ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-407е

В.Г.Соловьев, Тен Гын

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА К ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА

Acta Phys. Hung., 1960, v 11, n 3,
s. 277-284.

Дубна 1959 год

P - 407

В.Г.Соловьев, Тен Гын

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА К ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА

Статистический вариационный принцип [1], являющийся обобщением вариационного принципа, предложенного Боголюбовым [2], дает возможность вычислить термодинамические величины как при нулевой, так и отличной от нуля температуре. В настоящей работе с помощью статистического вариационного принципа проведено исследование сверхтекучего состояния ядра при отличной от нуля температуре: получена температура фазового перехода от сверхтекучего состояния в нормальное и рассмотрено поведение термодинамических величин как при температуре, близкой к $\theta \approx 0$, так и при температуре, близкой к критической $\theta \approx \theta_0$.

Так же, как и в предыдущих работах одного из авторов [3,4], основываясь на оболочечной модели ядра, рассмотрим остаточные взаимодействия нуклонов, находящихся вблизи энергетической поверхности Ферми, т.е.

$$E_F - \delta \leqslant E(s, m) \leqslant E_F + \Delta .$$

Гамильтониан остаточных взаимодействий нуклонов запишем в виде

$$H = \sum_{s,m,\rho} \{E(s,m) - \lambda\} a_{\rho m}(s)^{+} a_{\rho m}(s) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2, s_1', s_2' \\ m_1, m_2, m_1', m_2' \\ \rho_1, \rho_2, \rho_1', \rho_2' \\ \rho_1 m_1 + \rho_2 m_2 = \rho_1' m_1' + \rho_2' m_2' \\ \rho_1 m_1 \neq \rho_1' m_1'}} J(s_1, s_2; s_1', s_2' | m_1, m_2; m_1', m_2') a_{\rho_1 m_1}(s_1)^{+} a_{\rho_2 m_2}(s_2)^{+} \cdot a_{\rho_1' m_1'}(s_1') a_{\rho_2' m_2'}(s_2') . \tag{1}$$

Химический потенциал λ определяется из условия

$$n = \sum_{s,m,\rho} \langle a_{\rho m}(s)^{+} a_{\rho m}(s) \rangle \tag{2}$$

обозначения те же, что и в /4/. Совершим каноническое преобразование

$$a_{\rho m}(s) = u_m(s)\alpha_{m,-\rho}(s) + \rho v_m(s)\alpha_{m\rho}(s)^+ \qquad /3/$$

с условием

$$\eta_m(s) = u_m(s)^2 + v_m(s)^2 - 1 = 0 \qquad /4/$$

и определим новое вакуумное состояние Ψ_0 :

$$\alpha_{m\rho}\Psi_0 = 0.$$

Чтобы избежать перехода от четного ядра к нечетному ядру рассмотрим возбужденные состояния вида

$$\Psi_2 = \alpha_{m+}(s)^+\alpha_{m-}(s)^+\Psi_0. \qquad /5/$$

Гамильтониан представим в виде

$$H = \langle H\rangle + H_0 + H_1, \qquad /6/$$

где

$$H_0 = \sum_{s,m,\rho} E_m(s)\alpha_{m\rho}(s)^+\alpha_{m\rho}(s),$$

причем

$$E_m(s) = 2\{E(s,m)-\lambda\}\{u_m(s)^2 - v_m(s)^2\} - $$
$$-4\sum_{s',m'} J(s,s'|m,m')u_m(s)v_m(s)u_{m'}(s')v_{m'}(s'). \qquad /7/$$

Применяя вариационную теорему Боголюбова, получим верхний предел термодинамического потенциала ядра в следующем виде:

$$\psi = -\theta\sum_{s,m} \ln\left\{2\,\mathrm{ch}\frac{E_m(s)}{\theta}\right\} + \sum_{s,m}\{E(s,m)-\lambda\} -$$
$$-2\sum_{s,s',m,m'} J(s,s'|m,m')\,\mathrm{th}\frac{E_m(s)}{2\theta}\,u_m(s)v_m(s)u_{m'}(s')v_{m'}(s') + \qquad /8/$$

$$+\sum_{s,s',m,m'} J(s,s'|m,m')\,\mathrm{th}\,\frac{E_m(s)}{2\theta}\,\mathrm{th}\,\frac{E_{m'}(s')}{2\theta}\,U_m(s)\,V_m(s)\,U_{m'}(s')\,V_{m'}(s')\,.$$

Из условия минимума термодинамического потенциала получим уравнение для определения U , V :

$$\{E(s,m)-\lambda\}U_m(s)V_m(s)+\frac{8}{\theta}\frac{U_m(s)^2V_m(s)^2}{\mathrm{sh}\,\frac{E_m(s)}{\theta}}\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\mathcal{V}_{m'}(s')U_{m'}(s')V_{m'}(s')+$$

$$+\frac{4}{\theta}\frac{U_m(s)V_m(s)}{\mathrm{sh}\,\frac{E_m(s)}{\theta}}\{U_m(s)^2-V_m(s)^2\}\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')U_{m'}(s')V_{m'}(s')\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{s'',m''}J(s,s''|m,m'')\mathcal{V}_{m''}(s'')U_{m''}(s'')V_{m''}(s'')\;+$$

$$+\frac{2}{\theta}\{U_m(s)^2-V_m(s)^2\}\,\mathrm{cth}\,\frac{E_m(s)}{2\theta}\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\frac{U_{m'}(s')^2V_{m'}(s')^2}{\mathrm{ch}^2\,\frac{E_{m'}(s')}{2\theta}}\,\cdot \qquad /9/$$

$$\cdot\sum_{s'',m''}J(s',s''|m',m'')\mathcal{V}_{m''}(s'')U_{m''}(s'')V_{m''}(s'')\;+$$

$$+\frac{U_m(s)^2-V_m(s)^2}{2}\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\,\mathrm{th}\,\frac{E_m(s)}{2\theta}\,U_{m'}(s')V_{m'}(s')=0\,,$$

где

$$\mathcal{V}_m(s)=\frac{1}{1+e^{E_m(s)/\theta}}\,.$$

Легко видеть, что /9/ допускает тривиальное решение, соответствующее нормальному состоянию, а именно

$$U_m(s)=1-\theta_F(s,m)\,,\quad V_m(s)=\theta_F(s,m)\,,$$

где $\theta_F(s,m)=1$ при $E(s,m)<E_F$ и $\theta_F(s,m)=0$ при $E(s,m)>E_F$.

На основании рассмотрения второй вариации термодинамического потенциала, как в /3/, получим следующее уравнение для нахождения температуры фазового перехода:

$$2|E(s,m)-\lambda| \, cth\frac{|E(s,m)-E_F|}{\Theta_0}\varphi_m(s)+\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\varphi_{m'}(s')=0. \qquad /10/$$

Температуру фазового перехода Θ_0 находим из условия: уравнение /10/ должно иметь отличное от нуля решение. Учитывая малость $|E(s,m)-E_F|/\Theta_0$ и рассматривая приближение[4]

$$J=const., \quad \rho=const. \qquad /11/$$

получим температуру фазового перехода Θ_0 равной

$$\Theta_0=-\frac{J\rho}{2}(\Delta+\delta). \qquad /12/$$

Это выражение отличается на множитель 2 от соответствующего выражения в[3]. Это связано с тем, что мы рассматривали возбужденные состояния вида /5/. Следует заметить, что понятие температуры конечного ядра начинает принимать физический смысл при достаточно сильном возбуждении ядра, т.е. вблизи и выше температуры фазового перехода.

Найдем нетривиальное решение уравнения /9/. Это можно сделать в двух предельных случаях: в случае температуры близкой к нулю и в случае температуры близкой к температуре фазового перехода. В обоих этих случаях уравнение /9/ принимает следующий вид:

$$\xi_m(s)U_m(s)V_m(s)+\frac{U_m(s)^2-V_m(s)^2}{2}\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\, th\frac{E_{m'}(s')}{2\Theta}\cdot U_{m'}(s')V_{m'}(s')=0, \qquad /13/$$

где

$$\xi_m(s)=E(s,m)-\lambda.$$

Введем новую функцию

$$C_m(s)=\sum_{s',m'}J(s,s'|m,m')\, th\frac{E_{m'}(s')}{2\Theta}U_{m'}(s')V_{m'}(s') \qquad /14/$$

и положим

$$U_m(s)^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\xi_m(s)}{\sqrt{C_m(s)^2 + \xi_m(s)^2}}\right\},\quad V_m(s)^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\xi_m(s)}{\sqrt{C_m(s)^2 + \xi_m(s)^2}}\right\}$$

тогда из /13/ получим

$$U_m(s)\,V_m(s) = -\frac{C_m(s)}{2\sqrt{C_m(s)^2 + \xi_m(s)^2}}$$

и уравнение для $C_m(s)$ принимает вид, сходный с /12/ в /5/

$$C_m(s) = -\frac{1}{2}\sum_{s',m'} J(s,s'|m,m')\,\mathrm{th}\,\frac{E_{m'}(s')}{2\theta}\,\frac{C_{m'}(s')}{\sqrt{C_{m'}(s')^2 + \xi_{m'}(s')^2}}\,. \qquad /15/$$

В приближении /11/ уравнение /15/ получим в виде

$$1 = -\frac{J\rho}{2}\int_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta} \frac{\mathrm{th}\,\frac{E(\xi)}{2\theta}}{\sqrt{C^2+\xi^2}}\,d\xi\,, \qquad /16/$$

причем

$$E(\xi) = E_m(s) =$$

$$= \frac{2\xi^2}{\sqrt{C^2+\xi^2}} - \frac{J\rho C^2}{\sqrt{C^2+\xi^2}}\int_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta}\frac{d\xi'}{\sqrt{C^2+\xi'^2}}\,. \qquad /17/$$

Уравнение /2/, определяющее химический потенциал, в этом приближении запишем так:

$$n = \rho\int_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta}\left\{1 - \frac{\xi}{\sqrt{C^2+\xi^2}}\right\}d\xi\,, \qquad /18/$$

а термодинамический потенциал системы в следующем виде:

$$\psi = \rho\int_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta}\Big\{-\theta\ln\left(1+e^{-\frac{E(\xi)}{\theta}}\right) - \frac{E(\xi)}{2} + \xi +$$

$$+\frac{C^2}{\sqrt{C^2+\xi^2}}\Big\}\,d\xi+\frac{C^2}{J}\,. \qquad /19/$$

Заметим, что при $\Theta = 0$, уравнения / 16/ , /18/ решаются просто и величина C_0 и λ_0 получены в [4].

Найдем явный вид C и λ в каждом из предельных случаев.

Случай 1. $\Theta \approx 0$, т.е. температура Θ близка к нулю.

Разлагая

$$th\,\frac{E(\xi)}{2\Theta}\approx 1-e^{-\frac{2\sqrt{C_0^2+\xi^2}}{\Theta}}\,,$$

получим

$$1=-\frac{J\rho}{2}\int\limits_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta}\frac{d\xi}{\sqrt{C^2+\xi^2}}-K(\theta)\,,$$

где

$$K(\theta)=-\frac{J\rho}{2}\int\limits_{E_F-\lambda_0-\delta}^{E_F-\lambda_0+\Delta}\frac{e^{-\frac{2\sqrt{C_0^2+\xi^2}}{\Theta}}}{\sqrt{C_0^2+\xi^2}}\,d\xi\,.$$

Решая в этом приближении /16/ , /18/, получим

$$C = \frac{\sqrt{(2\Omega - n)n}}{\rho(e^{2/G}-1)} e^{1/G} \left\{ 1 - \frac{K(\theta)}{G} \operatorname{cth} \frac{2}{G} \right\} \qquad /20/$$

$$E_F - \lambda = \frac{\Omega - n}{\rho(e^{2/G}-1)} \left\{ 1 - 2\frac{K(\theta)}{G} \frac{1}{1-e^{-2/G}} \right\}, \qquad /21/$$

где $G = -J\rho$, n - число нуклонов, а Ω - число уровней вблизи поверхности Ферми.

Случай 11. $\theta \approx \theta_0$, т.е. температура θ слегка меньше температуры фазового перехода θ_0 .

В этом случае /13/ принимает вид

$$\xi_m(s) U_m(s) V_m(s) + \frac{1}{4\theta} \left\{ U_m(s)^2 - V_m(s)^2 \right\} \sum_{s',m'} J(s,s'|m,m') \cdot$$

$$\cdot\, U_{m'}(s') V_{m'}(s') = 0 \qquad /22/$$

$$C_m(s) = \frac{1}{2\theta} \sum_{s',m'} J(s,s'|m,m')\, E_{m'}(s')\, U_{m'}(s')\, V_{m'}(s').$$

В приближении /11/ для определения C получим уравнение

$$1 = \frac{G}{2\theta} \int_{E_F-\lambda-\delta}^{E_F-\lambda+\Delta} \frac{\xi^2}{C^2+\xi^2}\, d\xi \qquad /23/$$

откуда $$\left(\frac{\partial C^2}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} = -\frac{1}{4\theta_0} \frac{n(2\Omega-n)}{\rho^2} .$$

Оставляя только линейный член в разложении $C(\theta)$ около $\theta = \theta_0$ получим

$$C^2 = \frac{1}{4\rho^2} n(2\Omega-n)\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right) \qquad /24/$$

Энтропия S и свободная энергия E системы связаны с термодинамическим потенциалом следующими соотношениями:

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{d\psi}{dc^2}\frac{\partial c^2}{\partial \theta}$$

$$E = \theta S + \psi.$$

Легко показать, что производная $\frac{d\psi}{dc^2}$ исчезает в точке θ_0, и вследствие этого энтропия S не испытывает скачка в точке θ_0, поэтому фазовый переход системы из сверхтекучего состояния в нормальное является фазовым переходом второго рода.

Л и т е р а т у р а

1. И. А.Квасников, В.В.Толмачев. ДАН СССР, 120, 273, /1958/.

2. Н.Н.Боголюбов. ДАН СССР, 119, 244 /1958/.

3. В.Г.Соловьев. ЖЭТФ, 35, 823 /1958/, 36, 3 293, /1959/. ДАН СССР, 123, 652 /1958/, Nucl.Phys. 9. 655 /1958/1959/.

4. В.Г.Соловьев. ЖЭТФ, 36, 1869 /1959/.

5. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников. ДАН СССР, 117, 788 3 /1957/.

Рукопись поступила в издательский отдел 18 сентября 1959 года.