-68

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р - 363

Я. Фишер, С. Чулли

РЕКУРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. ВВЕДЕНИЕ СПИНА 1/2

ЖЭТФ, 1960, т 38, в6, с 1740-1750.

Дубна 1959 год

Я.Фишер[x/], С.Чулли[xx/]

РЕКУРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. ВВЕДЕНИЕ СПИНА 1/2

x/ Командирован из Физического института чехословацкой Академии наук в Праге, Чехословакия.

xx/ Командирован из Института атомной физики в Бухаресте, Румыния.

Аннотация

Угловые операторы, характеризующие угловую и спиновую зависимости S – матрицы, являются по определению, сложными комбинациями собственных функций начального и конечного состояний рассматриваемого процесса. Поэтому их вычисление связано с большими трудностями и возможно только в случае простых процессов. Наша цель – дать практический рекурентный метод построения этих угловых операторов. Этот метод использует только дифференциальные операции, без применения клебш-гордановских расчетов. С его помощью можно получить угловые операторы данного процесса, если известны угловые операторы более простого процесса.

В первой части – т.е. настоящей статье – решен вопрос, как изменится система угловых операторов после замены одной начальной и одной конечной скалярных частиц частицами со спином $\frac{1}{2}$. Даны практические формулы и примеры.

В следующих частях будет идти речь о введении в процесс новой скалярной частицы и об одновременном введении двух спинов $^1/2$ в начальное или конечное состояние.

Введение

Цель теории S - матрицы - получение сечения для элементарных процессов как функции от энергий, зарядов, углов и спинов реакции. Это можно сделать либо прямо, исходя из какой-нибудь теории /теории возмущений, Тамма-Данкова, Чу и Лоу или теории дисперсионных соотношений/, либо феноменологически, используя некоторые полуэмпирические постулаты, касающиеся динамического характера процесса, как, например, предположение о существовании резонансных /изобарных/ состояний.

Однако, в обоих случаях, независимо от особых динамических черт процесса, целесообразно разложить S -матрицу в ряд относительно зарядовых и спин-угловых переменных по собственным функциям моментов импульса, характеризующих начальное и конечное состояния рассматриваемого процесса. Вид этого разложения можно найти, используя только некоторые общие законы сохранения, вытекающие из симметрии процесса относительно известных групп преобразований.

После этого разложения можно исключить угловую, спиновую и изотопическую зависимости, подставляя полученные выражения в динамические уравнения. Это, вообще говоря, дает систему уравнений для коэффициентов разложения, которые зависят только от энергии. В случае с феноменологическими теориями, можно прямо записать амплитуду предполагаемого резонансного состояния как функцию угловых и изотопических переменных. Наконец, разложение в такой ортонормированный ряд может быть использовано в фазовом анализе экспериментальных данных.

S - матрица любой реакции может быть записана в виде:

$$S = \sum_{jM(f);\, j^0M^0(i)} a_{jM(f);\, j^0M^0(i)} \left| j\, M\, (f) \right\rangle \left\langle j^0\, M^0\, (i) \right| ,$$

где $\left| j^0 M^0 (i) \right\rangle$ и $\left| j\, M\, (f) \right\rangle$ - кет векторы данного начального и конечного состояний, $\left| a_{jM(f);\, j^0M^0(i)} \right|^2$ - интенсивность соответствующего перехода, j^0, M^0 и j, M - квантовые числа полного момента и его z - компоненты в начальном и конечном состояниях соответственно; (i) и (f)

- наборы собственных значений, которые вместе с j^0, M^0 или, соответственно, с j, M образуют полные наборы для начального и конечного состояний. В дальнейшем мы будем интересоваться только угловыми частями (i) и (f) и не будем явно выписывать остальных индексов; поэтому зависимость от других переменных, таких как энергия, изотопический спин, четность и т.д., должна быть включена в коэффициенты a. Инвариантность S -матрицы при пространственных вращениях теперь требует, кроме сохранения полного момента $j = j^0$, $M = M^0$, также независимости коэффициентов a от M. Таким образом,

$$S = \sum_{j,(f),(i)} a_{j,(f),(i)}(\text{энергия},\dots)\ \hat{\mathcal{J}}_{j,(f),(i)}(\text{углы и спины}), \qquad /1/$$

где "угловые операторы" $\hat{\mathcal{J}}$ определяются формулой

$$\hat{\mathcal{J}}_{j,(f),(i)} = \sum_{M=-j}^{j} \left| jM(f) \right\rangle \left\langle jM(i) \right| \qquad /2/$$

и нормированы к $2j+1$ /см. [1]; [2]/.

Угловые операторы полностью определяются формулой /1/ и могут быть, в принципе, получены для любого процесса. Однако, практические расчеты просты только для очень простых процессов, таких как $a+b \to a'+b'$ /см. [1] /. Каждая новая частица серьезно усложняет расчеты, представляя собой одно или два суммирования Клебша-Гордана, и, таким образом, число суммируемых членов очень быстро растет.

Недавно был найден метод /см. [2] /, который упрощает расчеты, сводя задачу образования n частиц к задаче образования $n-1$ частицы с бо́льшим спином. Этот метод дает возможность получить, например, явный вид угловых операторов для рождения бозонных пар на нуклонах. Однако, для большого количества частиц в конечном состоянии, этот метод должен быть применен повторно, что снова ведет к громоздким вычислениям. Наша цель - дать более простой и более практичный метод, который заменит сложные суммирования Клебша-Гордана /налагаемые рассмотрением многих частиц/ простыми дифференциальными операциями.

Раскроем сначала эту мысль на простом примере. Угловые операторы для рассеяния π -мезонов нуклонами / $\pi + N \longrightarrow \pi' + N'$ / определяются согласно /2/, формулой

$$\sum_{M,\mu,\mu'} C_{jM}^{\ell' M-\mu' \frac{1}{2}\mu'} C_{jM}^{\ell M-\mu \frac{1}{2}\mu} Y^{*}_{\ell', M-\mu'}(q_i) Y_{\ell, M-\mu}(p_i) \chi_{\frac{1}{2}\mu'} \chi^{+}_{\frac{1}{2}\mu}, \qquad /3/^{x/}$$

где $\chi_{\frac{1}{2}\mu}$ и $\chi_{\frac{1}{2}\mu'}$ - спиновые функции соответственно начального и конечного состояний нуклона и p_i, q_i -единичные векторы параллельные начальному и конечному импульсам соответственно. Если заменить теперь $Y_{\ell' M-\mu'}(q_i)$ в /3/ векторной функцией

$$\vec{T}^{\bar{\ell}}_{jM-\mu'} = \sum_{m} C_{j' M-\mu'}^{\bar{\ell}\, M-m-\mu'\, 1\mu'} Y_{\bar{\ell}\, M-m-\mu'}(q_i) \vec{\xi}_{1m}, \qquad /4/$$

где $j' = \ell'$, но $\bar{\ell} = \ell'$ или $\ell' \pm 1$ и $\vec{\xi}_{1m}$ есть собственная функция спина 1, то получим угловой оператор для процесса

$$\pi + N \rightarrow \gamma' + N'. \qquad /4'/$$

Аналогично, если заменить $Y_{\ell' M-\mu'}(q_i)$ функцией

$$\mathcal{Y}^{\ell_1 \ell_2}_{L, M-\mu'}(q_i, r_k) = \sum_{m} C_{L, M-\mu'}^{\ell_1 m\, \ell_2\, M-m-\mu'} Y_{\ell_1 m}(q_i) Y_{\ell_2\, M-m-\mu'}(r_k), \qquad /5/$$

где $L = \ell$, то получим вместо /3/ угловой оператор для рождения пары ионов

$$\pi + N \rightarrow \pi_1' + \pi_2' + N' \qquad {}^{xx/} \qquad /5'/$$

---

x/ Вычисление /3/ приводит к выражениям типа /25а/, /25б/ настоящей статьи.

xx/ Заметим, что в зависимости от способа сложения моментов в конечном состоянии можно получить также другие угловые операторы кроме упоминаемых нами. На приведенном примере мы хотим только сформулировать задачу и указать метод решения.

Таким образом, казалось бы, что угловые операторы для более сложных процессов /4'/ и /5'/ можно легко вывести из /3/ с помощью простых формальных замен. Однако, надо иметь ввиду, что вышеупомянутые замены следует провести в каждом члене суммы по $M-\mu'$ в /3/ отдельно, после чего необходимо снова просуммировать по $M-\mu'$. Это опять приводит к громоздким расчетам. С другой стороны, вычисления угловых операторов становились бы более простыми в случае, если существовали бы дифференциальные операторы, переводящие Y -функцию прямо в функцию /4/ или /5/. Действительно, тогда, благодаря линейности дифференциальных операций, достаточно было бы знать только всю сумму /3/ /т.е., например, выражения /25а,б//и, продифференцировав соответствующим образом /3/, можно было бы сразу получить угловой оператор для процесса /4'/ или, соответственно, /5'/. Для построения векторной функции $\vec{T}$ /см. /4// из Y - функции такие операции известны. Действительно, исходя из формул для шаровых векторов, можно легко получить следующие соотношения

$$\vec{T}^{\,l-1}_{lM}(q_i)=\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\,\vec{q}\,Y_{lM}(q_i)+\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\,\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\,Y_{lM}(q_i)$$

$$\vec{T}^{\,l}_{lM}(q_i)=-\frac{i}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\vec{q}\,\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\right]Y_{lM}(q_i) \qquad /6/$$

$$\vec{T}^{\,l+1}_{lM}(q_i)=-\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\,\vec{q}\,Y_{lM}(q_i)+\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\,\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\,Y_{lM}(q_i)$$

Если теперь применить эти операции к /3/, то получим прямо угловые операторы для процесса /4'/. Эти дифференциальные операции будут в дальнейшем называться операциями "векторизации", т.к. с их помощью будет "введен" в угловые операторы спин 1. Если применить их снова к полученному выражению /в этом случае дифференцируя по $\vec{p}_1$/то будет получен процесс рассеяния векторных частиц на нуклонах.

Теперь возникает вопрос , можно ли построить операции, которые вносят в угловые операторы сразу весь новый орбитальный момент произвольной величины l_2' , в частности, можно ли получить из /3/ угловые операторы для

/5'/ с помощью одной дифференциальной операции. Этот вопрос решается во II-ой части настоящей работы. Соответствующая операция называется в дальнейшем "орбитализацией".

В I-ой части работы решается несколько более сложная проблема построения операторов "спиноризации", т.е. таких, с помощью которых можно ввести в /2/ спин 1/2. Если применить их, например, к выражению /3/, то получим угловые операторы для процесса $N_1 + N_2 \to N_1' + N_2'$.

Кроме того, сами угловые операторы /3/ можно получить посредством "спиноризации" выражения

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(p_i)\, Y^{*}_{\ell,-m}(q_i) = \frac{2\ell+1}{4\pi}\, \mathcal{P}_\ell(p\cdot q), \qquad /7/$$

описывающего процесс $\pi_1 + \pi_2 \to \pi_1' + \pi_2'$ / $\mathcal{P}_\ell$ есть полином Лежандра порядка ℓ /.

При решении поставленных задач мы часто будем пользоваться тем обстоятельством, что все угловые операторы инвариантны относительно группы одновременных вращений всех орбитальных и спиновых переменных. Поэтому в дальнейшем вращение мы будем понимать только в этом смысле, и такие понятия как скаляр, спинор, вектор и тензор будут пониматься только в этом смысле.

Заметим еще, что если будут известны все операторы векторизации, орбитализации и спиноризации, то набор угловых операторов для любого процесса можно будет, в принципе, вывести из выражения /7/, соответствующего самому простому процессу, без использования Клебш-гордановских суммирований.

Спиноризация

1/ Обозначения

В дальнейшем мы будем иметь дело с введением спина 1/2 в начальное и конечное состояния. Чтобы избежать неясности, обозначим угловые операторы до и после спиноризации через $\hat{\mathcal{L}}$ и $\hat{\mathcal{J}}$ соответственно. Соответствующие им процессы будем называть $\hat{\mathcal{L}}$ -процессом и $\hat{\mathcal{J}}$ -процессом. Например, если $\pi_1 + \pi_2 \to \pi_1' + \pi_2'$ есть $\hat{\mathcal{L}}$ -процесс, то $\pi_1 + N_1 \to \pi_1' + N_2'$ будет

$\hat{\mathcal{J}}$ -процесс. С другой стороны, если $\pi_1 + N_2 \to \pi_1' + N_2'$ есть $\hat{\mathcal{L}}$ -процесс, то $\hat{\mathcal{J}}$ - процессом будет $N_1 + N_2 \to N_1' + N_2'$.

Пусть теперь конечное состояние $\hat{\mathcal{L}}$ -процесса характеризуется набором $j_1\ (f)$ квантовых чисел моментов импульса /см., например, /2//. Тогда соответствующее конечное состояние $\hat{\mathcal{J}}$ -процесса будет характеризоваться набором, содержащим на один спин 1/2 больше, который должен быть сложен с определенным моментом импульса набора $j_1\ (f)$. Этот момент импульса может быть или простым орбитальным моментом, или спином, или может являться суперпозицией нескольких орбитальных моментов и нескольких спинов. В дальнейшем мы будем его обозначать, независимо от его природы, буквой l_1 , чтобы подчеркнуть, что он будет складываться со спином 1/2 в окончательный момент, который обозначим j_1 . Моменты, из которых l_1 сложено, не будут особо отмечаться, потому что они прибавлением спина $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ к $\vec{l}_1$ не изменяются. Через l_2 будем обозначать - опять независимо от его природы - квантовое число момента импульса, который прямо прибавляется к $\vec{l}_1$. Их сумму $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$ обозначим $\vec{l}_{12}$ и соответствующее квантовое число — l_{12} . Аналогично $\vec{l}_{13}$ будет $\vec{l}_{12} + \vec{l}_3$ и $\vec{l}_{1\,i+1}$ будет $\vec{l}_{1i} + \vec{l}_{i+1}$. Прибавлением спина $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ к $\vec{l}_1$ квантовые числа $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$ не теряют смысл, но теряют его квантовые числа $l_{12}, l_{13}, \ldots, l_{1i}, \ldots, l_{1n}$. Вместо последних возникнут числа j_{12}, $j_{13}, \ldots, j_{1i}, \ldots, j_{1n}$, соответствующие моментам

$$\vec{j}_{12} = \vec{l}_{12} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \ \ldots\ , \vec{j}_{1i} = \vec{l}_{1i} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \ \ldots\ , \vec{j}_{1n} = \vec{l}_{1n} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}.$$

Таким образом, конечное состояние $\hat{\mathcal{L}}$ -процесса будет характеризоваться набором квантовых чисел $l_1, l_2, \ldots l_n, l_{12}, l_{13}, \ldots, l_{1n}$ /вместе с числами, характеризующими моменты, составляющие $\vec{l}_1, \ldots \vec{l}_n$ /, и конечное состояние $\hat{\mathcal{J}}$ - процесса - набором $l_1, l_2, \ldots, l_n, \frac{1}{2}, j_1, j_{12}, \ldots, j_{1n}$ /опять, конечно, вместе с числами, характеризующими моменты, составляющие $\vec{l}_1, \ldots \vec{l}_n$ /.

Моменты начальных состояний $\hat{\mathcal{L}}$ -процесса и $\hat{\mathcal{J}}$ -процесса будут обозначаться теми же самыми буквами с добавочным индексом /например, $\vec{l}_1^{\,0}$, l_1^0 и т.д./.

2. Проекционные операторы

Наша задача следующая: известен полный набор операторов $\hat{\mathcal{L}}$, нужно найти полный набор операторов $\hat{\mathcal{J}}$. Операторы $\hat{\mathcal{J}}$ отличаются от $\hat{\mathcal{L}}$ тем, что они имеют как в начальном, так и в конечном состоянии на один спинор больше чем $\hat{\mathcal{L}}$. Следовательно, если мы умножим любое $\hat{\mathcal{L}}$ на прямое произведение двух таких спиноров, то получим величину, которую можно писать как линейную комбинацию $\hat{\mathcal{J}}$ -операторов с нумерическими коэффициентами:

$$\hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{k'} c_{k'} \hat{\mathcal{J}}_{k'} \qquad /10/$$

где индекс k' представляет собой полный набор квантовых чисел моментов импульса. Единичная матрица выбрана потому, что она является скаляром /в вышеупомянутом смысле/; поэтому $c_{k'}$ тоже скаляры. Строгое доказательство соотношения /10/ приведено в Приложении 1.

В соотношении /10/ $\hat{\mathcal{L}}$ считается известным и $\hat{\mathcal{J}}_{k'}$-неизвестными. Если мы теперь найдем такой проекционный оператор P_k, который, действуя на $\sum c_{k'} \hat{\mathcal{J}}_{k'}$, сохраняет только член $c_k \hat{\mathcal{J}}_k$ и уничтожает все остальные, то можно будет использовать /10/ для нахождения любого $\hat{\mathcal{J}}_k$, при котором $c_k \neq 0$ x/. Так как k представляет собой набор чисел

$$l_1, \ldots, l_m, j_{11}, j_{12}, \ldots j_{1m}; l_1^0, \ldots l_m^0, j_1^0, j_{12}^0, \ldots j_{1m}^0,$$

запишем P_k как произведение следующих проекционных операторов

$$P_{l_1} \ldots P_{l_m} P_{j_1} P_{j_{12}} \ldots P_{j_{1m}}; P_{l_1^0} \ldots P_{l_m^0} P_{j_1^0} P_{j_{12}^0} \ldots P_{j_{1m}^0},$$

левая половина которых действует слева на $\hat{\mathcal{L}}$ или $\hat{\mathcal{J}}_k$ - /операторы конечного состояния/ и правая - справа /операторы начального состояния/.

---

x/ Указанным в разделах 2 и 3 методом можно вычислять только те $\hat{\mathcal{J}}$-операторы, к которым существуют $\hat{\mathcal{L}}$ -операторы, характеризуемые теми же значениями $l_1 \ldots l_m, l_1^0, \ldots l_m^0$. Как мы увидим дальше, имеется сравнительно немного $\hat{\mathcal{J}}$ -операторов, для которых это условие не выполняется. Эти случаи рассмотрены в разделе 4.

Применив это произведение к /10/, получим

$$c_{l_1\ldots j_{1m}^0}\,\hat{\mathcal{J}}_{l_1\ldots j_{1m}^0} = P_{j_1} P_{j_{12}} \ldots P_{j_{1m}}\,\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} P_{j_1^0} P_{j_{12}^0} \ldots P_{j_{1m}^0}\,. \tag{11}$$

В правой части /11/ мы опустим операторы $P_{l_1},\ldots P_{l_m}$ и $P_{l_1^0},\ldots P_{l_m^0}$, так как эти операторы, действуя на $\hat{\mathcal{L}}_{l_1\ldots l_m\, l_{12}\ldots l_{1m};\, l_1^0\ldots l_m^0\, l_{12}^0\ldots l_{1m}^0}$, очевидно дают единицу /это следует непосредственно из определения проекционного оператора/. То же самое имеет место для $P_{l_{12}},\ldots P_{l_{1m}}, P_{l_{12}^0},\ldots P_{l_{1m}^0}$. Например,

$$P_{l_{1i}}\,\hat{\mathcal{L}}_{l_1\ldots l_{1m};\, l_1^0\ldots l_{1m}^0} = \hat{\mathcal{L}}_{l_1\ldots l_{1m};\, l_1^0\ldots l_{1m}^0}\,. \tag{12}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство операторов P :

$$P_{j_{1k}} P_{l_{1i}} = P_{l_{1i}} P_{j_{1k}} \qquad \text{если} \qquad k \geq i\,, \tag{13}$$

где $i, k = 1,2, \ldots n$. Тем же самым свойством обладают начальные P -операторы. Это можно доказать следующим образом. Так как для $k \geq i$ выражение $\sum_{k=1}^{k} \vec{l}_k + \frac{1}{2}\vec{\sigma} = \vec{l}_{1i} + \sum_{k=i+1}^{k} \vec{l}_k + \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ для $\vec{j}_{1k}$ содержит $\vec{l}_{1i}$ и, кроме того, все $\vec{l}_k$ коммутируют с $\vec{\sigma}$ и между собой, то

$$\left[\hat{l}_{1i}^{(r)}, \hat{j}_{1k}^{(s)}\right] = \left[\hat{l}_{1i}^{(r)}, \hat{l}_{1i}^{(s)}\right] = i\,\varepsilon^{rst}\,\hat{l}_{1i}^{(t)}\,, \tag{14}$$

где r, s, t - суть индексы декартовых компонент и ε^{rst} - единичный полно антисимметричный тензор. Из-за /14/ $\vec{l}_{1i}^{\,2}$ и $\vec{j}_{1k}^{\,2}$ коммутируют /см.[4] § 8/ и имеют одновременно собственные значения, т.е. имеет место /13/.

С помощью /13/ можно правую сторону /11/ писать в виде

$$P_{j_1} P_{l_1} P_{j_{12}} P_{l_{12}} \ldots P_{j_{1m}} P_{l_{1m}}\,\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} P_{l_{1m}^0} P_{j_{1m}^0} \ldots P_{l_1^0} P_{j_1^0}\,. \tag{15}$$

Здесь мы использовали также /12/. Эта форма записи нам позволит значительно упростить правую сторону - /11/. Вообще говоря, всякий проекционный оператор момента импульса можно выразить в виде бесконечного произведения типа $\prod_{n\neq l}\left(\vec{l}^{\,2} - n(n+1)\right)$, где n принимает все целые / или полуцелые/ неотрицательные значения за исключением одного выбранного ℓ . Такая запись, естественно , неудобна; поэтому мы теперь покажем, что в произведениях типа

$$P_{j_{1i}} P_{\ell_{1i}} , \qquad \text{где} \qquad j_{1i} = \ell_{1i} \pm \frac{1}{2}$$

оператор $P_{j_{1i}}$ может быть заменен оператором

$$R^{+}_{j_{1i}} = \frac{\ell_{1i}+1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell_{1i}}}{2\ell_{1i}+1} \qquad \text{в случае} \qquad j_{1i} = \ell_{1i} + \frac{1}{2} \qquad /16a/$$

и оператором

$$R^{-}_{j_{1i}} = \frac{\ell_{1i} - \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell_{1i}}}{2\ell_{1i}+1} \qquad \text{в случае} \qquad j_{1i} = \ell_{1i} - \frac{1}{2} . \qquad /16б/$$

Действительно, для заданного ℓ_{1i} может j_{1i} принимать только значения $\ell_{1i} \pm \frac{1}{2}$, так что $P_{\ell_{1i}}$ можно всегда писать как

$$P_{\ell_{1i}} = P_{j_{1i}=\ell_{1i}+\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} + P_{j_{1i}=\ell_{1i}-\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} . \qquad /17/$$

Рассмотрим, например, первый член справа. Оператор $\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell} = \vec{j}^{\,2} - \vec{\ell}^{\,2} - \frac{3}{4}$ действует на него как нумерический фактор $j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} =$ $= (\ell+\frac{1}{2})(\ell+\frac{3}{2}) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} = \ell$ /индексы у $\vec{j}$ и $\vec{\ell}$ при этом опущены/. Аналогично, для второго члена справа имеет место соотношение

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1i} P_{j_{1i}=\ell_{1i}-\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} = -(\ell_{1i}+1) P_{j_{1i}=\ell_{1i}-\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} .$$

Поэтому, умножая /17/ на $R^{+}_{j_{1i}}$, получим

$$R^{+}_{j_{1i}} P_{\ell_{1i}} = P_{j_{1i}=\ell_{1i}+\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} \qquad /18a/$$

и аналогично

$$R^{-}_{j_{1i}} P_{\ell_{1i}} = P_{j_{1i}=\ell_{1i}-\frac{1}{2}} P_{\ell_{1i}} . \qquad /18б/$$

Таким образом, заменив в /15/ все $P_{j^\cdot}$ на соответствующие $R_{j^\cdot}$ и все P_{j° на R_{j° x/, и используя снова /12/ и /13/, получим, опуская индексы у $\hat{J}$, $\hat{\mathcal{L}}$ и c,

$$\hat{J} = \frac{1}{c} R_{j_1^\cdot} R_{j_{12}^\cdot} \dots R_{j_{1n}^\cdot} \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_{j_{1m}^\circ} \dots R_{j_1^\circ} \qquad /19/$$

если $c \neq 0$ xx/.

Осталось вычислить коэффициент c.

3/ Вычисление коэффициента

Воспользуемся условием нормировки угловых операторов:

$$|c|^2 (2 j_{1n} + 1) = |c|^2 \, tr \int \hat{J}^+ \hat{J} = tr \int P_{J^\circ} P_{L^\circ} \hat{\mathcal{L}}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_L P_J P_J P_L \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_{L^\circ} P_{J^\circ} ,$$

где tr есть шпур только по переменным нового спина и $\int$ содержит в себе, кроме интеграла, также шпур по переменным старых спинов. P_L есть произведение всех конечных проекционных операторов $\hat{\mathcal{L}}$ – процесса, P_{L°, P_J и P_{J° имеют аналогичное значение. Используя свойства шпура произведения операторов и $P_J^2 = P_J$, имеем

---

x/ Начальные R – операторы имеют, благодаря эрмитовости $\vec{\ell}_{1i}^{\,\circ}$ и $\vec{\sigma}$, тот же самый вид что и конечные /см.Приложение 2/. Однако в практических вычислениях физический смысл имеют только случаи с $m = 1$ или 2, т.к. в элементарных процессах больше чем две частицы не сталкиваются, т.е. в начальном состоянии не может быть, после спиноризации, больше чем один орбитальный момент и два спина. Кроме того, можно показать /см. Приложение 2/, что первая операция справа $R_{j_{1m}^\circ}$ является излишней, так что в большинстве случаев можно обойтись совсем без начальных R –операторов.

xx/ Подчеркнем, что операторы $R_{j_1^\cdot}, \dots R_{j_{1n}^\cdot}$ между собой не коммутируют, хотя соответствующие им $P_{j_1^\cdot}, \dots P_{j_{1n}^\cdot}$ коммутируют. Тем не менее, выбранный в формуле /11/ порядок $P_{j_{11}^\cdot} \dots P_{j_{1n}^\cdot}$ /и, аналогично, $P_{j_{1m}^\circ}, \dots P_{j_1^\circ}$ / существенен для вывода /19/, т.к. только при нем ввиду /13/ можно образовать группы типа $P_{j_{1i}^\cdot} P_{\ell_{1i}^\cdot}$ /или, соответственно, $P_{\ell_{1i}^\circ} P_{j_{1i}^\circ}$ / и использовать формулу /18/.

$$|c|^2(2j_{1n}+1) = \mathrm{tr}\int \hat{\mathcal{L}}^+ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} P_L P_J P_L \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} P_{L^0} P_{J^0} P_{L^0} . \qquad /20/$$

С помощью /18/ можно $P_L P_J P_L$ записать в виде

$$P_{l_1} \dots P_{l_n} P_{l_{12}} \dots P_{l_{1n}} R_{j_1} R_{j_{12}} \dots R_{j_{1n}} P_{l_1} \dots P_{l_n} P_{l_{12}} \dots P_{l_{1n}} .$$

Это выражение можно вычислить, если формулу

$$P_{l_{1i+1}} R_{j_{1i}} P_{l_{1i+1}} R_{j_{1i+1}} = \varkappa_i P_{l_{1i+1}} R_{j_{1i+1}} \qquad /21/$$

применить постепенно для $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. При этом используется то обстоятельство, что $P_{l_{1i}}$ коммутирует со всеми $\vec{l}_{1k}$ для $k \geq i$ и, следовательно, со всеми $R_{j_{1k}}$ с $k \geq i$ /согласно /16//. $\varkappa_i$ есть нумерические коэффициенты, приведенные в таблице 1. Доказательство формулы /21/ дается в Приложении 3.

Т а б л и ц а 1.

	$j_{1i+1} = l_{1i+1} + \frac{1}{2}$	$j_{1i+1} = l_{1i+1} - \frac{1}{2}$
$j_{1i} = l_{1i} + \frac{1}{2}$	$\overset{++}{\varkappa}_i = \dfrac{(l_{1i+1}+l_{1i}+2)(l_{1i+1}+l_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1)}{2(l_{1i+1}+1)(2l_{1i}+1)}$	$\overset{+-}{\varkappa}_i = \dfrac{-(l_{1i+1}-l_{1i})(l_{1i+1}-l_{1i}-1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1)}{2l_{1i+1}(2l_{1i}+1)}$
$j_{1i} = l_{1i} - \frac{1}{2}$	$\overset{-+}{\varkappa}_i = \dfrac{-(l_{1i+1}-l_{1i})(l_{1i+1}-l_{1i}+1) + l_{i+1}(l_{i+1}+1)}{2(l_{1i+1}+1)(2l_{1i}+1)}$	$\overset{--}{\varkappa}_i = \dfrac{(l_{1i+1}+l_{1i})(l_{1i+1}+l_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1)}{2l_{1i+1}(2l_{1i}+1)}$

Таким способом исключаются из конечного состояния все R -операторы кроме последнего $R_{j_{1n}}$, а из начального - все R-операторы кроме $R_{j^0_{1n}}$. Из этих двух один, скажем $R_{j^0_{1n}}$, излишен и можно без него обойтись /см.приложение 2/. Поэтому вместо /20/ мы будем иметь

$$|c|^2 (2j_{1n}+1) = \varkappa_1 \dots \varkappa_{n-1} \varkappa_1^\circ \dots \varkappa_{n-1}^\circ \, \mathrm{tr} \int P_{L^\circ} \hat{\mathcal{L}}^+ P_L R_{j_{1n}} P_L \hat{\mathcal{L}} P_{L^\circ} .$$

Пропорциональный $\vec{\sigma} \cdot \vec{l}_{1n}$ член в $R_{j_{1n}}$ /см. /16// при проведении шпура исчезает и остается только

$$\frac{2(l_{1n}+1)}{2l_{1n}+1} \qquad \text{при} \qquad j_{1n} = l_{1n} + \frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$\frac{2l_{1n}}{2l_{1n}+1} \qquad \text{при} \qquad j_{1n} = l_{1n} - \frac{1}{2} .$$

Оба эти выражения можно записать как $\dfrac{2j_{1n}+1}{2l_{1n}+1}$. Поэтому, имея в виду, что

$$\int P_{L^\circ} \hat{\mathcal{L}}^+ P_L P_L \hat{\mathcal{L}} P_{L^\circ} = \int \hat{\mathcal{L}}^+ \hat{\mathcal{L}} = 2l_{1n} + 1 ,$$

получим окончательный результат

$$|c| = \sqrt{\varkappa_1 \dots \varkappa_{n-1} \varkappa_1^\circ \dots \varkappa_{n-1}^\circ} .$$

Фаза коэффициента c остается неопределенной, но она для нахождения полного набора $\hat{\mathcal{J}}$ -операторов не важна. Уравнение /19/ перейдет теперь в

$$\hat{\mathcal{J}}_{l_1 \dots l_n j_1 j_{12} \dots j_{1n}; l_1^\circ \dots l_n^\circ j_1^\circ j_{12}^\circ \dots j_{1n}^\circ} = \tag{/22/}$$

$$= \frac{R^{\pm}_{j_1} R^{\pm}_{j_{12}} \dots\dots R^{\pm}_{j_{1n-1}}}{\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2 \dots\dots \varkappa_{n-1}}} R^{\pm}_{j_{1n}} \hat{\mathcal{L}}_{l_1 \dots l_n l_{12} \dots l_{1n}; l_1^\circ \dots l_n^\circ l_{12}^\circ \dots l_{1n}^\circ} \frac{R^{\pm}_{j_{1n-1}^\circ} \dots R^{\pm}_{j_{12}^\circ} R^{\pm}_{j_1^\circ}}{\sqrt{\varkappa_1^\circ \varkappa_2^\circ \dots \varkappa_{n-1}^\circ}} .$$

Индекс + или − у операторов R берется в зависимости от значения j /или $l + 1/2$ или $l - 1/2$/.

4. Анализ результатов

Практическое значение формулы /22/ в том, что она позволяет найти явный вид $\hat{\mathcal{J}}$ -операторов, если известен полный набор $\hat{\mathcal{L}}$ -операторов, конечно, при предположении, что ни один из коэффициентов $\varkappa$, $\varkappa^\circ$ не равен нулю. Однако, можно легко убедиться в том, что любое из $\varkappa, \varkappa^0$ равно нулю только при наложении невыполнимых условий на квантовые числа моментов $\hat{j}$-процесса, т.е. только тогда, когда $\hat{j}$-операторы не существуют.

Действительно, из таблицы 1 мы видим, что при н[illegible]ицател[illegible] l_{1i}, l_{i+1} и l_{1i+1} и при $|l_{1i}-l_{i+1}| \le l_{1i+1} \le l_{1i}+l_{i+1}$ всегда $^{+}\varkappa_i^{+}$ больше нуля, $^{+}\varkappa_i^{-} \ge 0$ /равенство только при $l_{1i+1}=l_{1i}-l_{i+1}$ /, $^{-}\varkappa_i^{+} \ge 0$ /равенство только при $l_{1i+1} = l_{1i}+l_{i+1}$ /, $^{-}\varkappa_i^{-} \ge 0$ /равенство только при $l_{1i+1}=l_{i+1}-l_{1i}$ /. Но $^{-}\varkappa_i^{+}$ соответствует случаю $j_{1i+1}=l_{1i+1}+\frac{1}{2}$, $j_{1i}=l_{1i}-\frac{1}{2}$ так что $^{-}\varkappa_i^{+}=0$ только при

$$j_{1i+1}=j_{1i}+l_{i+1}+1,$$

т.е. когда j_{1i+1} было бы на единицу больше максимального своего значения. Следовательно, соответствующее $\hat{j}$ тождественно равно нулю. Аналогично, $^{+}\varkappa_i^{-}=0$ только при

$$j_{1i+1}=l_{1i+1}-\frac{1}{2}=l_{1i}-l_{i+1}-\frac{1}{2}=j_{1i}-l_{i+1}-1 < |j_{1i}-l_{i+1}|,$$

и $^{-}\varkappa_i^{-}=0$ только при

$$j_{1i+1}=l_{1i+1}-\frac{1}{2}=l_{i+1}-l_{1i}-\frac{1}{2}=l_{i+1}-j_{1i}-1 < |j_{1i}-l_{i+1}|,$$

т.е. опять только тогда, когда $\hat{j}$ тождественно равно нулю. Таким образом, предположение $c \neq 0$ не приводит ни к каким ограничениям.

Осталось рассмотреть случаи, в которых не выполнено предположение, сделанное при выводе формулы /11/ /см. сноску на стр. 9/. Наличие таких случаев связано с тем, что $\hat{\mathcal{L}}$ - операторы, из которых выводятся $\hat{j}$-операторы, подчиняются условию сохранения полного момента импульса $l_{1m}=l_{1m}^0$, которое для $\hat{j}$-операторов необязательно. В большинстве случаев хотя одно из l_{1m}, l_{1m}^0 после спинориазции теряет смысл, но даже тогда может этот закон проявиться как ограничение возможных значений $l_1, l_2, \ldots l_m, l_1^0, l_2^0, \ldots l_m^0$, которые смысла не теряют. Это приводит к тому, что не все $\hat{j}$-операторы можно вывести из $\hat{\mathcal{L}}$-операторов путем, указанным в предыдущих параграфах.

Возьмем сначала случай $n=m=1$, в котором все $\hat{\mathcal{L}}$ - операторы связаны условием $l_1=l_1^0$, между тем как для $\hat{j}$ - операторов существуют четыре возможности: $j_1=l_1\pm\frac{1}{2}=j_1^0=l_1^0\pm\frac{1}{2}$ и $j_1=l_1\pm\frac{1}{2}=j_1^0=l_1^0\mp\frac{1}{2}$. Первые два случая удовлетворяют условию $l_1=l_1^0$, и поэтому можно воспользоваться формулой /22/, но в других двух формула /22/ неприменима, так как не существует такое $\hat{\mathcal{L}}$, для которого $\ell_1 = \ell_1^0 \mp 1$. Тогда нужно поступать следующим образом /возьмем пример $j_1 = \ell_1 + \frac{1}{2} = j_1^0 = \ell_1^0 - \frac{1}{2}$ /: если ℓ_1^0 - простой орбитальный момент, то умножим $\hat{j}$ -оператор для $j_1 = \ell_1 + \frac{1}{2} = j_1^0 = \ell_1^0 + \frac{1}{2}$ справа на $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$, где $\vec{p}$ - импульс, соответствующий моменту $\vec{\ell}_1^0$. Оператор $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ не должен менять j_1^0 /он скаляр/, но должен менять четность относительно $\vec{p}$, т.е. менять ℓ_1^0 на единицу, вследствие чего будет $j_1^0 = \ell_1^0 - \frac{1}{2}$. Аналогично, оператор $\hat{\mathcal{L}}$ при $j_1 = \ell_1 - \frac{1}{2} = j_1^0 = \ell_1^0 + \frac{1}{2}$ получим из $j_1 = \ell_1 - \frac{1}{2} = j_1^0 = \ell_1^0 - \frac{1}{2}$ умножением на $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ справа. Если ℓ_1 тоже простой орбитальный момент, то можно того же достичь путем умножения на $\vec{\sigma} \cdot \vec{q}$ слева. Случаи, когда как $\vec{\ell}_1$, так и $\vec{\ell}_1^0$ - сложные моменты, нужно рассмотреть отдельно. Так как всякая элементарная реакция имеет в начальном состоянии не более двух частиц $m \le 2$, то ℓ_1^0 могло возникнуть только как сложение простого орбитального момента с каким-нибудь спином 1/2, 1, или больше / в случае ядра/. В таком случае можно ℓ_1^0 повысить или понизить на единицу, применив операцию

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{V}_{\pm} ,$$

где

$$N\vec{V}_{\pm} = \vec{\ell}_\alpha^{\,0} \left(\ell_1^0(\ell_1^0+1) - \ell_\alpha^0(\ell_\alpha^0+1) + \ell_\beta^0(\ell_\beta^0+1) \right) - \vec{\ell}_\beta^{\,0} \left(\ell_1^0(\ell_1^0+1) + \ell_\alpha^0(\ell_\alpha^0+1) - \ell_\beta^0(\ell_\beta^0+1) \right) + 2i \binom{\ell_1^0+1}{\ell_1^0} \left[\vec{\ell}_\alpha^{\,0} \times \vec{\ell}_\beta^{\,0} \right].$$

и N - нормировочная постоянная. Об этом будет речь в следующей статье.

Приведенный метод можно применить также тогда, когда $n \neq 1$ или $m \neq 1$. Разница только в том, что при $n = m = 1$ таких исключительных $\hat{j}$ - операторов сравнительно много /два из четырех/, между тем как при $n \neq 1$ или $m \neq 1$ они встречаются скорее исключительно. Действительно, можно убедиться в том, что только тогда, когда

$$j_{1n} = \ell_{1n}^{min} - \frac{1}{2} = \Big| \ldots \big| |\ell_1 - \ell_2| - \ell_3 \big| - \ldots - \ell_n \Big| - \frac{1}{2} \qquad /23a/$$

$$j_{1m}^0 = \ell_{1m}^{0\,Max} + \frac{1}{2} = \ell_1^0 + \ell_2^0 + \ldots + \ell_m^0 + \frac{1}{2} ,$$

или когда

$$j_{1n} = \ell_{1n}^{Max} + \frac{1}{2} = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n + \frac{1}{2} \qquad /23б/$$

$$j_{1m}^0 = \ell_{1m}^{0\,min} - \frac{1}{2} = \Big| \ldots \big| |\ell_1^0 - \ell_2^0| - \ell_3^0 \big| - \ldots - \ell_m^0 \Big| - \frac{1}{2}$$

не существует соответствующий $\hat{\mathcal{L}}$ -оператор с теми же значениями $l_1, \dots, l_n$, $l_1^0, \dots, l_m^0$. Действительно, в первом случае закон сохранения $j_{1n} = j_{1m}^0$ требует $l_{1n}^{min} = l_{1m}^{0Max} + 1$, во втором опять $l_{1n}^{Max} = l_{1m}^{0min} - 1$, что противоречит закону сложения начальных моментов.

5. Примеры

1. Из угловых операторов реакции $\pi_1 + \pi_2 \to \pi_1' + \pi_2'$, равных

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{2l+1}{4\pi} \mathcal{P}_l (\vec{p} \cdot \vec{q}) \qquad /24/$$

можно путем спинорнзации вывести угловые операторы для реакции $\pi + N \to \pi' + N'$. В этом случае $n = m = 1$ и формула /22/ принимает вид

$$\hat{\mathcal{J}}_{l,j;l^0,j^0} = R_j^{\pm} \hat{\mathcal{L}}_{l;l^0}.$$

Для верхнего знака получим согласно /16/

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{l+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{l}}{2l+1} \frac{2l+1}{4\pi} \mathcal{P}_l (\vec{p} \cdot \vec{q}),$$

где $\vec{l} = -i \left[\vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \right]$. Это даст

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (l+1) \mathcal{P}_l + i \vec{\sigma} \cdot [\vec{p} \vec{q}] \mathcal{P}_l' \right\}. \qquad /25a/$$

Аналогично, для нижнего знака у R вычисление дает

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ l \mathcal{P}_l - i \vec{\sigma} \cdot [\vec{p} \vec{q}] \mathcal{P}_l' \right\}. \qquad /25б/$$

Эти выражения совпадают с угловыми операторами, полученными Ритусом /см. [1] формула /8//. Кроме того, закон сохранения полного момента $j = j^0$ допускает также комбинации $j = l \pm \frac{1}{2} = l^0 \mp \frac{1}{2}$ /сохранение внутренней четности мезонов мы при этом не учитываем/, при которых изменяется орбитальный момент. Соответствующие им угловые операторы можно получить /согласно методу, изложенному в предыдущем параграфе/ путем умножения

/25 а,б/ на $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ справа, или /что эквивалентно/ на $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$ слева. Эквивалентность умножения на $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ справа и на $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$ слева можно показать, используя следующие общие формулы для полиномов Лежандра

$$\vec{p}\cdot\vec{q}\ \mathcal{P}_\ell = \frac{\ell+1}{2\ell+1}\mathcal{P}_{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1}\mathcal{P}_{\ell-1} \qquad /26а/$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{q}^{\,2}-1)\,\mathcal{P}_\ell' = \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}\left(\mathcal{P}_{\ell+1} - \mathcal{P}_{\ell-1}\right) \qquad /26б/$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{q}^{\,2}-1)\,\mathcal{P}_\ell'' + 2\vec{p}\cdot\vec{q}\ \mathcal{P}_\ell' = \ell(\ell+1)\,\mathcal{P}_\ell \qquad /26в/$$

/см.например [5], стр. 1325/. Получившиеся выражения совпадают, за исключением знака, с операторами, приведенными в статье [1], формула /8'/.

2. Угловые операторы для процесса

$$\pi_1+\pi_2 \rightarrow \pi_1'+\pi_2'+\pi_3'$$

имеют вид

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_{M,\mu} C^{\ell_\beta\, M-\mu\ \ell_\alpha\,\mu}_{LM}\, Y_{\ell_\beta M-\mu}(r_i)\, Y_{\ell_\alpha\mu}(q_i)\, Y^*_{\ell^\circ M}(p_i)\,, \qquad /27/$$

где $L=\ell_\alpha+\ell_\beta,\ \ell_\alpha+\ell_\beta-1,\ \dots,\ |\ell_\alpha-\ell_\beta|$ /сохранение четности опять не учитывается[x/]/. Из них, используя указанный метод спиноризации, можно получить угловые операторы для процесса

$$\pi+N \rightarrow \pi_1'+\pi_2'+N'.$$

---

x/ Мы пользуемся некоторыми обозначениями, введенными в [2]: $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ есть единичные векторы, параллельные, соответственно, относительному начальному и двум относительным конечным импульсам. Соответствующие им импульс-моменты обозначим, в отличие от [2], через $\vec{\ell^\circ}$, $\vec{\ell_\alpha}$ и $\vec{\ell_\beta}$ соответственно, чтобы не путать их с введенными в настоящей статье обозначениями. Введены также следующие сокращения: $\vec{P}_y=[\vec{p}\,\vec{r}]$, $\vec{P}_x=[\vec{P}_y\,\vec{p}]=\vec{r}-\vec{p}(\vec{p}\cdot\vec{r})$
Угловые операторы статьи [2] будут обозначаться римскими цифрами $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$ или $\overline{\text{III}}$ /номер таблицы/ и порядковым номером оператора в таблице. Например

$$(\overline{\text{I}}4) = (4\pi)^{-3/2}\left(\ell_\beta\,\mathcal{P}_{\ell_\beta} - i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\mathcal{P}_{\ell_\beta}'\right),$$

где $\mathcal{P}_{\ell_\beta}$ зависит от $(\vec{p}\cdot\vec{r})$.

Если, в частности, $\ell_\alpha = 0$ или 1, то должны получиться операторы, приведенные в таблицах $\bar{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, и $\overline{\text{III}}$ статьи /2 . Например, для $\ell_\alpha = 1$, $L = \ell_\beta$ /27/ принимает вид

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{i(2\ell^\circ+1)\sqrt{3}}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\ell^\circ(\ell^\circ+1)}}\ \vec{q}[\vec{p}\vec{\pi}]\,\mathcal{P}_{\ell_\beta}(\vec{p}\vec{\pi}) \, . \qquad /28/$$

Покажем теперь, как из $\hat{\mathcal{L}}$ можно получить угловой оператор /$\overline{\text{II}}$.8/, определенный квантовыми числами

$$J = L - \tfrac{1}{2} = \ell^\circ - \tfrac{1}{2}\ , \quad \ell_\alpha = 1\ , \ L = \ell_\beta\ , \ \ell^\circ = \ell_\beta$$

Следуя формуле /22/, /$\overline{\text{II}}$, 8/ должен быть равен выражению

$$R_J^- \ \hat{\mathcal{L}}$$

Следует напомнить, что в данном случае спин 1/2 складывается в конечном состоянии с полным орбитальным моментом $\vec{L}$, т.е. n равно 1, а роль моментов $\vec{\ell_1}$, $\vec{j}$ играют, соответственно, $\vec{L} = \vec{\ell}_\alpha + \vec{\ell}_\beta$ и $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ /см.тоже 1-й раздел статьи/. Поэтому

$$R_J^- = \frac{L - \vec{\sigma}\cdot\vec{L}}{2L+1} = \frac{\ell^\circ - \vec{\sigma}\cdot\vec{L}}{2\ell^\circ+1}$$

так как в нашем примере $L = \ell_2 = \ell^\circ$. Притом

$$\vec{L} = -i\left[\vec{q}\,\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\right] - i\left[\vec{\pi}\,\frac{\partial}{\partial\vec{\pi}}\right]$$

есть

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\left(\vec{q}\cdot[\vec{p}\vec{\pi}]\,\mathcal{P}'_{\ell_\beta}\right) = i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{p}\cdot\vec{\pi} - \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\ \vec{p}\cdot\vec{q}\right)\mathcal{P}'_{\ell_\beta} + i\,\vec{q}\cdot[\vec{p}\vec{\pi}]\ \vec{p}\cdot[\vec{\sigma}\vec{\pi}]\,\mathcal{P}''_{\ell_\beta}$$

и, стало быть,

$$R_J^-\hat{\mathcal{L}} = \frac{\sqrt{3}}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\ell_\beta(\ell_\beta+1)}}\left\{ i\,\ell_\beta\,\vec{P}_\gamma\cdot\vec{q}\ \mathcal{P}'_{\ell_\beta} + (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\ \vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{p}\cdot\vec{\pi})\mathcal{P}'_{\ell_\beta} + \vec{\sigma}\cdot\vec{P}_\gamma\ \vec{q}\cdot\vec{P}_\gamma\,\mathcal{P}''_{\ell_\beta}\right\} \qquad /29/$$

Это действительно совпадает с /$\overline{\text{II}}$.8/.

3. В следующем примере рассмотрим случай другой связи конечных моментов импульса, когда определено не L , а j_α ($\vec{j}_\alpha = \vec{\ell}_\alpha + \frac{1}{2}\vec{\sigma}$) . В этом случае роль моментов ℓ_1 , ℓ_2' , $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_{12}$ играют, соответственно, $\vec{\ell}_\alpha$, $\vec{\ell}_\beta$, $\vec{j}_\alpha$ и $\vec{J}$. Например, оператор /$\overline{\text{III}}$ 10/, определенный квантовыми числами

$$J = \ell_\beta - \tfrac{1}{2} = \ell^\circ - \tfrac{1}{2} \ , \quad \ell_\alpha = 1 \ , \quad j_\alpha = \tfrac{3}{2} \ , \quad \ell^\circ = \ell_\beta$$

должен быть, согласно формуле /22/, равен

$$\frac{1}{\sqrt{{}^+\varkappa_\alpha^-}} R^+_{j_\alpha} R^-_J \hat{\mathcal{L}} ,$$

где

$$R^+_{j_\alpha} = \frac{\ell_\alpha + 1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_\alpha}{2\ell_\alpha + 1} = \frac{2 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_\alpha}{3} \ , \qquad R^-_J = \frac{L - \vec{\sigma}\cdot\vec{L}}{2L+1}$$

и

$$^+\varkappa^- = \frac{-(1-L+1)(1-L) + \ell_\beta(\ell_\beta + 1)}{2L(2\ell_\alpha + 1)} = \frac{2\ell_\beta - 1}{3\ell_\beta} \ .$$

Заметим, что проекционный оператор R^-_J совпадает с R^-_J, о котором шла речь в предыдущем примере, так что для вычисления /$\overline{\text{III}}$ 10/ достаточно подействовать оператором $\frac{1}{\sqrt{{}^+\varkappa^-}} R^+_{j_\alpha}$ на /$\overline{\text{II}}$ 8/. Имеем

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_\alpha \{\overline{\text{II}}\, 8\} = -i[\vec{\sigma}\cdot\vec{q}]\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\{\overline{\text{II}}\, 8\} = \frac{\sqrt{3}}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\ell_\beta(\ell_\beta+1)}} \Big\{ \ell_\beta\, \vec{\sigma}\cdot[\vec{q}\,\vec{P}_y]\, \mathcal{P}'_{\ell_\beta} + 2\,\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{p}\cdot\vec{n}\ \mathcal{P}'_{\ell_\beta} -$$

$$- i\vec{P}_y\cdot\vec{q}\ \mathcal{P}''_{\ell_\beta} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{p}\cdot\vec{n} - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \vec{q}\cdot\vec{n})\mathcal{P}'_{\ell_\beta} - \vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\ \vec{q}\cdot\vec{P}_y\ \mathcal{P}''_{\ell_\beta} - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{P}_y^{\,2}\ \mathcal{P}''_{\ell_\beta} \Big\}$$

и

$$R^+_{j_\alpha}\{\overline{\text{II}}\, 8\} = \frac{\sqrt{3}}{(4\pi)^{3/2}\, 3\sqrt{\ell_\beta(\ell_\beta+1)}} \Big\{ \Big(i(2\ell_\beta - 1)\vec{P}_y\cdot\vec{q} - (\ell_\beta - 2)\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\ \vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{p}\cdot\vec{n} +$$

$$+ \ell_\beta\, \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \vec{q}\cdot\vec{n} \Big)\mathcal{P}'_{\ell_\beta} + 3(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\ \vec{P}_y\cdot\vec{q} - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \vec{P}_y^{\,2})\ \mathcal{P}''_{\ell_\beta} \Big\} \qquad /30/$$

Умножая это выражение на $1/\sqrt{{}^+\varkappa^-}$ мы получим искомый угловой оператор в довольно простой форме. Видно, что эти вычисления не представляют больших трудностей и можно их проводить почти автоматически. С другой стороны, доказательство эквивалентности полученного результата и выражения /$\overline{\text{III}}$ 10/ несколько более сложно. Прежде всего необходимо привести /30/ к виду

$$\frac{1}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{3\,\ell_\beta(\ell_\beta+1)}}\Big\{ i\,(2\ell_\beta-1)\,\vec{P}_y\cdot\vec{\eta}\;\mathcal{P}'_{\ell_\beta} + (\ell_\beta+1)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}\;\vec{p}\cdot\vec{n}\;\mathcal{P}'_{\ell_\beta} - (\ell_\beta-2)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\;\vec{p}\cdot\vec{\eta}\;\mathcal{P}'_{\ell_\beta} +$$

$$+ \frac{3}{2}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\vec{P}_y\cdot\vec{\eta} - \vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}\,\vec{P}_y^{\,2}\right)\mathcal{P}'_{\ell_\beta} - \frac{1}{2}\,\ell_\beta(\ell_\beta+1)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}\,\mathcal{P}_{\ell_\beta} + \frac{3}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\vec{P}_y\cdot\vec{\eta}\,\mathcal{P}''_{\ell_\beta}\Big\}$$

и затем надо применить формулы из векторного исчисления и использовать свойства полиномов Лежандра /26/. Результат совпадает с /$\overline{\underline{\text{III}}}$ 10/ с точностью до знака.

Приложение I

Соотношение /10/ можно доказать, используя следующую формулу:

$$\psi_{j_1}^{m_1}\,\psi_{j_2}^{m_2} = \sum_{j} C^{j_1 m_1\, j_2 m_2}_{j\; m_1+m_2}\;\psi_{j}^{m_1+m_2} \qquad /A1.1/$$

/см. например,[3] формула /2.19//. Если вместо $\psi_{j_1}^{m_1}$ подставить конечное состояние $\mathcal{L}$ -процесса

$$|\,\ell_1\cdots\ell_n\;\ell_{12}\cdots\ell_{1n}\,, M\rangle$$

/ M - компонента полного момента $\vec{\ell}_{1n}$ / и вместо $\psi_{j_2}^{m_2}$ - спинор $|\tfrac{1}{2}\mu\rangle$, то /A1.1/ примет вид

$$|\ell_1..\ell_n\,\ell_{12}..\ell_{1n}, M\rangle\;|\tfrac{1}{2}\mu\rangle = \sum_{j_{1n}} C^{\ell_{1n} M \frac{1}{2}\mu}_{j_{1n}\; M+\mu}\;|\ell_1..\ell_n\,\ell_{12}..\ell_{1n}\tfrac{1}{2} j_{1n}, M+\mu\rangle \qquad /A1.2/$$

Кет-векторы справа описывают состояния, в которых момент $\vec{\ell}_{1n}$ складываются со спином $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ в полный момент $\vec{j}_{1n} = \vec{\ell}_{1n} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. Чтобы получить справа векторы конечного состояния $\hat{\mathcal{Y}}$ -процесса, описываемые квантовыми числами

$$\ell_1 \tfrac{1}{2}, \ell_2 \ldots \ell_n\; j_1 j_{12} \ldots j_{1n}, M+\mu\,,$$

необходимо провести сложное унитарное преобразование, осуществляющее переход от представления $l_{12} \dots l_{1n}$ к представлению $j_1 j_{12} \dots j_{1n-1}$

Это преобразование имеет вид

$$|l_1 \dots l_n \, l_{12} \dots l_{1n} \tfrac{1}{2} \, j_{1n} \, M+\mu\rangle =$$

$$= \sum_{j_1 j_{12} \dots j_{1n-1}} U(l_1 \dots l_n ; l_{12} \dots l_{1n} \tfrac{1}{2} j_1 j_{12} \dots j_{1n-1} j_{1n}) \cdot |l_1 \tfrac{1}{2} l_2 \dots l_n \, j_1 \dots j_{1n-1} j_{1n}\rangle , \qquad /A1.3/$$

где U - матрица преобразования. Для нас важно то, что она независима от $M+\mu$. В случае $n = 1$ она равна единице и при $n = 2$

$$U(l_1 l_2 l_{12} \tfrac{1}{2} j_1 j_{12}) = \sqrt{(2l_{12}+1)(2j_1+1)} \; W(l_1 l_2 j_{12} \tfrac{1}{2} ; l_{12} j_1),$$

где W - коэффициент Рака. В общем случае ее можно писать как произведение нескольких преобразования Рака.

То же самое можно написать для начальных состояний. Имея ввиду, что любой кет-вектор $|j, m\rangle$ момента импульса $\vec{j}^2$ и его компоненты j_z преобразуются конгредиентно с бра-вектором

$$\langle j, -m| (-1)^{j+m}$$

мы запишем /A1.2 / для начальных состояний следующим образом:

$$(-1)^{l_{12}^0 + \frac{1}{2} - M - \mu} \langle l_1^0 \dots l_m^0 \, l_{12}^0 \dots l_{1m}^0 , M \,|\, \langle \tfrac{1}{2} \mu | = \qquad /A1.2'/$$

$$= \sum_{j_{1m}^0} C^{\,l_{1m}^0 \; -M \; \frac{1}{2} \; -\mu}_{\,j_{1m}^0 \; -M-\mu} \; (-1)^{j_{1m}^0 - M - \mu} \langle l_1^0 \dots l_m^0 \, l_{12}^0 \dots l_{1m}^0 \, j_{1m}^0 , M+\mu| .$$

В дальнейшем мы будем уже пользоваться сокращенными обозначениями L, J, L^0, J^0 как в параграфе 3. Аналогичное преобразованию /A1.3/ преобразование для случая начальных состояний имеет вид

$$\langle L^0 \tfrac{1}{2} j_{1m}^0 , M+\mu| = \sum_{j_1^0 j_{12}^0 \dots j_{1m-1}^0} U^0(L^0 \tfrac{1}{2} j_1^0 j_{12}^0 \dots j_{1m}^0) \langle J^0, M+\mu| . \qquad /A1.3'/$$

Прямое произведение /A1.2/ и /A1.2'/ и сумма по M и μ дает

$$\sum_{M,\mu} |L,M\rangle\langle L^\circ M| \; |\tfrac{1}{2}\mu\rangle\langle\tfrac{1}{2},\mu| =$$

$$= \sum_{M,\mu} \sum_{j_{1n}, j^\circ_{1n}} C^{l_{1n}\, M\, \frac{1}{2}\, \mu}_{j_{1n}\, M+\mu} \; C^{l^\circ_{1n}\, -M\, \frac{1}{2}\, -\mu}_{j^\circ_{1n}\, -(M+\mu)} (-1)^{j^\circ_{1n} - l^\circ_{1n} - \frac{1}{2}} \, |L\tfrac{1}{2} j_{1n}\, M+\mu\rangle\langle L^\circ \tfrac{1}{2} j^\circ_{1n}\, M+\mu|$$

Левая часть соотношения дает при $l_{1n} = l^\circ_{1n}$, согласно определению /2/, прямое произведение $\mathcal{L}$ –оператора на единичную матрицу. Справа можно сумму по M и μ преобразовать к сумме по $\mathcal{M} = M + \mu$ и по μ. Кроме того используем свойства симметрии коэффициентов Клебша–Гордана

$$C^{l^\circ_{1n} - (\mathcal{M}-\mu);\, \frac{1}{2}\, -\mu}_{j^\circ_{1n}\, -\mathcal{M}} = (-1)^{l^\circ_{1n} + \frac{1}{2} - j^\circ_{1n}} \; C^{l^\circ_1\, \mathcal{M}-\mu\, \frac{1}{2}\mu}_{j^\circ_{1n}\, \mathcal{M}}$$

/см., например,[3] /2.20б/ /. Таким путем приведем соотношение к виду

$$\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \sum_{\mathcal{M},\mu} \sum_{j_{1n}, j^\circ_{1n}} C^{l_{1n}\, \mathcal{M}-\mu\, \frac{1}{2}\mu}_{j_{1n}\, \mathcal{M}} \, C^{l_{1n}\, \mathcal{M}-\mu\, \frac{1}{2}\mu}_{j^\circ_{1n}\, \mathcal{M}} \, |L\tfrac{1}{2} j_{1n}\, \mathcal{M}\rangle\langle L^\circ \tfrac{1}{2}\, j^\circ_{1n}\, \mathcal{M}| .$$

Сумма по μ от произведения двух C– коэффициентов сводится к $\delta_{j_{1n} j^\circ_{1n}}$. Поэтому

$$\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \sum_{j_{1n}} \sum_{\mathcal{M}} |L\tfrac{1}{2}\, j_{1n}\, \mathcal{M}\rangle\langle L^\circ \tfrac{1}{2}\, j^\circ_{1n}\, \mathcal{M}|$$

или, согласно /A1.3/ и /A1.3'/

$$\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \sum_{j_{1n}} \sum_{\substack{j^\circ_1 \cdots j^\circ_{1n-1} \\ j_1 \cdots j_{1n-1}}} U(L\tfrac{1}{2} j_1 \cdots j_{1n})\, U^\circ(L^\circ \tfrac{1}{2} j^\circ_1 \cdots j^\circ_{1n-1}\, j_{1n}) \sum_{\mathcal{M}} |J\mathcal{M}\rangle\langle J^\circ \mathcal{M}|$$

Сумма по $\mathcal{M}$ дает /в силу $j^\circ_{1n} = j_{1n}$ / угловой оператор $\hat{\mathcal{J}}_{JJ^\circ}$. Этим соотношение /10/ доказано.

Приложение 2

Докажем, что в выражении /19/ оператор $R_{j^\circ_{1m}}$ излишен, т.е. докажем соотношение

$$R_{j_{1m}}\hat{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}R_{j^\circ_{1m}} = R_{j_{1m}}\mathcal{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \qquad /A2.1/$$

Прежде всего нужно убедиться в том, что проекционные операторы начального состояния имеют одинаковую форму как операторы конечного состояния. Так как конечные операторы действуют слева на кет-векторы и начальные - справа на бра-векторы, то начальные получатся из конечных путем эрмитова сопряжения. Поэтому, например,

$$R^-_{j^\circ} = \frac{\ell^\circ - \vec{\sigma}^+\ell^+}{2\ell^\circ+1}$$

Однако, ввиду эрмитовости операторов $\vec{\sigma}$ и $\vec{\ell}^\circ$ имеем

$$R^-_{j^\circ} = \frac{\ell^\circ - \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}^\circ}{2\ell^\circ+1} \qquad /A2.2/$$

Для доказательства /A2.1/ в общем виде, независимо от конкретной формы $\hat{\mathcal{L}}$, удобно будет перенести оператор $R_{j^\circ_{1m}}$ в /A2.1/ на левую сторону $\hat{\mathcal{L}}$ и вычислить его произведение с $R_{j_{1m}}$. Для этого нужно $\hat{\mathcal{L}}$ заменить выражением

$$\hat{\mathcal{L}}' = \sum |m\rangle\,(\langle m|)^T,$$

где $(\langle m|)^T$ есть кет-вектор, возникший из $\langle m|$ путем замены колонн и строчек. В каждом конкретном представлении $\hat{\mathcal{L}}'$ численно совпадает с $\hat{\mathcal{L}}$.

---

x/ Заметим, что в практических вычислениях, когда $\vec{\ell}^\circ$ представляется с помощью дифференциальных операторов, необходимо выразить ℓ° через $\overleftarrow{\nabla}$, div, а не через $\vec{\nabla}$=grad, так как R_{j° действует справа. Ввиду общеизвестной тождественности $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} = -\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}$ имеем $\vec{\ell}^\circ = -i[\vec{r}\times\vec{\nabla}] = -i[\overleftarrow{\nabla}\times\vec{r}]$
$R^-_{j^\circ} = \frac{\ell^\circ + i[\overleftarrow{\nabla}\vec{r}]\sigma}{2\ell^\circ+1}$ Поэтому можно тоже записать $R^+_{j^\circ} = \frac{\ell^\circ+1 - i\sigma\cdot[\overleftarrow{\nabla}\cdot\vec{r}]}{2\ell^\circ+1}$

Запишем $\hat{\mathcal{L}}'$ в следующем виде:

$$\hat{\mathcal{L}}' = \sum_{m} (-1)^{l-m} |m\rangle \widetilde{|-m\rangle} \, , \qquad /A2.3/$$

где

$$\widetilde{|m\rangle} = (-1)^{l+m} \left(\langle -m| \right)^{T}. \qquad /A2.4/$$

Преобразование - /A2.4/ может быть записано как

$$\widetilde{|a\rangle} = \left(\langle a| U^{+} \right)^{T} \qquad /A2.5/$$

где U в нашем представлении имеет вид

$$U_{m,m'} = (-1)^{l-m} \, \delta_{m,-m'} \qquad /A2.6/$$

и обладает следующими свойствами:

$$U = U^{*} \, , \quad U^{-1} = U^{T} = U^{+} \qquad /A2.7/$$

Имея ввиду, что $C_{00}^{l\,m\,l\,-m} = \dfrac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}}$,

нетрудно видеть, что /A2.3/ есть / не нормированная/ скалярная клебш-гордановская комбинация кет-векторов $|m\rangle$ и $\widetilde{|m\rangle}$, которые являются собственными векторами соответствующих операторов момента импульса. Можно показать путем вычисления матричных элементов, что в преобразованном пространстве $\widetilde{|m\rangle}$ оператор момента импульса равен $-\vec{\tilde{\mathcal{L}}}^{\circ}$: где

$$\widetilde{\vec{\ell^\circ}} = U \vec{\ell^\circ}{}^T U^T \qquad /A2.8/$$

Действительно x/

$$(\widetilde{\ell_z^\circ})_{mm'} = U_{mn} (\ell_z^{\circ T})_{ns} (U^T)_{sm'} = (-1)^{\ell-n} \delta_{n,-m} (\ell_z^{\circ T})_{-m',s} (-1)^{\ell-s} =$$

$$= (-1)^{2\ell+m+m'} (-m\,\delta_{mm'}) = -(\ell_z^\circ)_{mm'}$$

$$(\widetilde{\ell_x^\circ + i\ell_y^\circ})_{m+1,m} = -(\ell_x^\circ + i\ell_y^\circ)^T_{-m-1,-m} = -(\ell_x^\circ + i\ell_y^\circ)_{-m,-m-1} = \qquad /A2.9/$$

$$= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} = -(\ell_x^\circ + i\ell_y^\circ)_{m+1,m}$$

$$(\widetilde{\ell_x^\circ - i\ell_y^\circ})_{m-1,m} = -(\ell_x^\circ - i\ell_y^\circ)_{m-1,m}$$

то есть $\widetilde{\vec{\ell^\circ}} = -\vec{\ell^\circ}$

Поэтому можно /A2.1/ записать в виде

$$R_{j_{1m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{R}_{j^\circ_{1m}} \hat{\mathcal{L}}' = R_{j_{1m}} \hat{\mathcal{L}}', \qquad /A2.10/$$

где $\widetilde{R}_{j^\circ_{1m}}$ имеет вид /возьмем, например, случай $j^\circ_{1m} = \ell^\circ_{1m} + \frac{1}{2}$/:

$$\widetilde{R}^+_{j^\circ_{1m}} = \frac{\ell^\circ_{1m} + 1 + \vec{\sigma}\cdot\widetilde{\vec{\ell^\circ_{1m}}}}{2\ell^\circ_{1m} + 1} = \frac{\ell^\circ_{1m} + 1 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell^\circ_{1m}}}{2\ell^\circ_{1m} + 1} .$$

Важно теперь то, что оператор $-\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell^\circ_{1m}}$ действует на $\hat{\mathcal{L}}'$ одинаковым образом как $\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell_{1m}}$ на $\hat{\mathcal{L}}'$. Действительно, $\hat{\mathcal{L}}'$ является собственной функцией оператора $\vec{L}^2 = (\vec{\ell}_{1m} + \vec{\ell^\circ_{1m}})^2$ с собственным значением, равным нулю. Используя теперь формулу

---

x/ В общем случае будет $\widetilde{A} = U A^{+T} U^T$. Действительно, из $|a\rangle = A|b\rangle$ имеем $\widetilde{|a\rangle} = U A^{+T} U^T \widetilde{|b\rangle}$. Это преобразование называется в литературе просто "сопряжение" /см. [6] /. Ввиду наличия эрмитова сопряжения, оно нелинейно: $\widetilde{aA + bB} = a^*\widetilde{A} + b^*\widetilde{B}$ / $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ надо рассматривать как комплексные коэффициенты, так что $\widetilde{\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}} \neq -\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}$ $(= \vec{\sigma}\cdot\widetilde{\vec{\ell}})$ /. Однако, в случае $R_{j^\circ_{1m}}$ нелинейная часть преобразования уже проведена, т.к. $R_{j^\circ_{1m}}$ действует на бра-вектор: $\langle a| R_{j^\circ_{1m}} = \langle b|$. Отсюда и из /A.2.5/ следует $\widetilde{|b\rangle} = U R^T_{j^\circ_{1m}} U^T \widetilde{|a\rangle}$. Поэтому можно в /A.2.9/ рассматривать прямо комплексные комбинации от ℓ_x, ℓ_y и ℓ_z.

$$\hat{L}_i \psi_\ell^m = (-1)^i \sqrt{L(L+1)}\, C_{Lm}^{L\, m+i\, 1\, -i}\, \psi_L^{m+i},$$

имеем

$$\vec{L}\, \hat{\mathcal{L}}' = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1n}\, \hat{\mathcal{L}}' = -\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}^{\,o}_{1m}\, \hat{\mathcal{L}}'$$

Но если теперь в $\tilde{R}_{j^o_{1m}}$ заменить $-\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}^{\,o}_{1m}$ на $\vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1n}$, то получим вместо $\tilde{R}_{j^o_{1m}}$ оператор $R_{j_{1m}}$. Таким образом, для доказательства /A2.9/ достаточно доказать соотношение

$$R_{j_{1m}} R_{j_{1m}} \hat{\mathcal{L}}' = R_{j_{1m}} \hat{\mathcal{L}}'$$

/единичные матрицы можно включить в $\hat{\mathcal{L}}'$ или $R_{j_{1m}}$ /. Но это есть соотношение, вытекающее прямо из определения проекционного оператора.

Приложение 3.

Докажем соотношение

$$P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i} P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i\, i+1} = \varkappa_i\, P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i\, i+1} \qquad /3.1/$$

и найдем явный вид $\varkappa_i$. Следуя формулам /13/, /18/ и используя основное свойство проекционных операторов

$$P^2_{j_1 i\, i+1} = P_{j_1 i\, i+1},$$

можно левую часть /3.1/ постепенно привести к виду

$$P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i} P_{\ell_1 i\, i+1} P_{j_1 i\, i+1} = P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i} P_{\ell_1 i\, i+1} P^2_{j_1 i\, i+1} =$$

$$= P_{j_1 i\, i+1} P_{\ell_1 i\, i+1} R_{j_1 i} P_{\ell_1 i\, i+1} P_{j_1 i\, i+1}.$$

Для доказательства /A3.1/ нужно рассмотреть выражение

$$P_{j_1 i\, i+1} P_{\ell_1 i\, i+1}\, \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1i}\, P_{\ell_1 i\, i+1} P_{j_1 i\, i+1}$$

и определить, как оно действует на произвольную волновую функцию. Проекционные операторы $P_{j_1 i\, i+1}$ и $P_{\ell_1 i\, i+1}$ сохраняют из любой функции только такую часть, которая является собственной функцией операторов $\vec{j}^{\,2}_{1i+1}$, $\vec{\ell}^{\,2}_{1i+1}$ и $\frac{1}{4}\vec{\sigma}^{\,2}$ с собственными значениями $j_{1i+1}(j_{1i+1}+1)$, $\ell_{1i+1}(\ell_{1i+1}+1)$ и 3/4 соответственно. Поэтому задача сводится к вычислению матричного элемента.

$$\langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1}\, \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} | \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1i} | \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1}\, \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} \rangle$$

Явный вид этого элемента дан в [4], формула /3.101/. При этом только требуется, чтобы $\vec{\sigma}$ коммутировало с $\vec{\ell}_{1i}$ и $\vec{\ell}_{1i}$ – с $\vec{l}_{i+1}$. Это действительно выполняется, так что согласно упомянутой формуле имеем:

$$\langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1}\, \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} | \vec{\sigma}\cdot\vec{\ell}_{1i} | \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1}\, \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\ell'_{1i},\, l'_{i+1}} \langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \,\vdots\, \sigma \,\vdots\, \ell'_{1i}\, l'_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \rangle \langle \ell'_{1i}\, l'_{i+1}\, \ell_{1i+1} \,\vdots\, \ell_{1i} \,\vdots\, \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1} \rangle \cdot$$
$$\cdot \left\{ j_{1i+1}(j_{1i+1}+1) - \ell_{1i+1}(\ell_{1i+1}+1) - \tfrac{3}{4} \right\}$$

Ввиду диагональности σ и ℓ по ℓ_{1i} и l_{i+1} сумма сводится к одному члену:

$$\frac{1}{2} \langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \,\vdots\, \sigma \,\vdots\, \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \rangle \langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1} \,\vdots\, \ell_{1i} \,\vdots\, \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1} \rangle \cdot$$
$$\cdot \left\{ j_{1i+1}(j_{1i+1}+1) - \ell_{1i+1}(\ell_{1i+1}+1) - \tfrac{3}{4} \right\}$$

Оставшиеся матричные элементы вычислим по формуле /3.86/ в [4]. Получим

$$\langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \,\vdots\, \sigma \,\vdots\, \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \tfrac{1}{2} \rangle = 2$$

$$\langle \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1} \,\vdots\, \ell_{1i} \,\vdots\, \ell_{1i}\, l_{i+1}\, \ell_{1i+1} \rangle = \frac{\ell_{1i}(\ell_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1) + \ell_{1i+1}(\ell_{1i+1}+1)}{2\, \ell_{1i+1}(\ell_{1i+1}+1)} .$$

Таким образом

$$\left\langle l_{1i}\, l_{i+1}\, l_{1i+1} \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} \right| \vec{\sigma}\cdot\vec{l}_{1i} \left| l_{1i}\, l_{i+1}\, l_{1i+1}\, \tfrac{1}{2}\, j_{1i+1} \right\rangle =$$

$$= \frac{l_{1i}(l_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1) + l_{1i+1}(l_{1i+1}+1)}{2\, l_{1i+1}\,(l_{1i+1}+1)} \left\{ j_{1i+1}(j_{1i+1}+1) - l_{1i+1}(l_{1i+1}+1) - \tfrac{3}{4} \right\}.$$

Теперь можно, исходя из формул /18а/ и /18б/, записать левую сторону /А3.1/ как

$$\left[\frac{1}{2l_{1i}+1} \begin{pmatrix} l_{1i}+1 \\ l_{1i} \end{pmatrix} \pm \frac{l_{1i}(l_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1) + l_{1i+1}(l_{1i+1}+1)}{(2l_{1i}+1)\, 2l_{1i+1}\,(l_{1i+1}+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(j_{1i+1}(j_{1i+1}+1) - l_{1i+1}(l_{1i+1}+1) - \tfrac{3}{4} \right) \right] \cdot P_{l_{1i+1}} ,$$

где в $\begin{pmatrix} l_{1i}+1 \\ l_{1i} \end{pmatrix}$ берется верхнее значение для верхнего знака у $R^{\pm}_{j_{1i}}$ и нижнее – для нижнего. Видно, что, в зависимости от выбора $j_{1i} = l_{1i} \pm \frac{1}{2}$ получаем разные значения $\varkappa_i$. Кроме того, значение $\varkappa_i$ зависит тоже от выбора $j_{1i+1} = l_{1i+1} \pm 1/2$.

Вычислим в качестве примера $\varkappa_i$ для случая $j_{1i} = l_{1i} - \frac{1}{2}$ $j_{1i+1} = l_{1i+1} + \frac{1}{2}$, т.е. $-\varkappa_i^{+}$. Имеем

$$-\varkappa_i^{+} = \frac{l_{1i}}{2l_{1i}+1} - \frac{l_{1i}(l_{1i}+1) - l_{i+1}(l_{i+1}+1) + l_{1i+1}(l_{1i+1}+1)}{(2l_{1i}+1)\, 2l_{1i+1}\,(l_{1i+1}+1)}\, l_{1i+1} =$$

$$= \frac{2l_{1i}(l_{1i+1}+1) - l_{1i}(l_{1i}+1) + l_{i+1}(l_{i+1}+1) - l_{1i+1}(l_{1i+1}+1)}{2\,(2l_{1i}+1)(l_{1i}+1)}$$

Это можно проще записать как

$$ {}^{-}\varkappa_i^{+} = \frac{-(l_{1i}-l_{1i+1})(l_{1i}-l_{1i+1}-1) + l_{1i+1}(l_{1i+1}+1)}{2(l_{1i+1}+1)(2l_{1i}+1)} , $$

что совпадает с таблицей 1. Подобным образом вычисляются ${}^{+}\varkappa_i^{+}$, ${}^{+}\varkappa_i^{-}$ и ${}^{-}\varkappa_i^{-}$.

Литература

1 В.И.Ритус, ЖЭТФ /СССР/ 32, 1536 /1957/. на англ. Soviet Physics (JETP), 5, 1249 (1957).

2. S. Ciulli and J. Fischer, Partial wave analysis of boson pairs production (Il Nuovo Cimento, to be published).

3. M.E. Rose, Multipole Fields, New York 1955.

4. E.V. Condon and G.H. Shortley, The theory of atomic spectra, London 1935.

5. Morse-Feshbaal, Methods of Theoretical Physics.

6. U. Fanv and G. Racah. Irreductille Tensorial Sets (page 19) New York 1959.