полюсных наконечников для ускорителей заряженных частиц методом эквипотенциалей. Дипломная работа ЛЯП ОИЯИ /1958/.
8. E.S. Akeley. The vector potential of the magnetic field in the Mark V FFAG accelerator. МУКА ESA-3 (1955).
9. В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян. Формирование аксиально-симметричных магнитных полей. Препринт ОИЯИ Р-344 /1959/.
10. Д.П. Василевская, А.А. Глазов, В.И. Данилов, В.П. Джелепов, В.П. Дмитриевский и др. Запуск циклотрона с пространственной вариацией напряженности магнитного поля. Атомная энергия, 6, 657 /1959/.
11. В.И. Данилов, В.П. Дмитриевский и др. Формирование магнитного поля циклотрона с пространственной вариацией. Препринт ОИЯИ /1959/.
12. И.В. Антик, Е.И. Кондорский и др. Магнитные измерения ГОНТИ. М.-Л. /1939/.
13. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч.1 ИЛ /1949/.
14. I.P. Blewett, M.H. Blewett, M.N. Moore and L.W. Smith. Pole-Face Windings. part I-Design. Rev. Scientific Instr. 24, 773-777 (1953).
15. В.И. Данилов. Формирование магнитных полей для ускорителей с пространственной вариацией. Диссертация, ЛЯП ОИЯИ /1959/.



488/7

Рис. 1. Система прямолинейных шимм.

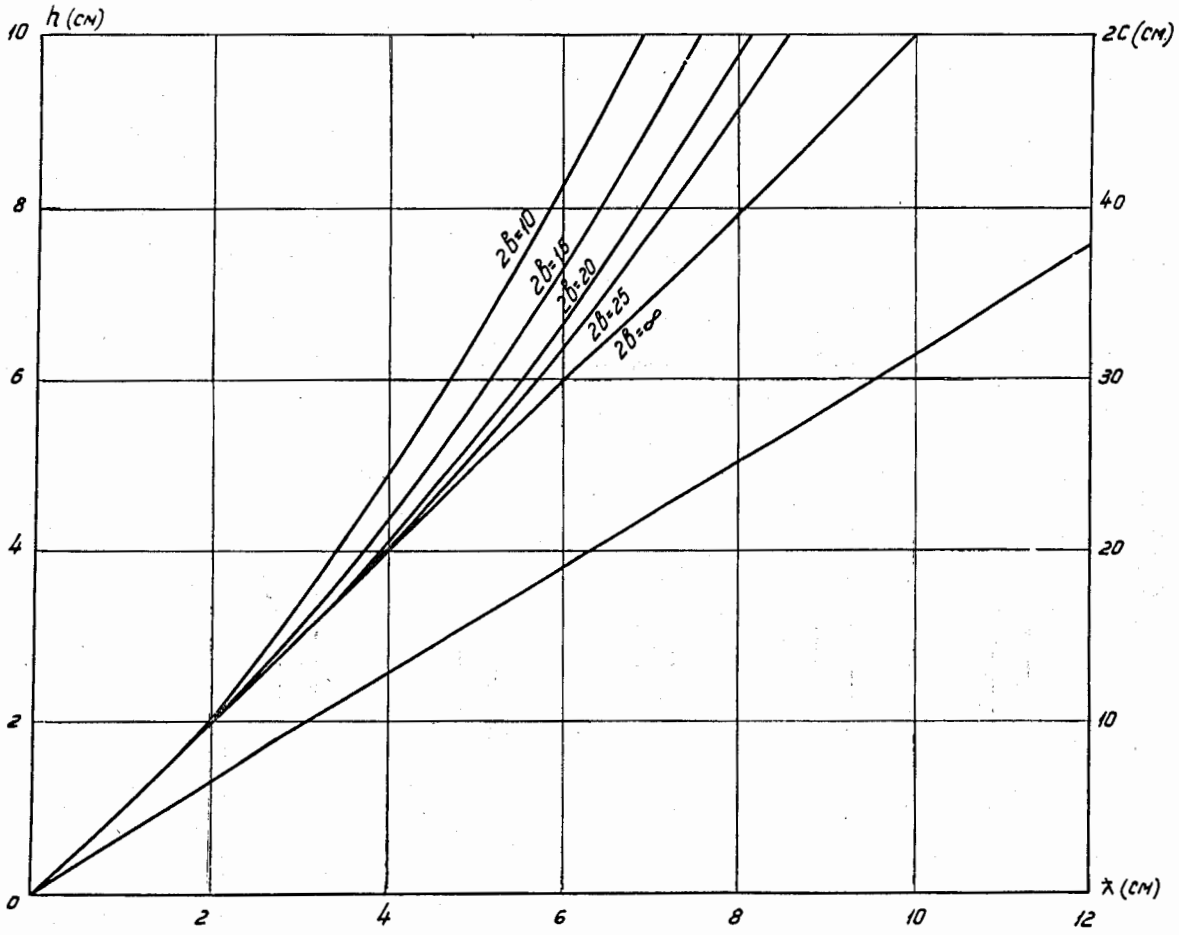


Рис. 2. Соотношения между параметрами оптимальных шимм.

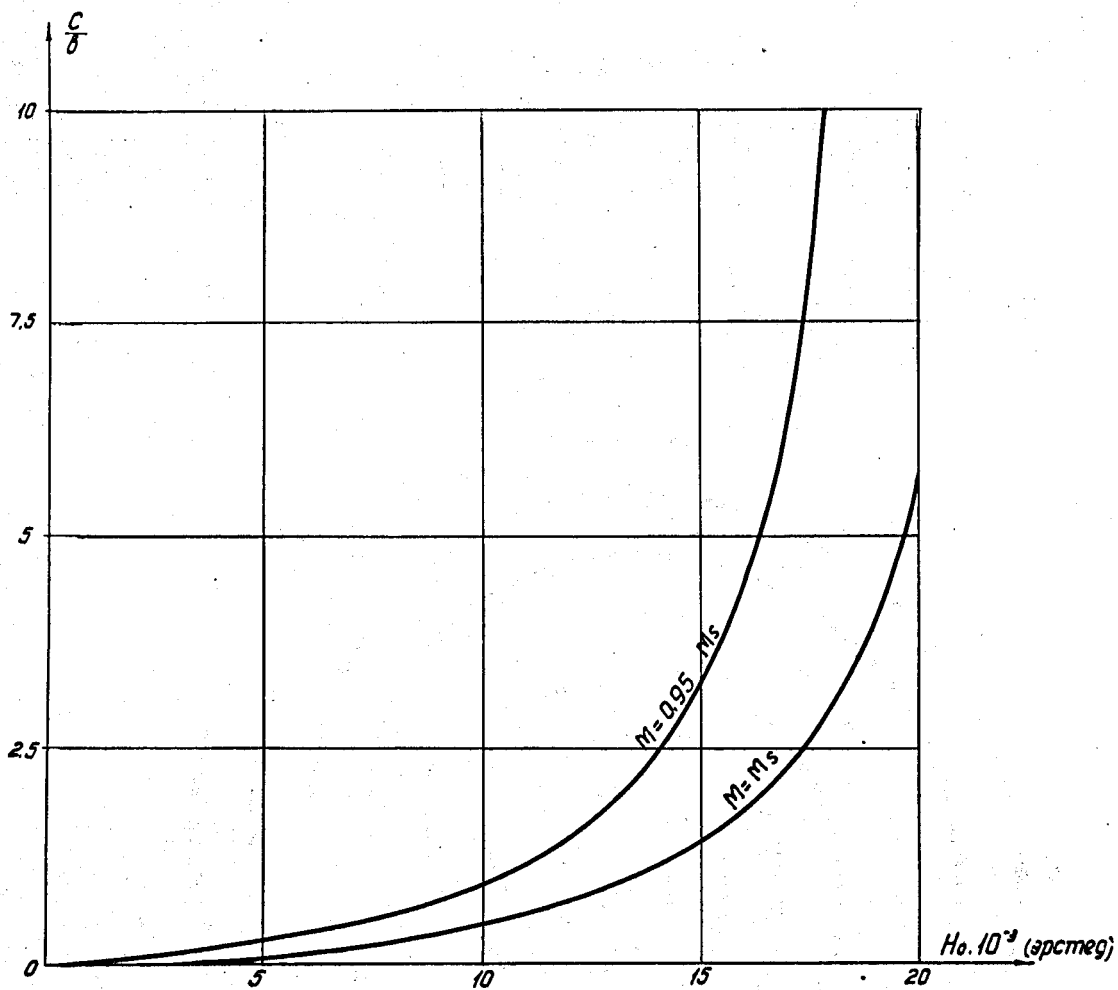


Рис. 3. Насыщение прямолинейного бруска неограниченной длины.

масштаб
5cm

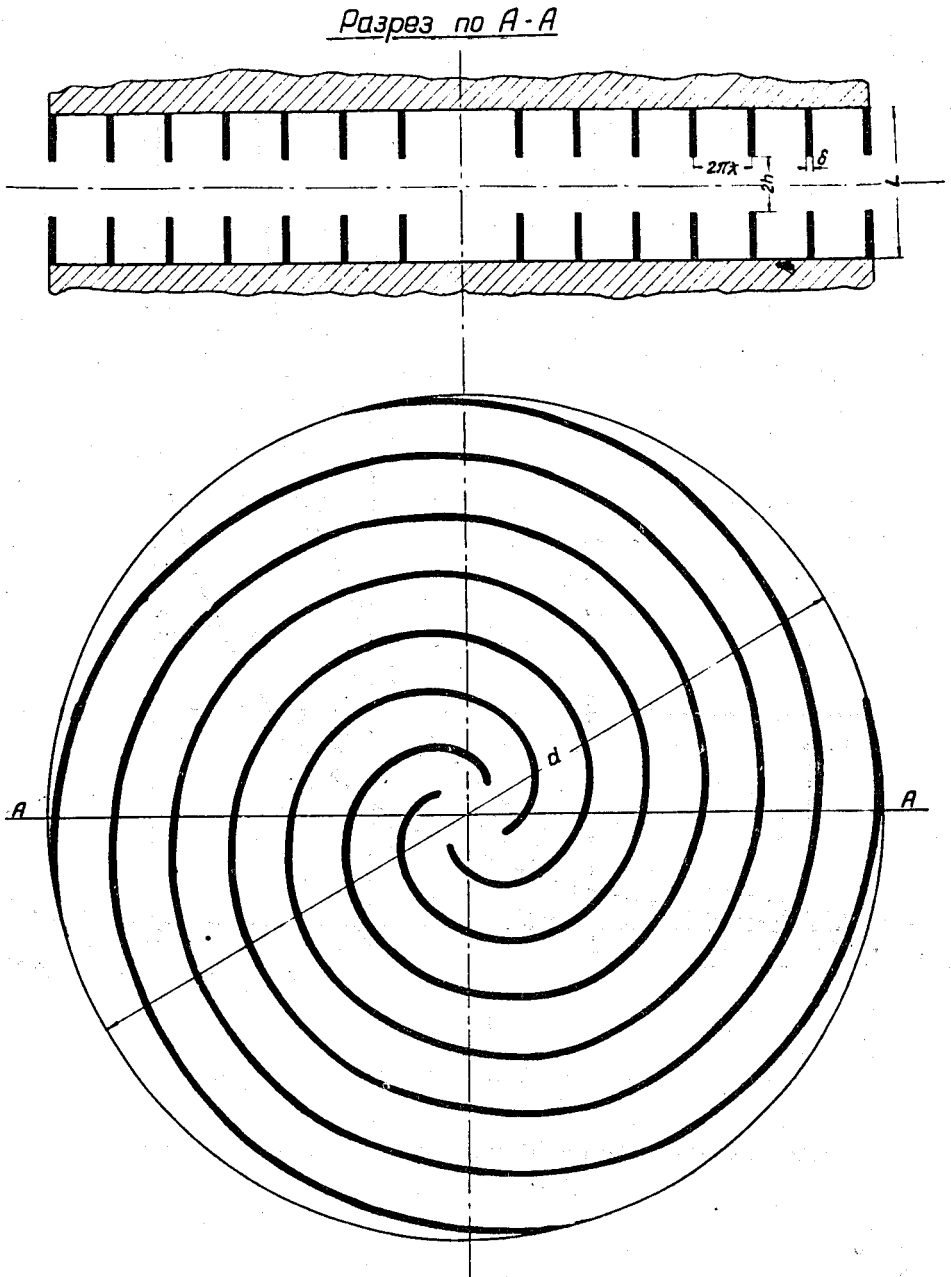


Рис. 4. Схематический чертеж полюсного наконечника со спиральными шиммами при $N = 4$.

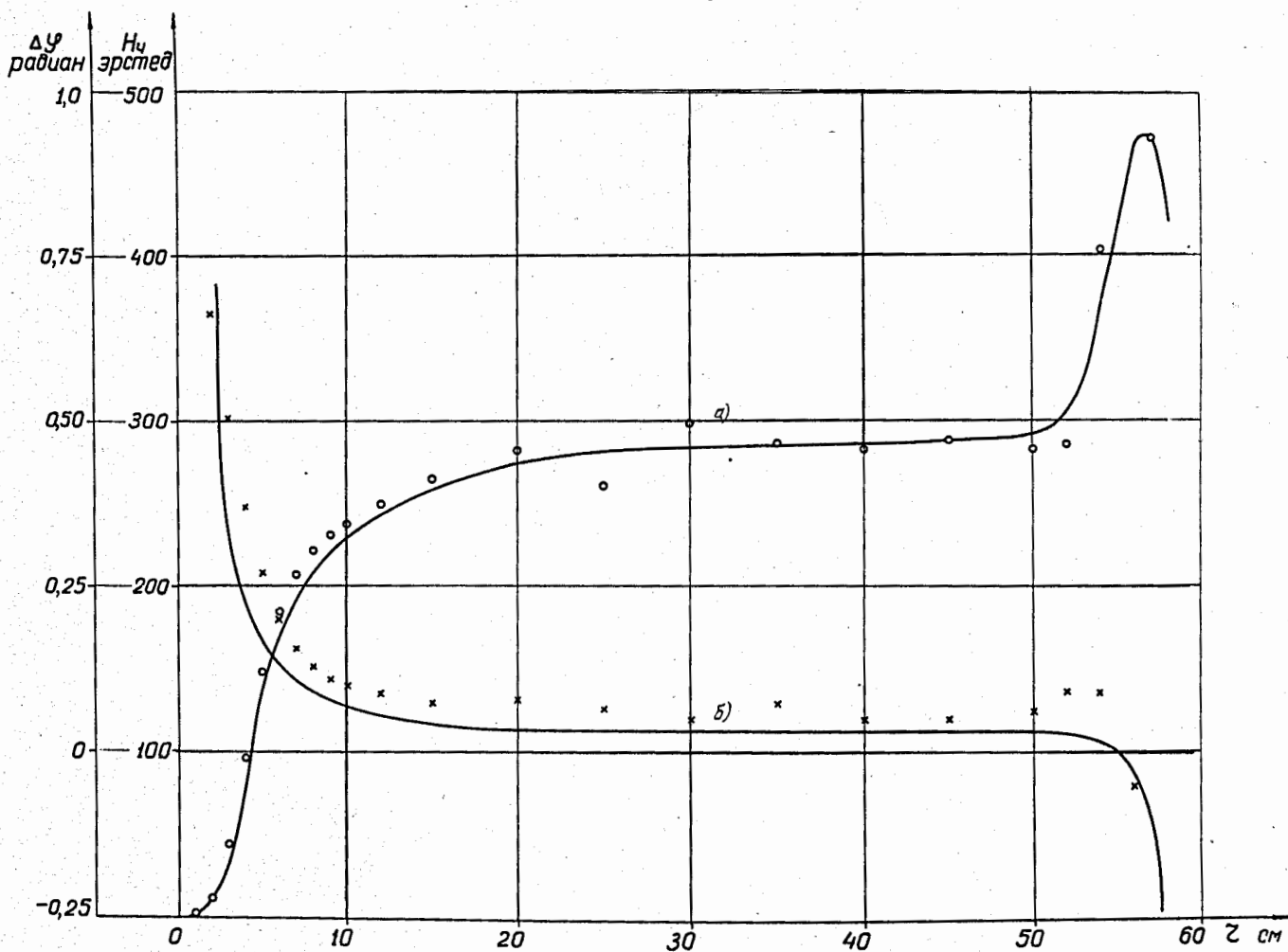


Рис. 5. а/ Зависимость амплитуды 4-ой гармоники магнитного поля от радиуса /----- расчет, о о о о - эксперимент/.

б/ Отклонение фазы 4-ой гармоники магнитного поля от спирали /----- расчет, х х х х - эксперимент/.