ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН СССР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

Р - 397

В.Б. Беляев, С.С. Герштейн, Б.Н. Захарьев, С.П. Ломнев

ЛЯП
Л.И. Лапидусу

μ^- -МЕЗОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОДОРОДЕ

Дубна 1959 год

Р - 397

В.Б. Беляев, С.С. Герштейн, Б.Н. Захарьев, С.П. Ломнев

μ^--МЕЗОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОДОРОДЕ

Аннотация

Рассмотрен ряд мезоатомных и мезомолекулярных процессов в среде изотопов водорода /образование мезомолекул: $H_\mu^{(1)} + H^{(2)} \rightarrow (H^{(1)}H^{(2)})_\mu$ /; упругие столкновения и перезарядка мезоатомов: $H_\mu^{(1)} + H^{(2)} \rightarrow H_\mu^{(1)} + H^{(2)}$; $H_\mu^{(1)} + H^{(2)} \rightarrow H^{(1)} + H_\mu^{(2)}$ /. Определены уровни мезомолекул. Вычисления производились на электронной машине БЭСМ с учетом поправок порядка m_μ/M на движение ядер.

Особенностью мезоатомов водорода является их нейтральность, поскольку на расстояниях, больших боровской орбиты мезоатома /$2{,}56\cdot10^{-11}$ см/, заряд ядра почти полностью экранируется зарядом мезона. Это обстоятельство обуславливает ряд мезомолекулярных процессов, происходящих с μ^- -мезонами в водороде /или в смеси изотопов водорода/, таких, как обмен μ^- -мезоном между различными ядрами /перезарядка/, образование мезомолекул водорода и т.д. Эти процессы во многом определяют катализ ядерных реакций в водороде, предсказанный Франком[1], Зельдовичем[2] и Сахаровым[3] и экспериментально исследованный в работах[4,5]. С другой стороны, как отмечено в[6-8], мезомолекулярные процессы в водороде весьма существенны для возможности экспериментального определения закона взаимодействия $\mu^- + p \to n + \nu$ /в частности, для возможности экспериментально различать $V-A$ и $V+A$ варианты[8]/.

Некоторые μ^- мезомолекулярные процессы в водороде рассматривались в более ранних работах.

В работе[11] вычислены уровни мезомолекулярных ионов $(pp)_\mu$; $(pd)_\mu$ $(dd)_\mu$ и сечения процессов $d_\mu + p \to d_\mu + p$; $p_\mu + p \to (pp)_\mu$; $d_\mu + p \to (dp)_\mu$. Большое расхождение с нашими результатами имеется для верхнего уровня $(dd)_\mu$ с $L=0$. Сечение рассеяния d_μ на p у нас не стремится к нулю с энергией.

В [12] вычислялась вероятность перезарядки $p_\mu + d \to d_\mu + p$ методом, аналогичным изложенному в настоящей работе. Однако для потенциалов E_g и E_u и для поправок K_{gg} и K_{uu} были взяты более грубые функции, чем приведенные в [14], [15]. Кроме того авторы[12] предполагали, что при $R \geqslant 6$ решения системы выходят на асимптотику, что не вполне корректно /см. таблицу волновых функций/.

В работе[18] вычислены основные уровни в мезомолекулярных ионах. При этом не учитывались поправки порядка m_μ/M к потенциальной энергии. Кроме того нахождение собственных значений для молекул с разными ядрами требует решения системы из двух уравнений /ввиду наличия дипольного момента, осуществляющего переходы между состояниями H и g. В [20] определяются уровни в $(pp)_\mu$; $(pd)_\mu$; $(dd)_\mu$ без унета поправок на движение ядер. Уравнение для мезонной функции менее точно чем[14].

В работе[19] даны оценки основных уравнений мезомолекулярных ионов и вероятностей реакций $d + p_\mu \to d_\mu + p$; $d_\mu + p \to (pd)_\mu$.

Рассмотрим систему, состоящую из ядер изотопов водорода с массами M_1 и M_2 и μ^- -мезона. Пусть $\vec{r}$, $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ – координаты μ^- -мезона и ядер[x]. Гамильтониан системы в пренебрежении спиновыми взаимодействиями имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{2M_1}\Delta_{\vec{R}_1} - \frac{1}{2M_2}\Delta_{\vec{R}_2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} , \qquad /1/$$

где

$$r_1 = |\vec{r} - \vec{R}_1| ; \quad r_2 = |\vec{r} - \vec{R}| ; \quad R = |\vec{R}_2 - \vec{R}_1| .$$

Считая, что μ^- -мезон находится на K-орбите, будем искать волновую функцию системы в виде:

$$\Psi = \varphi(\vec{R})\Sigma_g(R,\vec{r}) + H(\vec{R})\Sigma_u(R,\vec{r}), \qquad /2/$$

где $\varphi(\vec{R})$ и $H(\vec{R})$ описывают относительное движение ядер, а Σ_g и Σ_u представляют волновые функции μ^- -мезона в поле неподвижных ядер, находящихся друг от друга на расстоянии R[xx]. При $R \to \infty$

$$\Sigma_g \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r_1} + e^{-r_2}\right) ; \quad \Sigma_u \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r_1} - e^{-r_2}\right), \qquad /3/$$

а при $R \to 0$ Σ_g и Σ_u переходят соответственно в волновые функции 1s и 2p состояния иона He .

Подставляя /2/ в уравнение Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \qquad /4/$$

---

x/ В дальнейшем мы будем пользоваться мезоатомными единицами $\hbar = 1$ $e = 1$, $m_\mu = 207 m_e = 1$. Мезоатомная единица длины $\hbar^2/m_\mu e^2 = 2{,}56 \cdot 10^{-11}$ см,

xx/ Отметим, что поскольку волновая функция (2) зависит от разностей координат частиц в выбранной нами системе координат, центр тяжести системы покоится.

и учитывая, что волновые функции Σ_g и Σ_u удовлетворяют уравнению:

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}\right)\Sigma_i = E_i(R)\,\Sigma_i(R,\vec{r}) \qquad i=g,u \qquad /5/$$

получим после умножения на Σ_g и Σ_u и интегрирования по координатам μ^- -мезона систему уравнений для $\mathcal{G}(\vec{R})$ и $H(\vec{R})$:

$$-\frac{1}{2M_{12}}\Delta_{\vec{R}}\mathcal{G} + \left(E_g + \frac{1}{2M_{12}}K_{gg}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2M_{12}}K_{gu}H - \frac{1}{M_{12}}\vec{Q}_{gu}\vec{\nabla}_{\vec{R}}H = E\mathcal{G}$$

$$-\frac{1}{2M_{12}}\Delta_{\vec{R}}H + \left(E_u + \frac{1}{2M_{12}}K_{uu}\right)H + \frac{1}{2M_{12}}K_{ug}\mathcal{G} - \frac{1}{M_{12}}\vec{Q}_{ug}\vec{\nabla}_{\vec{R}}\mathcal{G} = EH \qquad /6/$$

где $1/M_{12} = 1/M_1 + 1/M_2$; $R = R_2 - R_1$, а величина $\frac{1}{2M_{12}}K_{ij}$; $\frac{1}{M_{12}}\vec{Q}_{ij}$ является матричными элементами между функциями Σ_g и Σ_u от операторов

$$\frac{1}{2M_{12}}\hat{K} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1}\Delta_{\vec{R}_1} + \frac{1}{M_2}\Delta_{\vec{R}_2}\right) \qquad /7/$$

$$\frac{1}{M_{12}}\hat{\vec{Q}} = \left(-\frac{1}{M_1}\vec{\nabla}_{\vec{R}_1} + \frac{1}{M_2}\vec{\nabla}_{\vec{R}_2}\right). \qquad /8/$$

Легко показать, что в силу условий нормировки Σ_g и Σ_u диагональные матричные элементы оператора $\hat{Q}$ равны нулю, а недиагональные ввиду ортогональности Σ_g и Σ_u противоположны по знаку:

$$\vec{Q}_{gu} = -\vec{Q}_{ug} = \vec{Q}. \qquad /9/$$

Если пользоваться свойствами симметрии Σ_g и Σ_u относительно перестановки ядер, то можно выделить в матричных элементах зависимость от масс:

$$K_{ii} = \int \Sigma_i\left(-\Delta_{\vec{R}_1}\right)\Sigma_i\, d\tau \qquad i=g,u \qquad /10/$$

$$K_{ij} = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \int \Sigma_i \left(-\Delta_{\vec{R}_1}\right) \Sigma_j \, d\tau \qquad /11/$$

$$\vec{Q} = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \int \Sigma_g \left(-\vec{\nabla}_{\vec{R}_1}\right) \Sigma_u \, d\tau = Q \frac{\vec{R}}{R} \qquad /12/$$

Таким образом в случае одинаковых ядер $M_1 = M_2$ система уравнений /6/ распадается на два независимых уравнения. Этот результат вполне понятен, так как волновая функция /2/ для одинаковых ядер в силу симметрии может включать в себя только один член /либо Σ_g, либо Σ_u /. Члены $\frac{1}{2M_{12}} K_{ij}(R)$; $\frac{1}{M_{12}} \cdot Q(R)$ представляют собой поправки к адиабатическим потенциалам, учитывающие с точностью первого порядка по m_μ / M_{12} движение ядер. Поскольку для мезона отношение m_μ / M_{12} не столь мало, как для электрона, указанные члены вносят существенный вклад. При $R \to \infty$; $Q \to 0$, а члены $\frac{1}{2M_{12}} K_{ij}(\infty)$ представляют поправки с точностью $\left(m_\mu/M_1\right)^2$; $\left(m_\mu/M_2\right)^2$ учитывающие приведенные массы изолированных мезоатомов. Действительно, заметив, что энергия изолированных мезоатомов /в мезоатомных единицах/

$$E_1^\circ = -\frac{1}{2} \frac{M_1}{M_1 + 1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{2M_1} ;$$

$$E_2^\circ = -\frac{1}{2} \frac{M_2}{M_2 + 1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{2M_2} ; \qquad /13/$$

и учитывая, что матричные элементы оператора $\left(-\Delta_{\vec{R}_1}\right)$ при $R \to \infty$ равны 1/2 /см. Приложение/, можно записать:

$$\left\{ E_g(\infty) + \frac{1}{2M_{12}} K_{gg}(\infty) \right\} = \left\{ E_u(\infty) + \frac{1}{2M_{12}} K_{uu}(\infty) \right\} = \frac{1}{2}\left(E_1^\circ + E_2^\circ\right) \qquad /14/$$

$$\frac{1}{2M_{12}} K_{gu}(\infty) = \frac{1}{2M_{12}} K_{ug}(\infty) = \frac{1}{2}\left(E_1^\circ - E_2^\circ\right) = \frac{1}{2} \Delta E . \qquad /15/$$

Выделяя в величинах $E_g(R)$; $E_u(R)$ и $\frac{1}{2M_{12}} K_{ij}(R)$ их значения при

$\mathcal{R} = \infty$:

$$E_{g,u}(\mathcal{R}) = E_{g,u}(\infty) + E'_{g,u}(\mathcal{R}) \qquad /16/$$

$$K_{ij}(\mathcal{R}) = K_{ij}(\infty) + K'_{i,j}(\mathcal{R}),$$

перепишем систему уравнений /6/ в виде

$$-\frac{1}{2M_{12}}\Delta_{\vec{\mathcal{R}}}\,\Psi + \left(E'_g + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gg}\right)\Psi + \left(\frac{1}{2}\Delta E + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gu}\right)H - \frac{1}{M_{12}}Q\,\frac{dH}{d\mathcal{R}} = E'\Psi\,;$$

$$-\frac{1}{2M_{12}}\Delta_{\vec{\mathcal{R}}}\,H + \left(E'_u + \frac{1}{2M_{12}}K'_{uu}\right)H + \left(\frac{1}{2}\Delta E + \frac{1}{2M_{12}}K'_{ug}\right)\Psi + \frac{1}{M_{12}}Q\,\frac{d\Psi}{d\mathcal{R}} = E'H\,;$$

где $\Delta E = E_1^\circ - E_2^\circ$, а энергия E' отсчитывается от средних уровней изолированных мезоатомов:

$$E' = E - \frac{1}{2}\left(E_1^\circ + E_2^\circ\right). \qquad /17/$$

/В случае одинаковых ядер E' отсчитывается просто от уровня изолированного мезоатома/.

Выделяя угловую зависимость $\Psi(\vec{\mathcal{R}})$ и $H(\vec{\mathcal{R}})$:

$$\Psi_i(\vec{\mathcal{R}}) = \frac{1}{\mathcal{R}}\,g_L(\mathcal{R})\;Y_{L,M_L}(\theta,\varphi)\,;$$

$$H_L(\vec{\mathcal{R}}) = \frac{1}{\mathcal{R}}\,h_L(\mathcal{R})\;Y_{L,M_L}(\theta,\varphi)\,; \qquad /18/$$

/где $Y_{L,M_L}(\theta,\varphi)$ / - сферическая функция/ получим для $g(\mathcal{R})$ и $h(\mathcal{R})$ уравнения:

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2 g_L}{d\mathcal{R}^2} + \left(E'_g + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gg} + \frac{L(L+1)}{2M_{12}\mathcal{R}^2}\right)g_L + \left(\frac{1}{2}\Delta E + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gu}\right)h_L - $$
$$- \frac{1}{M_{12}}Q\mathcal{R}\,\frac{d}{d\mathcal{R}}\left(\frac{h_L}{\mathcal{R}}\right) = E'g_L$$

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2 h_L}{d\mathcal{R}^2} + \left(E'_u + \frac{1}{2M_{12}}K'_{uu} + \frac{L(L+1)}{2M_{12}\mathcal{R}^2}\right)h_L + \left(\frac{1}{2}\Delta E + \frac{1}{2M_{12}}K'_{u,g}\right)g_L + \qquad /19/$$
$$+ \frac{1}{M_{12}}Q\mathcal{R}\,\frac{d}{d\mathcal{R}}\left(\frac{g_L}{\mathcal{R}}\right) = E'h_L$$

Потенциалы $E_g(\mathcal{R})$ и $E_u(\mathcal{R})$ определялись путем решения уравнений /5/ многими авторами, начиная с работы [/17/]. В настоящей работе использованы значения $E_g(\mathcal{R})$ и $E_u(\mathcal{R})$, взятые из работы [/14/]. Значения функций $K'_{gg}(\mathcal{R})$ и $K'_{uu}(\mathcal{R})$ могут быть получены пересчетом из [/15/], а значения $Q(\mathcal{R})$, $K'_{ug}(\mathcal{R})$, $K'_{gu}(\mathcal{R})$ вычислены в приближении "соединенного атома" (UA) и "линейной комбинации атомных орбит" $(LCAO)$ соответственно для малых и больших значений $\mathcal{R}$ /подробнее см. Дополнение/. Для исследования асимптотического поведения решения при $\mathcal{R}\to\infty$ удобно ввести функции

$$a_L(\mathcal{R}) = \left\{g_L + h_L\right\}/\sqrt{2} \quad ; \quad b_L(\mathcal{R}) = \left\{g_L(\mathcal{R}) - h_L(\mathcal{R})\right\}/\sqrt{2}. \qquad /20/$$

Сравнивая /2/ и /3/, легко заметить, что функции $a(\mathcal{R})$ и $b(\mathcal{R})$ при $\mathcal{R}\to\infty$ описывают соответственно радиальное движение ядра с массой M_2 относительно мезоатома M_1 и ядра с массой M_1 относительно мезоатома с массой M_2.

Функции /20/ удовлетворяют уравнениям:

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2a_L}{d\mathcal{R}^2} + \left\{\frac{1}{2}\left[\left(E_g' + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gg}\right) + \left(E_u' + \frac{1}{2M_{12}}K'_{uu}\right)\right] + \frac{1}{4M_{12}}\left(K'_{gu} + K'_{ug}\right) + \frac{L(L+1)}{2M_{12}\mathcal{R}^2} + \right. \qquad /21a/$$

$$\left. + \frac{\Delta E}{2}\right\}a_L + \left\{\frac{1}{2}\left[\left(E_g' + \frac{1}{2M_{12}}K'_{gg}\right) - \left(E_u' + \frac{1}{2M_{12}}K'_{uu}\right)\right] - \frac{1}{4M_{12}}\left(K'_{gu} - K'_{ug}\right)\right\}b_L + \frac{Q\mathcal{R}}{M_{12}}\frac{d}{d\mathcal{R}}\left(\frac{b_L}{\mathcal{R}}\right) = E'a_L;$$

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2b_L}{d\mathcal{R}^2} + \left\{\frac{1}{2}\left[\left(E_g' + \frac{K'_{gg}}{2M_{12}}\right) + \left(E_u' + \frac{K'_{uu}}{2M_{12}}\right)\right] - \frac{1}{4M_{12}}\left(K'_{gu} - K'_{ug}\right) + \frac{L(L+1)}{2M_{12}\mathcal{R}^2} - \frac{\Delta E}{2}\right\}b_L + \qquad /21в/$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[\left(E_g' + \frac{K'_{gg}}{2M_{12}}\right) - \left(E_u' + \frac{K'_{uu}}{2M_{12}}\right)\right] + \frac{1}{4M_{12}}\left(K'_{gu} - K'_{ug}\right)\right\}a_L - \frac{Q\mathcal{R}}{M_{12}}\frac{d}{d\mathcal{R}}\left(\frac{a_L}{\mathcal{R}}\right) = E'b_L;$$

и граничному условию при $\mathcal{R}=0$

$$a(0) = b(0) = 0 \qquad /22/$$

Уравнения /21/ при $R \to \infty$ имеют вид:

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2a}{dR^2} = \left(E' - \frac{1}{2}\Delta E\right)a\ ; \qquad /23/$$

$$-\frac{1}{2M_{12}}\frac{d^2b}{dR^2} = \left(E' + \frac{1}{2}\Delta E\right)b\ .$$

Пусть для определенности $M_1 \leq M_2$, так что $\Delta E > 0$. Тогда в зависимости от E' возможны три типа движений.

а/ $E' \geq \frac{1}{2}\Delta E$, т.е. энергия лежит выше K- уровня более легкого мезоатома. Мезон может находиться как у ядра M_2, так и у ядра M_1. Если первоначально мезон находился у ядра M_1 и происходит перезарядка к ядру M_2, то волновые функции необходимо подчинить условию, заключающемуся в том, что $b(R)$ при $R \to \infty$ должно содержать только расходящуюся волну

$$a(R) \approx C_1 e^{i\kappa_1 R} + C_2 e^{-i\kappa_1 R}\ ; \qquad /24/$$

$$b(R) \approx C_3 e^{i\kappa_2 R} + C_4 e^{-i\kappa_2 R}\ ; \qquad /25/$$

где $C_4 = 0$; $\kappa_1^2 = 2M_{12}\left(E' - \frac{\Delta E}{2}\right)$; $\kappa_2^2 = 2M_{12}\left(E' + \frac{\Delta E}{2}\right)$.

в/ $-\frac{1}{2}\Delta E \leq E' \leq \frac{1}{2}\Delta E$ т.е. энергия заключена в промежутке между изолированными мезоатомами. При $R \to \infty$ мезон не может по энергетическим причинам находиться у более легкого ядра. Этот случай соответствует рассеянию мезоатома с ядром M_2 на ядре M_1, без возможности перезарядки. Волновые функции должны быть подчинены условию, согласно которому функция $a(R)$ при $R \to \infty$ не должна содержать экспоненциально растущий член

$$a(R) \approx D_1 e^{-\varkappa_1 R} + D_2 e^{\varkappa_1 R} \qquad /26/$$

$$b(R) \approx D_3 e^{-i\kappa_2 R} + D_4 e^{i\kappa_2 R} \qquad /27/$$

где $D_2 = 0$; $\varkappa_1^2 = -\kappa_1^2 = 2M_{12}\left(E' - \frac{1}{2}\Delta E\right)$.

Очевидно, что условия /22/ и /26/ /точно также, как и условия /22/ и /24// могут быть удовлетворены при любой энергии, взятой из рассматриваемой области энергий, и с точностью до нормировки определяют решение системы уравнений /21/.

c/ $E' < -\frac{1}{2}\Delta E$ является областью дискретного спектра, соответствующего связанным состояниями мезомолекул. При $\mathcal{R} \to \infty$ на решение системы накладывается два условия: отсутствие растущих экспонент в обоих функциях $a(\mathcal{R})$ и $b(\mathcal{R})$:

$$a(\mathcal{R}) \approx F_1 e^{-\varkappa_1 \mathcal{R}} + F_2 e^{\varkappa_1 \mathcal{R}}$$
$$b(\mathcal{R}) \approx F_3 e^{-\varkappa_2 \mathcal{R}} + F_4 e^{\varkappa_2 \mathcal{R}}, \qquad /28/$$

где $F_2(E') = 0$; $F_4(E') = 0$

$$\varkappa_1^2 = 2M_{12}\left(|E'| + \frac{1}{2}\Delta E\right); \quad \varkappa_2^2 = 2M_{12}\left(|E'| - \frac{1}{2}\Delta E\right). \qquad /29/$$

Условиям /28/ и /22/ возможно удовлетворить только при определенных значениях E', являющихся энергетическими уровнями мезомолекулы. Для нахождения решений, удовлетворяющих условиям /22/ при $\mathcal{R} = 0$ и асимптотическим условиям типа /24/, /26/ или /28/ при $\mathcal{R} \to \infty$ можно поступить следующим образом: найти два линейно независимых решения, удовлетворяющих условию /22/ и построить из них линейную комбинацию, удовлетворяющую асимптотическим условиям при $\mathcal{R} \to \infty$. Заметим, что между любыми двумя решениями системы линейных уравнений 2-го порядка /16/ существует связь, которую легко установить, заметив, что

$$K'_{gu} - K'_{ug} = -2\,\mathrm{div}\,\vec{Q}. \qquad /30/$$

Действительно, если $\{\mathcal{G}_1 ; H_1\}$ и $\{\mathcal{G}_2 ; H_2\}$ решения системы /16/, то

$$\operatorname{div}\left\{\left(\varphi_2\vec{\nabla}\varphi_1-\varphi_1\vec{\nabla}\varphi_2\right)+\left(H_2\vec{\nabla}H_1-H_1\vec{\nabla}H_2\right)+2\vec{Q}\left(H_1\varphi_2-H_2\varphi_1\right)\right\}=0 \qquad /31/$$

Для функций /20/, удовлетворяющих условию /22/, тождество /31/ принимает вид

$$\left(a_2\frac{da_1}{d\mathcal{R}}-a_1\frac{da_2}{d\mathcal{R}}\right)+\left(b_2\frac{db_1}{d\mathcal{R}}-b_1\frac{db_2}{d\mathcal{R}}\right)+2Q\left(a_1b_2-a_2b_1\right)=0. \qquad /32/$$

Соотношение /32/ может быть использовано для проверки правильности выполнения численного интегрирования. В качестве линейно независимых решений уравнений /21/ можно, например, выбрать решения, задаваемые при $\mathcal{R}=0$ x/ условиями:

$$\mathrm{I}\begin{cases} a(0)=b(0)=0 & g=h=0\ ; \\ a'(0)=b'(0)=1 & g'=\sqrt{2}\ ;\ h'=0\ ; \end{cases} \qquad /33/$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} a(0)=b(0)=0 & g=h=0\ ; \\ a'(0)=-b'(0)=1 & g'=0\ ;\ h'=\sqrt{2}\ ; \end{cases} \qquad /34/$$

Сечения перезарядки

Пусть в области энергий $E'\geq\frac{1}{2}\Delta E$ решения /20/, задаваемые условиями соответственно /24/ и /25/, имеют при $\mathcal{R}\to\infty$ вид

$$\mathrm{I}\begin{cases} a_L^{(1)}\approx a_0^{(1)}\sin\left(k_1\mathcal{R}-\frac{\pi L}{2}+\gamma_1\right) \\ b_L^{(1)}\approx b_0^{(1)}\sin\left(k_2\mathcal{R}-\frac{\pi L}{2}+\delta_1\right) \end{cases} \quad \mathrm{II}\begin{cases} a_L^{(2)}\approx a_0^{(2)}\sin\left(k_1\mathcal{R}-\frac{\pi L}{2}+\gamma_2\right) \\ b_L^{(2)}\approx b_0^{(2)}\sin\left(k_2\mathcal{R}-\frac{\pi L}{2}+\delta_2\right), \end{cases} \qquad /35/$$

---

x/ Поскольку функции $a(\mathcal{R})$ и $b(\mathcal{R})$ экспоненциально затухают внутрь потенциальных барьеров при $\mathcal{R}\to 0$ можно при численном интегрировании без заметной ошибки задавать условия (33,34) для некоторого малого $\mathcal{R}\neq 0$ $(\mathcal{R}_0=0{,}2)$. Это соответствует замене потенциалов $E_g+\frac{1}{2M_{12}}K_{gg}$ и $\mathcal{K}E_u+\frac{1}{2M_{12}}K_{uu}$ на бесконечные стенки при $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0$.

где константы $a_o^{(i)}$; $b_o^{(i)}$ определяются в результате численного интегрирования /21/. Согласно /32/ между коэффициентами и фазами /35/ имеет место связь

$$K_1 a_o^{(1)} a_o^{(2)} \sin \gamma_{21} + K_2 b_o^{(1)} b_o^{(2)} \sin \delta_{21}, \qquad /36/$$

где

$$\gamma_{21} = \gamma_2 - \gamma_1 \quad ; \quad \delta_{21} = \delta_2 - \delta . \qquad /37/$$

Составляя из /35/ линейную комбинацию, удовлетворяющую условиям /33/, /34/ и нормировке при $R \to \infty$, получим

$$a \approx \frac{\alpha e^{i(K_1 R - \frac{\pi L}{2})} - e^{-i(K_1 R - \frac{\pi L}{2})}}{2 i K_1}$$

$$b(R) \simeq - \frac{N_1 N_2 \sin \delta}{(N_2 e^{-i\gamma_1} - N_1 e^{-i\gamma_2 + i\delta}) K_1} e^{i(K_2 R - \frac{\pi L}{2} + \delta_2)}, \qquad /38/$$

где

$$N_1 = \frac{b_1^o}{a_1^o} ; \quad N_2 = \frac{b_2^o}{a_2^o} ; \quad \alpha = \frac{N_2 e^{i\gamma_1} - N_1 e^{i\gamma_2 + i\delta}}{N_2 e^{-i\gamma_1} - N_1 e^{-i\gamma_2}} . \qquad /39/$$

Согласно общей теории неупругих соударений /Ландау/ эффективное сечение перезарядки, соответствующее парциальной волне L:

$$\sigma_{L\,перез.} = \frac{\pi}{K_1^2}(2L+1)(1 - |\alpha|)^2 =$$

$$= 4\pi(2L+1) \frac{N_1^2 N_2^2 \sin^2 \delta_{12}}{N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 \cos(\gamma_{21} - \delta_{21})} \cdot \frac{K_2}{K_1^3}, \qquad /40/$$

а сечение упругого рассеяния:

$$\sigma_{L\,упр.} = \frac{\pi}{K_1^2}(2L+1)|1 - \alpha|^2 =$$

$$= 4\pi(2L+1) \frac{N_1^2 \sin^2\gamma_2 + N_2^2 \sin^2\gamma_1 - 2N_1 N_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos\delta_{21}}{N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 \cos(\gamma_{21} - \delta_{21})} \cdot \frac{1}{K_1^2} \qquad /41/$$

Поскольку столкновения происходят при тепловых энергиях, то практически наиболее важен случай, когда кинетическая энергия более легкого мезоатома значительно меньше ΔE $(\kappa_1 \ll 1)$. В этом случае наиболее существенно рассеяние в S -состоянии. В области $1 \ll R \ll \frac{1}{\kappa_1}$ решения /35/ для $l=0$ принимают вид:

$$\text{I}\begin{cases} a_0^{(1)}(R) \approx c_1^{(1)} R + c_2^{(1)} \\ b_0^{(1)}(R) \approx c_3^{(1)} \sin(\kappa_2^0 R + \delta_2^{(1)}) \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} a_0^{(2)} \approx c_1^{(2)} R + c_2^{(2)} \\ b_0^{(2)} \approx c_3^{(2)} \sin(\kappa_2^0 R + \delta_2^{(2)}) \end{cases} \qquad /42/$$

$$\kappa_2^0 = \sqrt{2M_{12}\Delta E}\ ;$$

а условие /36/ дает:

$$c_1^{(1)} c_2^{(2)} - c_2^{(1)} c_1^{(2)} + \kappa_2^0 c_3^{(1)} c_3^{(2)} \sin(\delta_2^{(2)} - \delta_1^{(1)}) = 0$$

Линейная комбинация, /38/ удовлетворяющая условию /42/ и соответствующим образом нормированная, имеет вид:

$$a \approx R + \frac{\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 e^{i\delta_{21}}}{\gamma_2 - \gamma_1 e^{i\delta_{21}}}\ ; \qquad /43/$$

$$b \approx -\frac{\gamma_1\gamma_2 \sin\delta_{21}}{\gamma_2 - \gamma_1 e^{i\delta_{21}}}\, e^{i(\kappa_2^0 R + \delta_2)}\ ;$$

где

$$\beta_i = \frac{c_2^{(i)}}{c_1^{(i)}}\ ; \quad \gamma_i = \frac{c_3^{(i)}}{c_1^{(i)}}\ ; \quad \delta_{21} = \delta_2 - \delta_1\ .$$

Сечение перезарядки равно:

$$\sigma_{перез.} = 4\pi \frac{\kappa_2^0}{\kappa_1} \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2 \sin^2\delta_{12}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2\cos\delta_{21}} = 4\pi f a_\mu^2 \cdot \frac{V_0}{V}\ ; \qquad /44/$$

а сечение упругого рассеяния:

$$\sigma_{упр.} = 4\pi \frac{\beta_1^2\gamma_2^2 + \gamma_1^2\beta_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2\cos\delta_{21}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2\cos\delta_{21}}\, a_\mu^2\ . \qquad /45/$$

Если v_1 относительная скорость частиц, N_2 число ядер изотопа с массой M_2, то вероятность перезарядки в единицу времени:

$$W = N_2\, \sigma_{перез.} \cdot v = 4\pi\, v_2^\circ \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 \sin^2 \delta_{21}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 \cos\delta_{21}}\, a_\mu^2\, N_2 \qquad /46/$$

$$v_2^\circ = \sqrt{\frac{2\Delta E}{M}}\ ; \quad a_\mu = \frac{\hbar^2}{m_\mu e^2}.$$

В таблице 1 приведены значения $v,\ \sigma_{перез.}$ и f для систем протон-дейтрон, протон-тритий и дейтрон-тритий.

Сечение рассеяния и волновые функции при рассеянии тяжелого мезоатома на ядрах легкого изотопа

В области энергий $-\frac{1}{2}\Delta E \leq E' \leq \frac{1}{2}\Delta E$ в случае малой концентрации тяжелого изотопа водорода наиболее существенным процессом является упругое рассеяние тяжелых мезоатомов на ядрах легкого изотопа, а в дальнейшем, после замедления мезоатома, - образование мезомолекул.

Пусть решения, полученные путем численного интегрирования /21/ с граничными условиями соответственно /28/ и /26/, имеют при $R \to \infty$ вид:

$$a_L^{(1)}(R) \approx d_{L1}^{(1)} e^{-\varkappa_1 R} + d_{L2}^{(1)} e^{\varkappa_1 R}; \quad a_L^{(2)}(R) \approx d_{L1}^{(2)} e^{-\varkappa_1 R} + d_{L2} e^{\varkappa_1 R}$$

$$b_L^{(1)}(R) \simeq d_{L3}^{(1)} \sin\left(k_2 R - \frac{\pi L}{2} + \omega^{(1)}\right); \quad b_L^{(2)} \approx d_{L3}^{(2)} \sin\left(k_2 R - \frac{\pi L}{2} + \omega^2\right) \qquad /47/$$

Составляя из /47/ линейную комбинацию, удовлетворяющую условию, получим с точностью до постоянного множителя

$$b_L(R) \approx \sin\left(k_2 R - \frac{\pi L}{2} + \omega\right)$$

$$a_L(R) \approx \frac{d_{L1}^{(1)} d_{L2}^{(2)} - d_{L2}^{(1)} d_{L1}^{(2)}}{T}\, e^{-\varkappa_1 R} \qquad /48/$$

где

$$tg\,\omega = \frac{d_{L3}^{(1)} d_{L2}^{(2)} \sin\omega^{(1)} - d_{L3}^{(2)} d_{L2}^{(1)} \sin\omega^{(2)}}{d_{L3}^{(1)} d_{L2}^{(2)} \cos\omega^{(1)} - d_{L3}^{(2)} d_{L2}^{(1)} \cos\omega^{(2)}} \qquad /49/$$

$$T^2 = \left[d_{L3}^{(1)} d_{L2}^{(2)}\right]^2 + \left[d_{L3}^{(2)} d_{L2}^{(1)}\right] - 2 d_{L2}^{(1)} d_{L2}^{(2)} d_{L3}^{(1)} d_{L3}^{(2)} \cos\left(\omega^{(2)} - \omega^{(1)}\right).$$

Парциальное сечение, соответствующее L волне, равно

$$\sigma_L = \frac{4\pi}{k^2}(2L+1)\sin^2\omega = \frac{4\pi}{k^2}(2L+1)\cdot\frac{\left[d_{L3}^{(1)} d_{L2}^{(2)} \sin\omega^{(1)} - d_{L3}^{(2)} d_{L2}^{(1)} \sin\omega^{(2)}\right]^2}{T^2}. \qquad /50/$$

Наиболее важно для дальнейшего знать волновые функции и эффективное сечение рассеяния в случае малой кинетической энергии мезоатома / $k_2 \ll 1$ /. В области $R_0 \ll R \ll \frac{1}{k_2}$ решения /47/ для S – волны могут быть представлены в виде

$$a_0^{(1)} \approx d_1^{(1)} e^{-\varkappa_1^0 R} + d_2^{(1)} e^{\varkappa_1^0 R};$$

$$b_0^{(1)} \approx R + D^{(1)}; \qquad \varkappa_1^0 = \sqrt{2M_{12}\Delta E}. \qquad /51/$$

Линейная комбинация /51/, удовлетворяющая условию /26/ в области $R_0 \ll R \ll \frac{1}{k_2}$, имеет вид:

$$a \approx \frac{D^{(2)} - D^{(1)}}{2\varkappa_1\left(d_2^{(2)} - d_2^{(1)}\right)} e^{-\varkappa_1^0 R};$$

$$b \approx R + \frac{D^{(1)} d_2^{(2)} - D^{(2)} d_2^{(1)}}{d_2^{(2)} - d_2^{(1)}}. \qquad /52/$$

Нормировка функций /52/ выбрана так, что она соответствует при $R \to \infty$ плоской волне относительного движения ядер /с коэффициентом единица/ и μ^- мезону, находящемуся у более тяжелого ядра. В таблице У представлены волновые функции $a(R)$ и $b(R)$ для систем протон-дейтрон, протон-тритий и дейтрон-тритий. Эффективное сечение рассеяния мезоатомов более тяжелых изотопов на ядрах более легких при малой кинетической энергии мезоатомов равно:

$$\sigma = 4\pi \left| \frac{\mathcal{D}^{(1)} d_2^{(2)} - \mathcal{D}^{(2)} d_2^{(1)}}{d_2^{(2)} - d_2^{(1)}} \right|^2 = 4\pi \lambda^2 a_\mu^2 . \qquad /53/$$

Значения σ и λ приведены в таблице II. Отметим, что в случае процесса $d\mu + p \to d\mu + p$ $\sigma_{упр}$ не является аномально малым, как это указано в /11/. Длина пробега ℓ атома $d\mu$, получившегося в результате перезарядки, может быть определена по формуле

$$\ell = \frac{1}{\kappa N \sigma_{упр}} \ln \frac{E_1}{E_2} , \qquad /54/$$

где $\kappa = \frac{2M_{12}}{M_1 + M_2} = \frac{4}{9}$ - средняя доля передаваемой при столкновении $d\mu + p$ энергии, $N = 4 \cdot 10^{22}$; $E_1 = 45\, ev$ - энергия, приобретенная мезоатомом $d\mu$ при перезарядке, $E_2 \sim 2 \cdot 10^{-4}\, ev$ - конечная /тепловая/ энергия. /При этом в грубом приближении считается, что $d\mu$ движется по прямой, так как отклонение $d\mu$ при столкновении с протоном не может превышать в лабораторной системе координат 30°/ . Величина пробега согласно /54/ составляет $\ell \sim 0{,}1$ мм /пробег за счет диффузии $d\mu$ при тепловой энергии тоже порядка 0,1 мм/, что по-видимому, меньше наблюдавшейся на опыте "щели", величина которой около 1 мм.

Уровни энергии мезомолекул

Пусть в области энергий $E' < -\frac{1}{2} \Delta E$ решения уравнений /21/ при начальных условиях соответственно /33/ и /34/ имеют для $R \to \infty$ следующий вид:

$$a_i(R) \approx \mathcal{F}_1^{(i)}(E') e^{-\varkappa_1 R} + \mathcal{F}_2^{(i)}(E') e^{\varkappa_1 R}$$
$$b_i(R) \approx \mathcal{F}_3^{(i)}(E') e^{-\varkappa_2 R} + \mathcal{F}_4^{(i)}(E') e^{\varkappa_2 R} \qquad /55/$$

Тогда, составляя линейную комбинацию, можно добиться исключения растущих экспонент при условии:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{F}_2^{(1)}(E') & \mathcal{F}_2^{(2)}(E') \\ \mathcal{F}_4^{(1)}(E') & \mathcal{F}_4^{(2)}(E') \end{vmatrix} = 0 \qquad /56/$$

Условие /56/ определяет уровни энергии мезомолекул. Проводя численное интегрирование системы /21/ для различных E', можно подобрать значения E', удовлетворяющие условию /56/. Полученные таким образом уровни энергии мезомолекул указаны в таблице $\overline{\text{III}}$. На рис. 1 приведены значения функций $a(R)$ и $b(R)$ для связанного состояния $E = 98$ ev мезомолекулы $(pt)_\mu$, нормированные условием

$$\int_0^\infty \left(|a(R)|^2 + |b(R)|^2 \right) dR = 1. \qquad /57/$$

Уровни энергии мезомолекул с одинаковыми ядрами

Как уже отмечалось выше, для мезомолекул с одинаковыми ядрами система распадается на два независимых уравнения. Эффективные потенциалы взаимодействия с поправками, учитывающими движение ядер[x/] $E_g' + \frac{1}{2M_{12}} K_{gg}'$, с хорошей точностью аппроксимируется известной функцией Морза:

$$U = A\left[e^{-2\alpha(R-R_0)} - 2e^{-\alpha(R-R_0)}\right]. \qquad /58/$$

Значения эффективных потенциалов взаимодействия представлены в /8, 13/, там же указаны параметры функций Морза, осуществляющих аппроксимацию. Отклонения функции Морза от истинных значений эффективных потенциалов взаимодействия не могут существенно изменить величину уровней, так как эти отклонения заметны лишь в тех областях /при очень больших и при очень

---

x/ Ср. с /18/, где аппроксимация проводилась без учета поправок на движение ядер.

маленьких $\mathcal{R}$ /, где волновые функции экспоненциально спадают. Величины уровней приведены в таблице $\overline{\underline{111}}$.

Рассеяние мезоатомов на ядрах тождественных ядру мезоатома

Для малых энергий относительного движения $(\kappa\mathcal{R}_0 \ll 1)$ нетрудно вычислить эффективное сечение рассеяния мезоатомов на ядрах того же изотопа [x/]. Для $E' > 0$ решение уравнения Шредингера с потенциалом /58/ имеет вид:

$$g = e^{-\frac{\xi}{2}}\, i\Big[\xi^{i\varkappa} e^{-i\varphi}\, \mathcal{F}\Big(-\frac{\sqrt{2M_{n}A}}{\alpha} + \frac{1}{2} + i\varkappa; 1+2i\varkappa, \xi\Big) - -\xi^{i\varkappa} e^{i\varphi}\, \mathcal{F}\Big(-\frac{\sqrt{2M_{n}A}}{\alpha} + \frac{1}{2} - i\varkappa;\ 1-2i\varkappa;\ \xi\Big)\Big], \qquad /59/$$

где

$$\xi = \frac{2\sqrt{M_n A}}{\alpha} e^{-\alpha\mathcal{R}}; \quad \varkappa = \frac{\sqrt{2ME'}}{\alpha} = \frac{K}{\alpha}; \quad e^{2i\varphi} = \frac{\Gamma(1+2i\varkappa)\,\Gamma\big(-\frac{\sqrt{2MA}}{\alpha}+\frac{1}{2}-i\varkappa\big)}{\Gamma(1-2i\varkappa)\,\Gamma\big(-\frac{\sqrt{2MA}}{\alpha}+\frac{1}{2}+i\varkappa\big)} \qquad /59a/$$

При $\mathcal{R} \to \infty$ $(\xi \to 0)$ это решение ассимптотически равно:

$$g \approx \sin\Big(\kappa r - \frac{\kappa \ln 2\sqrt{\frac{2MA}{\alpha}}}{\alpha} - \kappa\mathcal{R}_0 + \varphi\Big) \qquad /60/$$

Если энергия относительного движения достаточно мала $(\kappa\mathcal{R}_0 \ll 1)$, то в области $\mathcal{R}_0 \ll \mathcal{R} \ll \frac{1}{\kappa}$

$$g \sim \mathcal{R} - \lambda_g \qquad /61/$$

---

x/ Энергия относительного движения должна быть вместе с тем значительно больше энергии сверхтонкого расщепления в мезоатоме /что составляет в случае атома $p\mu$ приблизительно 0,2 ev /. Эффекты при более низкой энергии рассмотрены в [6] /.

Длина рассеяния λ_g может быть получена из /64а/, /65/:

$$\lambda_g = \left\{ \psi\left(-\frac{\sqrt{2MA}}{\alpha} + \frac{1}{2}\right) - 2\psi(1) + \ln \frac{2\sqrt{2MA}}{\alpha} \right\} \frac{\alpha}{2MA} + R_0 , \qquad /62/$$

где $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Отметим, что, если величина $\left(\dfrac{\sqrt{2MA}}{\alpha} - \dfrac{1}{2}\right)$ близка к целому числу /это соответствует наличию у мезомолекулы уровня реального или виртуального с энергией, близкой к 0 /, то , благодаря наличию полюсов у функции $\psi(x)$ при целых отрицательных x , значение λ_g может быть весьма велико. Возможность такого резонанса была замечена еще в [2] .

Решение второго из уравнений /21/ может быть также легко получено, если потенциал $V_u = \left\{ E_u'(R) + \frac{1}{2M} K_{uu}(R) \right\}$ аппроксимирован экспонентой:

$$V_u = B e^{-\beta R} , \qquad /63/$$

что можно сделать с хорошей точностью в области существенных для рассеяния значений R . Уравнение Шредингера с потенциалом /63/ путем введения новой переменной сводится к уравнению Бесселя от мнимого аргумента. Таким образом, для $E' = 0$

$$h(R) = \frac{2}{\beta} K_0\left(\frac{2\sqrt{2MB}}{\beta} e^{-\frac{\beta R}{2}}\right),$$

где K_0 функция Ганкеля от мнимого аргумента . Нормировка функции $h(R)$ выбрана так, чтобы при $R \to \infty$ решение имело вид:

$$h(R) \approx R - \lambda_u \qquad /64/$$

/учитывая, что при $t \to 0$ $K_0(t) \to \ln\frac{2}{t} - C$, где $C = 0{,}577$ - постоянная Эйлера/ получим

$$\lambda_u = \frac{2}{\beta}\left[C + \ln \frac{\sqrt{2MB}}{\beta}\right]. \qquad /65/$$

Учитывая, что мезонная функция $\Sigma_g(\vec{r}, R)$ симметрична относительно перестановки ядер, а $\Sigma_u(\vec{r}, R)$ - антисимметрична, можно заключить, что в S волне относительное движение тождественных ядер будет описываться функцией $g(R)$, если суммарный спин ядер четный, и функцией $h(R)$ -если суммарный спин ядер нечетный. Эффективное сечение рассеяния мезоатомов водорода на протонах /и мезоатомов трития на ядрах трития/ при малых энергиях должно иметь вид:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{1}{4} \frac{\lambda_g^2}{1 + \kappa^2 \lambda_g^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_u^2}{1 + \kappa^2 \lambda_u^2} \right) \qquad /66/$$

в то время, как для рассеяния мезоатомов дейтерия на дейтронах:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{2}{3} \frac{\lambda_g^2}{1 + \kappa^2 \lambda_g^2} + \frac{1}{3} \frac{\lambda_u^2}{1 + \kappa^2 \lambda_u^2} \right) \qquad /67/$$

Формула /66/ аналогична формуле для рассеяния нейтронов на протонах. При больших λ_g согласно /66/ будет резонанс в рассеянии при $\kappa \to 0$. Члены $\kappa^2 \lambda_u^2$ в /66/ записаны для большей аналогии с известной дейтронной формулой; учет их представляет по существу превышение точности, так как λ_u соответствует отталкиванию и должно по порядку величины совпадать с радиусом действия сил: $\lambda_u \approx R_0$. Это как раз имеет место в рассеянии $p_\mu + p \to p_\mu + p$, поскольку мезомолекула $(pp)_\mu$ имеет виртуальный уровень с энергией близкой к 0 . Эффективное сечение рассеяния $p_\mu + p$, вычисленное согласно /66/, хорошо совпадает с сечением, приведенным в /7/. В рассеянии $d_\mu + d$ сечение, вычисленное по /67/, оказывается в два раза больше приведенного в работе /7/.

Образование мезомолекул

Двигаясь в веществе , мезоатомы водорода в силу своей нейтральности могут свободно проходить через электронные оболочки молекул водорода и, приближаясь к ядрам, образовывать мезомолекулы, точнее мезомолекулярные ионы $(pp)_\mu^+$; $(pd)_\mu^+$ и т.д. /наподобие известных молекулярных ионов H_2^+ ; HD^+ и т.п./. Энергия связи мезомолекулы, в принципе , может быть отдана излучению, электрону оболочки, а также ядру, связанному химическими силами с тем, которые образуют мезомолекулу. Последний переход, однако, может иметь какое-либо значение только в случае, когда мезомолекула образуется в состоянии с очень маленькой энергией связи /порядка энергии связи обычной молекулы/. Как видно из таблицы 111 это условие не выполняется ни для одной из молекул /за исключением быть может $(dd)_\mu$ /.

Поскольку размеры мезомолекул меньше атомных, соотношения между вероятностями образования мезомолекулы радиационным путем и путем отдачи энергии электрону оболочки, могут быть выражены с помощью стандартной теории внутренней конверсии электронов при ядерных переходах. Для рассматриваемой области передаваемых энергий /десятки, сотни ev / коэффициенты внутренней конверсии весьма велики; поэтому, вероятность радиационного образования мезомолекул несравненно меньше конверсионной. Поскольку образование мезомолекул происходит при малых относительных энергиях мезоатомов, наиболее существенным будет электрический дипольный переход из S волны сплошного спектра с конверсией на электроне; пусть ρ_1, ρ_2, ρ_μ – расстояния, соответственно, от ядер M_1, M_2 и μ – мезона до произвольной точки; тогда кулоновское поле системы на больших расстояниях имеет вид:

$$\frac{e}{\rho_1} + \frac{e}{\rho_2} - \frac{e}{\rho_\mu} \approx \frac{e}{\rho} + \frac{\vec{d}\vec{\rho}}{\rho^3}, \qquad /68/$$

где ρ – расстояние от центра тяжести ядер, а $\vec{d}$ – дипольный момент системы:

$$\vec{d} = -\frac{e}{2}\,\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}\vec{R} - \frac{e}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right)$$

$$\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1\ ;\quad \vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{R}_1\ ;\quad \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{R}_2\ . \qquad /69/$$

Если в качестве волновых функций электрона взять точные кулоновские функции атома водорода, то аналогично вероятности конверсии при ядерном переходе получим для вероятности образования мезомолекулы путем дипольной конверсии:

$$W = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\hbar a_e^3}\cdot\frac{2\pi\eta^2 e^{-4\eta\,\mathrm{arcctg}\,\eta}}{(1+\eta^2)(1-e^{-2\pi\eta})}\sum_{M_L}\left|\langle d\rangle\right|^2, \qquad /70/$$

где $a_e = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$; $\eta = \frac{e^2}{\hbar v_e}$ / m_e, v_e – масса и скорость/ N – число ядер в см^3, $\langle d\rangle$ матричный элемент дипольного момента, взятый между волновыми функциями мезомолекулы, принадлежащим соответственно сплошному и дискретному спектру

$$\langle d \rangle = \int \Psi^{f*}_{mol}\, d\, \Psi^{i}_{mol} \quad (d\mathcal{R})(dr_\mu) \qquad /71/$$

/интегрирование проводится в /71/ по координатам μ^- -мезона и ядер/. Интегрирование по мезонным координатам в /71/ приводит к интегралу:

$$d_{gu} = \int \Sigma_g \frac{1}{2}(z_1+z_2)\Sigma_u \,(dr_\mu). \qquad /72/$$

Из соображений симметрии ясно, что d_{gu} направлен по $\mathcal{R}$: $d_{gu} = \gamma(\mathcal{R})\mathcal{R}$, где $\gamma(\mathcal{R})$ некоторая функция $\mathcal{R}$. В приближении

$$\gamma(\mathcal{R}) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\mathcal{R}}(1+\mathcal{R}+\mathcal{R}^2/3)^2}} \approx -\frac{1}{2}. \qquad /73/$$

Приближение $LCAO$ несправедливо при малых $\mathcal{R}$, однако, ясно, что поскольку функция $H(\mathcal{R})$, соответствующая состоянию отталкивания Σ_u, при малых $\mathcal{R}$ экспоненциально спадает, малые $\mathcal{R}$ вносят незначительный вклад в матричный элемент $\langle d \rangle$. Отметим, что приближение $\gamma = -1/2$ хорошо выполняется и при малых $\mathcal{R}$, если вычисление d_{gu} проводить с точными функциями Σ_g, Σ_u [16]. Суммирование в /70/ проводится по всем возможным конечным состояниям мезомолекулы. При вычислении предполагается, что нормировка волновой функции сплошного спектра выбрана так, что на бесконечности есть плоская волна с коэффициентом единица, а волновая функция дискретного спектра, естественно, нормирована на единицу. При этом матричный элемент $\langle d \rangle$ будет иметь размерность $e a_\mu /2$ $(a_\mu = \hbar^2/m_\mu e^2$. Выделяя размерный множитель, удобно переписать формулу /70/ в виде

$$W = \frac{16}{3}(N a_e^3)\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^5 \cdot \frac{e^2}{\hbar a_e} \cdot \frac{2\pi\eta^2 e^{-4\eta \operatorname{arctg}\eta}}{(1+\eta^2)(1-e^{-2\pi\eta})}\left\{\sum_{m_L} |\langle d \rangle|^2\right\}, \qquad /74/$$

где матричный элемент $\langle d \rangle$ вычислен в безразмерных /"мезоатомных"/ единицах. Легко заметить, что первый член в дипольном моменте /69/ имеет отличные от нуля матричные элементы только для переходов с мезонными функциями одинаковой четности $\Sigma_g \to \Sigma_g$, $\Sigma_u \to \Sigma_u$, в то время как второй член дает переходы только между мезонными функциями различной четности $\Sigma_u \to \Sigma_g$; $\Sigma_g \to \Sigma_u$. Дипольные переходы из S волны сплошного спектра могут происходить только во вращательное состояние с $L = 1$. Из таблицы III видно, что для всех мезомолекул /кроме $(tt)_\mu$ / переход осуществляется в основное вращательное состояние / $L=1$; $n=0$ /. Для мезомолекул $(tt)_\mu$ возможен также переход в колебательно-вращательное состояние $(L=1$; $n=1)$. Вероятность образования мезомолекул с одинаковыми ядрами $(dd)_\mu$; $(tt)_\mu$ может быть вычислена аналогично тому, как это сделано для мезомолекул (pp) /13/. Вероятности образования этих молекул приведены в таблице 4. В случае мезомолекул с различными ядрами наибольший интерес представляет вычисление вероятности образования мезомолекулы, когда происходит столкновение мезоатома более тяжелого изотопа с более легким ядром, например, $d_\mu + p \to (dp)_\mu$ /при столкновении $p_\mu + d$ значительно более вероятным процессом является перезарядка $p_\mu + d \to d_\mu + p$ /. Волновая функция начального состояния имеет вид:

$$\Psi^{(i)}_{mol} = \varphi_0(R)\,\Sigma_g + H_0(R)\,\Sigma_u, \qquad /75/$$

где функции φ_0, H_0 связаны с функциями $a_0(R)$, $b_0(R)$, соотношением /20/. Волновая функция конечного состояния , соответствующая вращательному уровню мезомолекулы с $L = 1$, имеет вид:

$$\Psi^{f}_{mol} = \left\{ g_1(R)\,\Sigma_g + h_1(R)\,\Sigma_u \right\} \frac{1}{R}\, Y_{1,M}(\theta,\varphi). \qquad /76/$$

Проводя интегрирование по углам и суммирование по M , получим в мезоатомных единицах

$$\sum_M |\langle d \rangle|^2 = \frac{4\pi}{(M_1+M_2)^2} \left| \int_0^\infty \left\{ M_1 a_0(R)\,a_1(R) - M_2 b_0(R)\,b_1(R) \right\} R\,dR \right|^2. \qquad /77/$$

Интегралы в /77/ вычислены численно. Вероятности образования мезомолекул $(pd)_\mu$; $(pt)_\mu$; $(dt)_\mu$, найденные согласно /77/ и /74/, указаны в таблице 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции $K_{gg}(R)$ и $K_{uu}(R)$ вычислены в /15/ с помощью точных волновых функций Σ_g и Σ_u, приведенных в /14/. Приведем для сравнения значения $K_{gg}(R)$ и $K_{uu}(R)$, вычисленные в приближении $(LCAO)$, справедливом для больших R.

$$\Sigma_g = \left\{2\pi(1+S)\right\}^{-1/2}\left(e^{-r_1}+e^{-r_2}\right) \quad \text{Д.1}$$

$LCAO$

$$\Sigma_u = \left\{2\pi(1-S)\right\}^{-1/2}\left(e^{-r_1}-e^{-r_2}\right) \quad \text{Д.2}$$

$$S = \left(1+R+R^2/3\right)e^{-R}$$

и в приближении UA, справедливом при малых R, когда Σ_g и Σ_u переходят соответственно в $1s$ и $2p$, уровни He

$$\Sigma_g = \frac{1}{N_g}e^{-(r_1+r_2)}$$

$$\Sigma_u = -\frac{1}{N_u}e^{-1/2(r_1+r_2)}\left(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta\right) \quad \text{Д.3}$$

$$N_g^2 = \frac{\pi}{8}e^{-2R}\left(1+2R+\frac{4}{3}R^2\right) \quad \text{Д.4}$$

$$N_u^2 = 4\pi\left(1+R+\frac{9}{20}R^2+\frac{7}{60}R^3+\frac{1}{60}R^4\right)e^{-R}. \quad \text{Д.4'}$$

В приближении $LCAO$:

$$K_{gg} = \frac{1}{2} - \frac{S}{2(1+S)} - \frac{1}{36}\frac{R^2(1+R)^2}{(1+S)^2}e^{-2R} \quad \text{Д.5}$$

$$K_{uu} = \frac{1}{2} + \frac{S}{2(1-S)} - \frac{1}{36}\frac{R^2(1+R)^2}{(1-S)^2}e^{-2R} \quad \text{Д.5'}$$

В приближении UA

$$K_{gg} = 1 - \left(\frac{N_g'}{N_g}\right)^2 \underset{R\to 0}{\approx} 1 - \frac{16}{9} R^2 \qquad \text{Д.6}$$

$$K_{uu} = \frac{2}{R^2} + \frac{1}{4} - \left(\frac{N_u'}{N_u}\right)^2 \underset{R\to 0}{\approx} \frac{2}{R^2} + \frac{1}{4}. \qquad \text{Д.6'}$$

Для сравнения на рис. 2, 3 представлены значения K_{gg} и K_{uu}, вычисленные в /15/, и согласно аппроксимации $LCAO$ и UA.

Для величины $Q(R)$ вычисления дают:

$$(LCAO) \qquad Q = -\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{R(R+1)\,e^{-R}}{6\sqrt{1-S^2}}$$

$$(UA) \qquad Q = -\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{16\pi}{81} \frac{e^{-\frac{3R}{2}}}{N_g N_u}\left(1 + \frac{3}{2}R + \frac{3}{4}R^2\right).$$

Отметим, что Q, вычисленное согласно $(LCAO)$, при $R\to 0$ довольно хорошо совпадает со значением Q, вычисленным согласно (UA) $R \to 0$,

$$Q_{LCAO} \to -\left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}\right)\frac{1}{2\sqrt{3}} \doteq -0{,}289\,\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}$$

$$Q_{UA} \to -\left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}\right)\frac{16\sqrt{2}}{81} = -0{,}28\,\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}.$$

Таким образом, во всей области R можно принять аппроксимацию $Q = Q_{LCAO}$.

Величины $K_{gu}(R)$ и $K_{ug}(R)$ в аппроксимации $(LCAO)$ и (UA) соответственно равны:

$(LCAO)$:

$$\begin{cases} K_{gu} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-S^2}} \left\{ 1 + e^{-R}\left(1 + R - \dfrac{R^2}{3}\right) - \dfrac{R^2(1+R)^2}{9(1-S)} e^{-2R} \right\} \dfrac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}; \\ K_{ug} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-S^2}} \left\{ 1 - e^{-R}\left(1 + R - \dfrac{R^2}{3}\right) - \dfrac{R^2(1+R)^2}{9(1+S)} e^{-2R} \right\} \dfrac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \end{cases}$$

(UA):

$$\begin{cases} K_{gu} = \dfrac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \dfrac{64\pi}{81} \cdot \dfrac{e^{-\frac{3R}{2}}}{N_g N_u} \left(1 + \frac{3}{2}R + \frac{3}{4}R^2\right)\left(1 - \frac{R}{2}\dfrac{N_u'}{N_u}\right)\dfrac{1}{R} \\ K_{ug} = \dfrac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \dfrac{64\pi}{81} \cdot \dfrac{e^{-\frac{3R}{2}}}{N_g N_u} \left\{ \dfrac{1}{2}\dfrac{N_g'}{N_g}\left(1 + \frac{3}{2}R + \frac{3}{4}R^2\right) + \right. \end{cases}$$

$$\left. + \frac{3}{8}R + \frac{9}{16}R^2 \right\}.$$

Приведем зависимость функции при $R \to 0$

$$K_{gu}\ (LCAO) \longrightarrow \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}\,R} \approx 1{,}15\ \frac{1}{R}\ \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1};$$

$$K_{gu}\ (UA) \longrightarrow \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{64\sqrt{2}}{81 R} \approx 1{,}12\ \frac{1}{R} \cdot \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1};$$

$$K_{ug}\ (LCAO) \longrightarrow \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{18} R \approx 0{,}67\ R\ \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1};$$

$$K_{ug}\ (UA) \longrightarrow \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{35} \approx 0{,}05\ R\ \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}.$$

Литература

1. F.C.Frank, Nature 160, 525 (1947).
2. Я.Б.Зельдович, ДАН , 95, 493 /1954/.
3. А.Д.Сахаров, отчет ФИАН /1948/.
4. L.W.Alwarez atal. Phys.Rev. 105, 1125 (1957).
5. A.Ashmore, R.Nordhagen, K.Strauch, B.M.Tawnes, Proc.Phys.Soc. 71, 161 (1958).
6. С.С.Герштейн. ЖЭТФ, т.34, вып. 2, стр.163 /1958/.
7. В.Б.Беляев и Б.Н.Захарьев. ЖЭТФ, т.35, вып. 4, стр.98 /1958/.
8. Я.Б.Зельдович, С.С.Герштейн. ЖЭТФ, 35, 3/9/, 821 /1959/.
9. Я.Б.Зельдович, А.Д.Сахаров. ЖЭТФ, т.32, вып. 4, 947 /1957/.
10. С.С.Герштейн. ДАН, 117, № 6 /1957/.
11. S.Cohen, D.L.Judd, R.T.Riddel, Phys.Rev. 110 n.6, 1471 (1958).
12. Shimizu, Mizuno, Izuyama. Progr.Theor.Phys.v.20,n.5,777 (1958).
13. Я.Б.Зельдович, С.С.Герштейн. ЖЭТФ, 35, 649 /1958/.
14. Bates D.R., K.Ledsham and A.L.Stewart, Phil.Trans.Roy.Soc. 246, n.911 (1953).
15. Dalgarno, at.al., Proc.Roy.Soc. v.237,383 (1956).
16. Dalgarno, Pots. Proc.Phys.Soc. A 67, 349 (1954).
17. Teller, Zeit. für Phys. 61, 458 (1930).
18. S.Gallone, G.M.Prósperi, A.Scatti N.C, v. 6 I (1957).
19. Skyrme T.H.R.Phil. Mag. v.2 , 19, 910 (1957).
20. Marschall, Schmidt, Z.f:Phys. 150, 293 (1958).

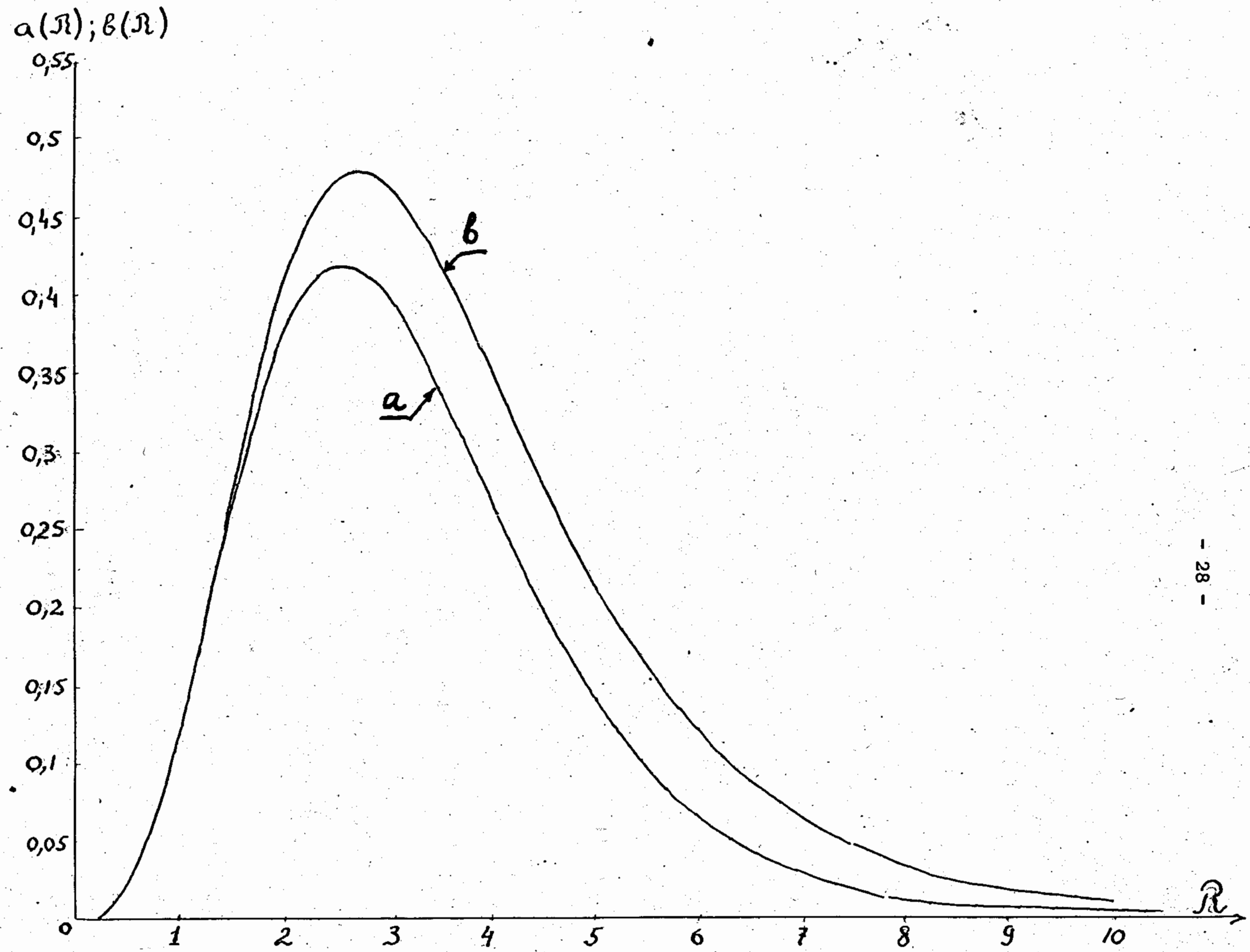

Рис. 1. Волновые функции мезомолекулярного иона $(pt)_\mu$, соответствующие уровню 98 ev. Функции приведены для иллюстрации качественного поведения $a(R)$ и $b(R)$ для дискретных значений E. /Точные значения функций даны в табл. У/.

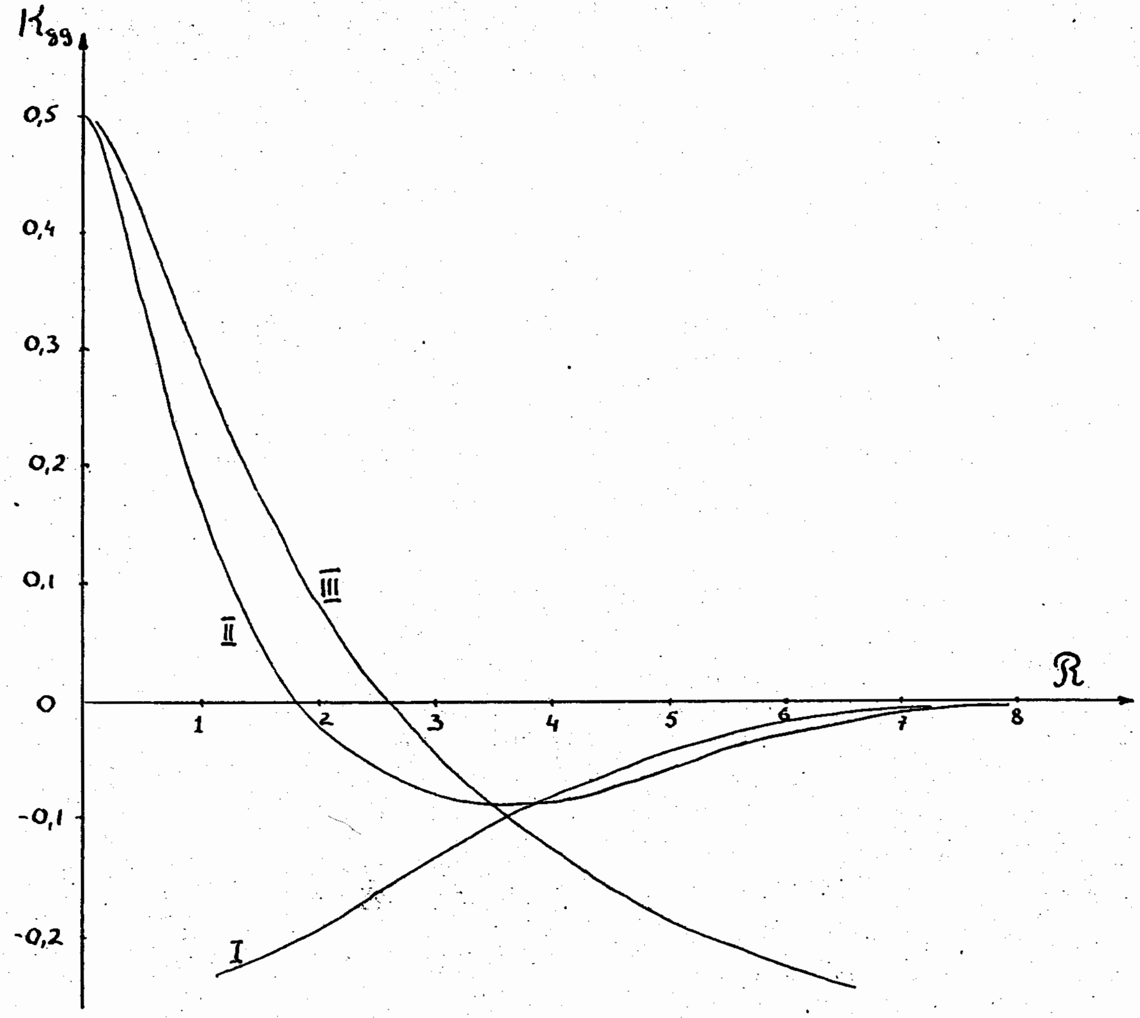

Рис. 2. Функция K_{gg} вычисленная: I – в приближении ($LCAO$) ;
II – по точным функциям [15]; III – в приближении (UA) .

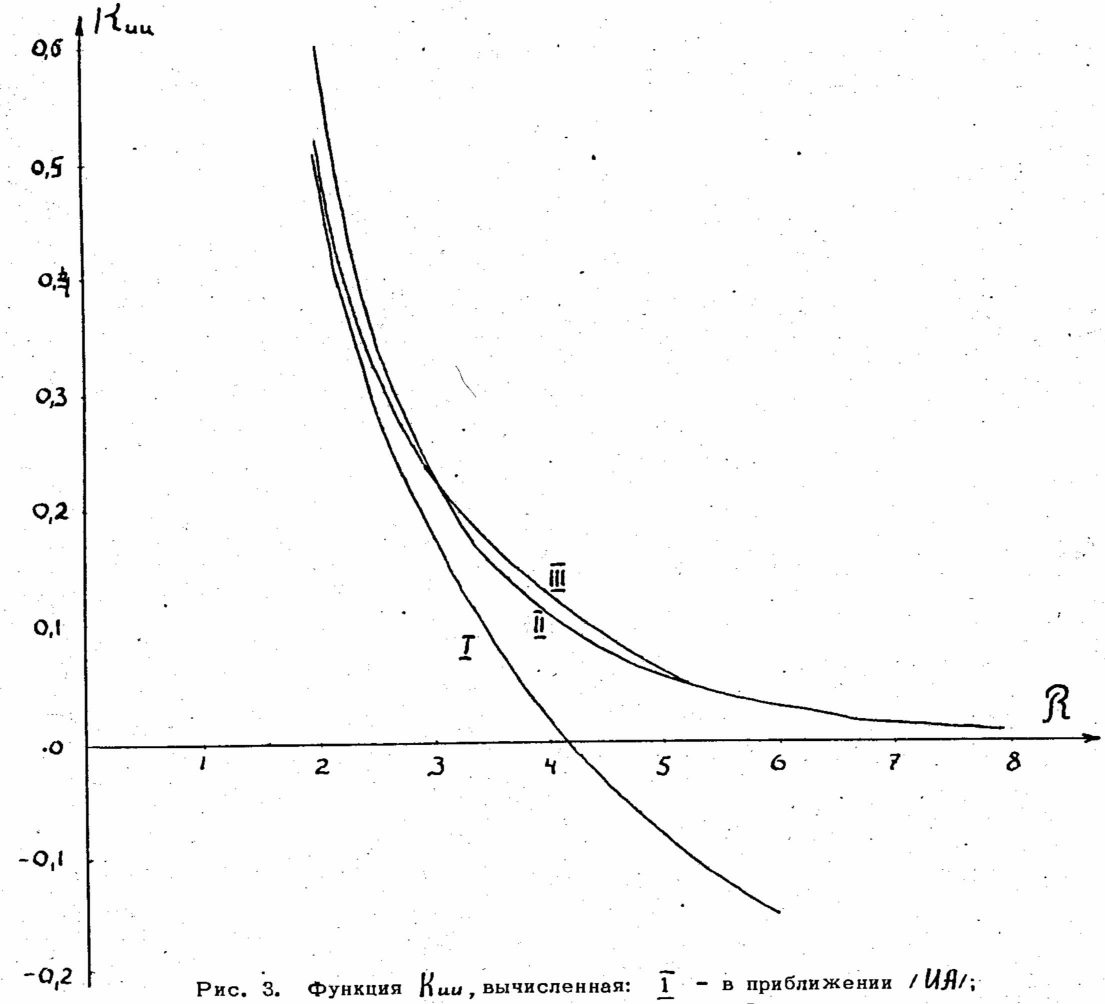

Рис. 3. Функция K_{uu}, вычисленная: $\overline{I}$ – в приближении /ИА/; $\overline{II}$ – в приближении (LCAO); $\overline{III}$ – по точным функциям [15].

Таблица $\bar{I}$

Сечения перезарядки и упругого рассеяния

	$p_\mu + d$	$p_\mu + t$	$d_\mu + t$
$\sigma_{ex} \cdot v$	$3{,}42 \cdot 10^{-13}\ \frac{см^3}{сек}$	$1{,}49 \cdot 10^{-13}\ \frac{см^3}{сек}$	$1{,}15 \cdot 10^{-15}\ \frac{см^3}{сек}$
$\sigma_{упр}$	$1{,}98 \cdot 10^{-19} см^2$	$1{,}53 \cdot 10^{-19} см^2$	$2{,}41 \cdot 10^{-19} см^2$

Таблица $\overline{II}$

Сечения упругого рассеяния мезоатомов

	$d_\mu + p \to d_\mu + p$	$t_\mu + p \to t_\mu + p$	$t_\mu + d \to t_\mu + d$
λ	2,03	2,66 x/	6,7
$\sigma_{упр}(0)$	$3{,}39 \cdot 10^{-20} см^2$	$5{,}84 \cdot 10^{-20} см^2$ x/	$36{,}9 \cdot 10^{-20} см^2$

x/ Величины получены при $K_{gg} = 0$. Вычисления с правильным K_{gg} дали для λ значение ~ 10, что кажется нам сомнительным.

Таблица $\overline{III}$

Уровни молекул в ev

/Для мезомолекул с различными ядрами уровни энергии отсчитываются от уровня более тяжелого изотопа/.

	$L=0$		$L=1$		$L=2$	$L=3$
	$n=0$	$n=1$	$n=0$	$n=1$	$n=0$	$n=0$
$(pp)_\mu^+$	252	-	109	-	-	-
$(dd)_\mu^+$	330	40	227	7	88	-
$(tt)_\mu^+$	367	86	288	45	170	50
$(pd)_\mu^+$	220	-	90	-	-	-
$(pt)_\mu^+$	213	-	98	-	-	-
$(dt)_\mu^+$	318	32	232	-	102	-

Т а б л и ц а IУ

Вероятности образования молекул в единицах 10^6 сек$^{-1}$ в жидком водороде.

$(pp)_\mu^+$	$(dd)_\mu^+$	$(tt)_\mu^+$	$(pd)_\mu^+$	$(dt)_\mu^+$	$(pt)_\mu^+$
1,53	0.006	0,38	0,7	~0,001	0,25

В данной работе вероятности образования мезомолекул следует рассматривать только по порядку величины, так как при вычислении не учитывалась связь ядер водорода в молекулах H_2, что, по-видимому, приводит к увеличению W.

В случае мезомолекулярного иона $(dd)_\mu$ и $(dt)_\mu$ из-за наличия близкого к нулю колебательного уровня / с $L = 0$ / в вероятность образования молекул могут дать вклад $0-0$ переходы.

В только что полученном авторами препринте Коэна, Юдда и Ридделя волновая функция при вычислении вероятности образования мезомолекул с одинаковыми ядрами нормирована на $\sqrt{2}$, а не на 1, что завышает вдвое W.

Т а б л и ц а V

Волновые функции мезомолекулярных ионов (ненормированные) в состояниях с L = I

	$(pd)_\mu^+$ Уровень 90 ev		$(pt)_\mu^+$ Уровень 98 ev		$(dt)_\mu^+$ Уровень 232 ev		
R	$a(R)$	$b(R)$	$a(R)$	$b(R)$	$a(R)$	$b(R)$	R
0,3	0,II4·IO^{-2}	0,II0·IO^{-2}	0,II6·IO^{-2}	0,I09·IO^{-2}	+0,772·IO^{-3}	0,823·IO^{-3}	0,3
0,5	0,530·IO^{-2}	0,5I6·IO^{-2}	0,554·IO^{-2}	0,53I·IO^{-2}	0,427·IO^{-2}	0,420·IO^{-2}	0,5
0,7	0,I32·IO^{-I}	0,I30·IO^{-I}	0,I4I·IO^{-I}	0,I37·IO^{-I}	0.I22 ·IO^{-I}	0,I2I·IO^{-I}	0,7
0,9	0,256·IO^{-I}	0,254·IO^{-I}	0,277·IO^{-I}	0,273·IO^{-I}	0,246 ·IO^{-I}	0,260·IO^{-I}	0,9
I,I	0,423·IO^{-I}	0,424·IO^{-I}	0,462·IO^{-I}	0,462·IO^{-I}	0,464·IO^{-I}	0,462·IO^{-I}	I,I
I,3	0,625·IO^{-I}	0,632·IO^{-I}	0,687,IO^{-I}	0,697·IO^{-I}	0,7I8·IO^{-I}	0,7I9·IO^{-I}	I,3
I,5	0,849.IO^{-I}	0,869·IO^{-I}	0,936·IO^{-I}	0,964·IO^{-I}	0,I00	0,I0I	I,5
I,7	0,I08	0,II2	0,II9	0,I25	0,I29	0,I3I	I,7
I,9	0,I30	0,I37	0,I44	0,I53	0,I56	0,I59	I,9
2,I	0,I5I	0,I60	0,I65	0,I79	0,I79	0,I83	2,I
2,3	0,I68	0,I8I	0,I83	0,202	0,I96	0,202	2,3
2,5	0,I82	0,I98	0,I97	0,22I	0,207	0,2I4	2,5
2,7	0,I9I	0,2II	0,206	0,235	0,2I3	0,2I9	2,7
2;9	0,I97	0,22I	0,2I0	0,245	0,2I0	0,2I9	2,9
3,I	0,I98	0,226	0,2I0	0,250	0,203	0,2I3	3,I
3,3	0,I96	0,228	0,205	0,25I	0,I93	0,204	3,3
3,5	0,I9I	0,226	0,I98	0,249	0,I79	0,I9I	3,5
3,5	0,I84	0,22I	0,I89	0,243	0,I64	0,I76	3,7
3,9	0,I75	0,2I5	0,I77	0,234	0,I48	0,I60	3,9
4,I	0,I64	0,206	0,I64	0,224	0,I3I	0,I43	4,I
4,3	0,I52	0,I96	0,I5I	0,2I2	0,II5	0,I27	4,3
4,5	0,I40	0,I84	0,I37	0,200	0,I00	0,III	4,5
4,7	0,I28	0,I73	0,I24	0,I87	0,866·IO^{-I}	0,969·IO^{-I}	4,7
4,9	0,II6	0,I6I	0,III	0,I73	0,74I·IO^{-I}	0,838·IO^{-I}	4,9
5,I	0,I04	0,I49	0,989·IO^{-I}	0,I6I	0,630·IO^{-I}	0,7I9·IO^{-I}	5,I
5,3	0,935·IO^{-I}	0,I37	0,875·IO^{-I}	0,I48	0,532·IO^{-I}	0,6I4·IO^{-I}	5,3
5,5	0,833·IO^{-I}	0,I26	0,770·IO^{-I}	0,I36	0,447·IO^{-I}	0,52I·IO^{-I}	5,5
5,7	0,738·IO^{-I}	0,II5	0,673·IO^{-I}	0,I25	0,373·IO^{-I}	0,440·IO^{-I}	5,7
5,9	0,650·IO^{-I}	0,I05	0,586·IO^{-I}	0,II4	0,3I0·IO^{-I}	0,37I·IO^{-I}	5,9
6,0	0,609·IO^{-I}	0,I00	0,546·IO^{-I}	0,I09	0,283·IO^{-I}	0,340·IO^{-I}	6,0
6,2	0,534·IO^{-I}	0,908·IO^{-I}	0,47I·IO^{-I}	0,993.IO^{-I}	0,233·IO^{-I}	0,279·IO^{-I}	6,2
6,4	0,465·IO^{-I}	0,822·IO^{-I}	0,404·IO^{-I}	0,905·IO^{-I}	0,I93·IO^{-I}	0,237·IO^{-I}	6,4
6,6	0,403·IO^{-I}	0,742·IO^{-I}	0,344·IO^{-I}	0,823·IO^{-I}	0,I58.IO^{-I}	0,I97·IO^{-I}	6,6
6,8	0,348·IO^{-I}	0,669·IO^{-I}	0,290·IO^{-I}	0,749·IO^{-I}	0,I29·IO^{-I}	0,I64·IO^{-I}	6,8
7,0	0,299·IO^{-I}	0,60I·IO^{-I}	0,242·IO^{-I}	0,68I·IO^{-I}	0,I06·IO^{-I}	0,I35·IO^{-I}	7,0
7,2	0,255·IO^{-I}	0,539·IO^{-I}	0,I98·IO^{-I}	0,6I8·IO^{-I}	0,865·IO^{-2}	0,III·IO^{-I}	7,2
7,4	0,2I6·IO^{-I}	0,483·IO^{-I}	0,I58·IO^{-I}	0,562·IO^{-I}	0,70I·IO^{-2}	0,9I0·IO^{-2}	7,4
7,6	0,I8I·IO^{-I}	0,432·IO^{-I}	0,I22·IO^{-I}	0,5II·IO^{-I}	0,569·IO^{-2}	0,738·IO^{-2}	7,6
7,8	0,I50·IO^{-I}	0,385·IO^{-I}	0,880·IO^{-2}	0,464·IO^{-I}	0,45I·IO^{-2}	0,596·IO^{-2}	7,8
8,0	0,I22·IO^{-I}	0,342·IO^{-I}	0,557·IO^{-2}	0,422·IO^{-I}	0,38I·IO^{-2}	0,478·IO^{-2}	8,0
8,5	0,677·IO^{-2}	0,253·IO^{-I}	0,I36·IO^{-2}	0,333·IO^{-I}	0,2I2·IO^{-2}	0,253·IO^{-2}	8,5

Т а б л и ц а V (продолжение)

Волновые функции системы трех частиц. Мезоатом с более тяжелым ядром рассеивается на ядре легкого изотопа при нулевой энергии.

	$d_\mu + p$		$t_\mu + p$		$t_\mu + d$		
$\mathcal{R}$	$a(\mathcal{R})$	$\ell(\mathcal{R})$	$a(\mathcal{R})$	$\ell(\mathcal{R})$	$a(\mathcal{R})$	$\ell(\mathcal{R})$	$\mathcal{R}$
0,3	$-0,469\cdot IO^{-2}$	$-0,454\cdot IO^{-2}$	$-0,IIO\cdot IO^{-I}$	$-0,I04\cdot IO^{-I}$	$-0,824\cdot IO^{-2}$	$-0,808\cdot IO^{-2}$	0,3
0,5	$-0,I8I\cdot IO^{-I}$	$-0,I78\cdot IO^{-I}$	$-0,435\cdot IO^{-I}$	$-0,423\cdot IO^{-I}$	$-0,382\cdot IO^{-I}$	$-0,377\cdot IO^{-I}$	0,5
0,7	$-0;386\cdot IO^{-I}$	$-0,382\cdot IO^{-I}$	$-0,950\cdot IO^{-I}$	$-0,935\cdot IO^{-I}$	$-0,946\cdot IO^{-I}$	$-0,939\cdot IO^{-I}$	0,7
0,9	$-0,655\cdot IO^{-I}$	$-0,655\cdot IO^{-I}$	-0,I64	-0,I64	-0,I78	-0,I78	0,9
I,I	$-0,965\cdot IO^{-I}$	$-0,974\cdot IO^{-I}$	-0,245	-0,248	-0,28I	-0,28I	I,I
I,3	-0,I29	-0,I3I	-0,329	-0,337	-0,387	-0,390	I,3
I,5	-0,I59	-0,I63	-0,407	-0,423	-0,477	-0,487	I,5
I,7	-0,I83	-0,I90	-0,470	-0,496	-0,540	-0,550	I,7
I,9	-0,20I	-0,2I0	-0,5I3	-0,549	-0,560	0,573	I,9
2,I	-0,2I0	-0,22I	-0,532	-0,576	-0,533	-0,55	2,I
2,3	-0,2I0	-0,222	-0,526	-0,577	-0,462	-0,480	2,3
2,5	-0,202	-0,2I3	-0,498	-0,549	-0,353	-0,37I	2,5
2,7	-0,I86	-0,I95	-0,449	-0,496	-0,2I7	-0,233	2,7
2,9	-0,I63	-0,I68	-0,385	-0,420	$-0,66I\cdot IO^{-I}$	$-0,772\cdot IO^{-I}$	2,9
3,I	-0,I37	-0,I35	-0,3I0	-0,325	$+0,892\cdot IO^{-I}$	$+0,847\cdot IO^{-I}$	3,I
3,3	-0.I07	$-0.948\cdot IO^{-I}$	-0.229	-0,2I5	0,239	0,242	3,3
3,5	$-0,754\cdot IO^{-I}$	$-0,508\cdot IO^{-I}$	-0,I45	$-0,940\cdot IO^{-I}$	0,374	0,385	3,5
3,7	$-0,440\cdot IO^{-I}$	$-0,378\cdot IO^{-2}$	$-0,63I\cdot IO^{-I}$	$+0,34I\cdot IO^{-I}$	0,49I	0,5I0	3,7
3,9	$-0,I36\cdot IO^{-I}$	$+0,45I\cdot IO^{-I}$	$0,I42\cdot IO^{-I}$	0,I66	0,585	0,6I0	3,9
4,I	$0,I48\cdot IO^{-I}$	$0,948\cdot IO^{-I}$	$0,849\cdot IO^{-I}$	0,299	0,655	0,685	4,I
4,3	$0,407\cdot IO^{-I}$	0,I45	0,I47	0,43I	0,70[illegible]	0,734	4,3
4,5	$0,636\cdot IO^{-I}$	0,I94	0,20I	0,56I	0,729	0,757	4,5
4,7	$0,832\cdot IO^{-I}$	0,242	0,245	0,687	0;737	0,757	4,7
4,9	$0,996\cdot IO^{-I}$	0,289	0,280	0,808	0,729	0,737	4,9
5,I	0,II4	0,334	0,306	0,925	0,709	0,698	5,I
5,3	0,I23	0,378	0,325	I,04	0,679	0,644	5,3
5,5	0,I30	0,420	0,337	I,I5	0,642	0,577	5,5
5,7	0,I35	0,46I	0,342	I,25	0,600	0,499	5,7
5,9	0,I38	0,500	0,343	I,35	0,556	0,4I3	5,9
6,0	0,I39	0,5I9	0,34I	I,40	0,533	0,367	6,0
6,2	0,I39	0,556	0,335	I,49	0,487	0,270	6,2
6,4	0,I37	0,593	0,326	I,58	0,443	0,I70	6,4
6,6	0,I34	0,628	0,3I4	I,67	0,399	$0,653\cdot IO^{-I}$	6,6
6,8	0,I30	0,662	0,300	I,75	0,358	$-0,42I\cdot IO^{-I}$	6,8
7,0	0,I26	0,696	0,284	I,84	0,3I9	-0,I5I	7,0
7,2	0,I2I	0,729	0,269	I,92	0,284	-0,262	7,2
7,4	0,II5	0,76I	0,253	I,99	0,25I	-0,374	7,4
7,6	0,II0	0,793	0,237	2,08	0,22I	-0,486	7,6
7,8	0,I04	0,824	0,22I	2,I5	0,I94	-0,599	7,8

8,0	$0{,}98I\cdot I0^{-I}$	0,855	0,205	2,23	0,I70	-0,7I2	8,0
8,5	$0{,}844\cdot I0^{-I}$	0,93I	0,I7I	2,42	0,I20	-0,994	8,5
9,0	$0{,}724\cdot I0^{-I}$	I,0I	0,I42	2,60	$0{,}836\cdot I0^{-I}$	-I,27	9,0
9,5	$0{,}623\cdot I0^{-I}$	I,08	0,II6	2,78	$0{,}57I\cdot I0^{-I}$	-I,55	9,5
I0,0	$0{,}545\cdot I0^{-I}$	I,I5	$0{,}939\cdot I0^{-I}$	2,95	$0{,}385\cdot I0^{-I}$	-I,83	I0,0
I0,5	$0{,}488\cdot I0^{-I}$	I,22	$0{,}739\cdot I0^{-I}$	3,I3	$0{,}259\cdot I0^{-I}$	-2,II	I0,5
II,0	$0{,}457\cdot I0^{-I}$	I,30	$0{,}538\cdot I0^{-I}$	3,3I	$0{,}I76\cdot I0^{-I}$	-2,38	II,0
II,5	$0{,}453\cdot I0^{-I}$	I,37			$0{,}I22\cdot I0^{-I}$	-2,66	II,5
I2,0	$0{,}476\cdot I0^{-I}$	I,44			$0{,}834\cdot I0^{-2}$	-2,94	I2,0
					$0{,}388\cdot I0^{-2}$	-3,49	I3,0