

2-18

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

P - 362

В.И. Данилов

ФОРМИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
ДЛЯ УСКОРИТЕЛЕЙ  
С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Автореферат диссертации, представленной  
на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук.

Научный руководитель -  
кандидат физико-математических наук

В.П. Дмитриевский

Дубна 1959 года

В.И. Данилов

ФОРМИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
ДЛЯ УСКОРИТЕЛЕЙ  
С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Автореферат диссертации, представленной  
на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук.

Научный руководитель -  
кандидат физико-математических наук

В.П. Дмитриевский

## В в е д е н и е

В последние годы широкое распространение получили предложения по созданию ускорителей циклотронного типа, представляющих дальнейшее развитие идей Томаса. Интерес к ускорителям подобного типа вызван тем, что открыва-ется возможность строительства не только ускорителей нового типа, но и ре-конструкция существующих с целью повышения интенсивности их пучков.

Особенностью таких ускорителей является магнитное поле, напряженность которого меняется как по радиусу, так и по азимуту. Практическая реализация таких полей стала возможно лишь в настоящий период благодаря развитию новых методов расчета и измерений магнитных полей.

Данная диссертация является обобщением работ, выполненных автором в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований в период 1952-1958 г.г. совместно с Дмитриевским В.П., Заплатиным Н.Л. и в последние годы / 1956-1958/ - с Рыбалко В.С., Саркисяном Л.А. Она посвящен-на вопросам расчета магнитных полей, создаваемых равномерно намагниченными телами заданных конфигураций. Применение указанных расчетов нашло отраже-ние в формировании магнитного поля циклотрона с пространственной вариацией.

### 1. Метод равномерного намагничивания

Магнитное состояние тела и распределение составляющих магнитного поля в пространстве, свободном от токов проводимости, можно определить из следую-щей системы уравнений:

$$\vec{H}_z = \vec{H}_0 + \vec{H},$$
$$\vec{H} = \text{grad} \left\{ \int_{v'} \frac{\text{div} \vec{M}}{r} dv' - \int_{s'} \frac{(\vec{M} \cdot \vec{n})}{r} ds' \right\}, \quad /1.1/$$
$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}_z),$$

где  $\vec{H}_z$  - результирующая напряженность магнитного поля,  $\vec{H}$  - напря-женность магнитного поля, созданная намагниченным телом объема  $v'$  и ог-раниченной поверхностью  $s'$ ,  $\vec{H}_0$  - внешнее намагничивающее поле,  $\theta$  ре-

зультате которого намагниченное тело приобрело намагниченность  $M$ ,  $r$  - расстояние от элементарного объема  $dv'$  до точки наблюдения.

В общем виде решение этой системы уравнений возможно для ферромагнитных тел, ограниченных поверхностями второго порядка. Особенность таких тел состоит в том, что их объем намагничивается равномерно по направлениям составляющих внешнего поля. Хотя равномерное намагничивание строго имеет место лишь в указанном случае, в дальнейшем будем предполагать для ряда других намагниченных тел также их равномерное намагничение. Справедливость такого допущения основана на том, что во многих практических случаях тела рассматриваемых конфигураций по своей форме могут мало отличаться от тел, ограниченных поверхностями второго порядка, или быть в магнитном состоянии, близком к равномерному намагничиванию.

Учитывая, что при формировании магнитных полей циклических ускорителей имеем дело, как правило, с полями, у которых с одной стороны  $H_{0z} \gg H_{0x}, H_{0y}$  а с другой  $H_z \geq 8000$  эрстед, будем полагать, что рассматриваемые ферромагнитные тела намагничены только по оси  $Z$ .

При этих допущениях скалярный потенциал произвольного по форме равномерно намагниченного тела удобно представить для дальнейших расчетов следующим образом:

$$\Phi(r, z, \psi) = \Phi(r, z) + \Phi^{(m)}(r, z, \psi), \quad (1.2)$$

где

$$\Phi(r, z) = M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_V \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{m-1/2}(x) \right] dv',$$
$$\Phi^{(m)}(r, z, \psi) = 2M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_V \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{m-1/2}(x) \cos m(\psi - \psi') \right] dv',$$

$r, z, \psi$  - координаты точек наблюдения,  $r', z', \psi'$  - координаты переменной точки элемента  $dv'$ ,  $x = \frac{(z-z')^2 + r^2 + r'^2}{2rr'}$ ,  $Q_{m-1/2}(x)$  - сферическая функция Лежандра второго рода с полуцелым индексом.

## 11. Магнитное поле прямоугольного бруска и кольцевых шимм

Составляющие напряженности магнитного поля равномерно намагниченного прямоугольного бруска длиной  $-2l$ , высотой  $-2h$ , шириной  $2a$  могут быть вычислены из скалярного потенциала, который имеет вид:

$$\Phi/M = \left\{ \left[ \left( 2a \operatorname{arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 + d^2}} + \beta \operatorname{arsh} \frac{2}{\sqrt{\beta^2 + \eta^2}} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{2}{\sqrt{d^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right) \right]_{\eta_1=2h}^{\eta_2=2h} \right\}_{\beta_1=a}^{\beta_2=a} \Big|_{d_1=x+l}^{d_2=x-l}$$

Здесь  $M_z = M$  - намагниченность образца.

В работе исследованы свойства продольной  $H_z$  и одной из поперечных составляющих  $H_y$  магнитного поля. Знание распределений составляющих магнитного поля от прямоугольного бруска позволило использовать его в технике ускорителей при формировании локальных неоднородностей магнитного поля для вывода частиц из ускорителей /1/, создании магнитных каналов и фокусирующих устройств для повышения плотности выведенных пучков частиц /2/-/3/, исправлении medianной поверхности магнитного поля шестиметрового синхроциклотрона /4/.

Скалярный потенциал равномерно намагниченного цилиндра можно представить как

$$\Phi = 2\pi M \left\{ \sqrt{y^2 + (R+r)^2} E_0(d) - y - \frac{y^2 + r^2 + rR}{\sqrt{y^2 + (R+r)^2}} F_0(d) + \right. \\ \left. + \frac{y}{2} \left[ \Lambda_0(d, \beta) + \Lambda_0(d, \beta_1) + \frac{k^2}{P} F_0(d) \right] \right\} \Big|_{y_1}^{y_2}$$

где  $d = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{4Rr}{y^2 + (R+r)^2}}$ ,  $\beta = \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{(R+r)^2 + y^2}}{\sqrt{r^2 + y^2 + R}}$ ;

$$\beta_1 = \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{r^2 + y^2} - R}{\sqrt{y^2 + (R-r)^2}}, \quad \frac{k^2}{P} = \frac{2Ry}{\sqrt{(R+r)^2 + y^2} (\sqrt{r^2 + y^2} + R)}$$

$x, z$  - координаты точки наблюдения,  $R, h$  - радиус и полувысота цилиндра соответственно,  $\Lambda_0(d, \beta)$ ,  $\Lambda_0(d, \beta_1)$  - табулированные функции /5/.

$F_0(\alpha)$  и  $E_0(\alpha)$  - нормированные полные эллиптические интегралы, первого и второго рода,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно определяются:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = z+h, \quad \gamma_2 = z-h & \quad \text{при } z > h; \quad \gamma_1 = z-h, \quad \gamma_2 = z+h \\ \text{при } z < -h; \quad \gamma_1 = h-z, \quad \gamma_2 = z+h & \quad \text{при } -h < z < h. \end{aligned}$$

Составляющие напряженности магнитного поля, определяемые из /2.2/, имеют вид /6/

$$H_z(\nu, z) = 2\pi M \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \Lambda_0(\alpha, \beta) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{\nu^2}{P} F_0(\alpha) \right] \right\} \Big|_{\gamma_2}^{\gamma_1} \quad /2.3/$$

$$\cdot H_\nu(\nu, z) = 2M \sqrt{\frac{R}{z}} Q_{1/2} \left( \frac{\gamma^2 + R^2 + \nu^2}{2R\nu} \right) \Big|_{\gamma_2}^{\gamma_1} \quad /2.4/$$

Выражения /2.3/, /2.4/ использованы для получения формул, описывающих магнитное поле кольцевых шимм, рассматриваемых как разность соответствующих цилиндров.

Расчет составляющих магнитного поля с помощью /2.3/ и /2.4/ обладает тем преимуществом, что позволяет по одному рассчитанному варианту найти распределение поля от геометрически подобных цилиндров, кольцевых шимм.

Для формирования аксиально-симметричных магнитных полей от десятков до сотен эрстед исследованы составляющие магнитного поля от "тонких" по высоте кольцевых шимм, для которых справедливо допущение  $\Delta h/h_1 \ll 1$ , где  $\Delta h$  - высота шимм, а  $h_1$  - расстояние от плоскости  $z = 0$  до шиммы. Для расчета  $H_z$ -составляющей от таких шимм в диссертации приведены номограмма и графики для определения координат точек экстремума и значений компоненты магнитного поля  $H_z$  в этих точках. Для проведения количественных расчетов составляющих магнитного поля от равномерно намагниченных прямоугольного бруска, цилиндра и кольцевых шимм в диссертации определены и рассчитаны баллистические и магнитометрические размагничивающие факторы. Они в общем случае имеют вид:

$$N_s = \frac{1}{4ae} \int_s f_z(x, y, 0, h, a, e) dx dy, \quad /2.5/$$

### III. Магнитное поле криволинейных шимм

Формирование периодических по азимуту и радиусу магнитных полей может быть осуществлено системой криволинейных шимм с прямоугольным сечением. Так, для двух шимм конечной высоты, симметрично расположенных относительно центральной плоскости зазора электромагнита в плоскости  $Z = 0$ , имеем:

$$H_z(r, 0) = H_z^{(m)}(r, \psi) = H_0(r, \psi) = 0, \quad /3.1/$$

$$H_z(r) = 2M \left\{ \frac{\partial}{\partial h_2} \int_{s'} \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{\frac{1}{2}}(x_2) \right] ds' - \frac{\partial}{\partial h_1} \int_{s'} \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{\frac{1}{2}}(x_2) \right] ds' \right\}, \quad /3.2/$$

$$H_z^{(m)}(r, \psi) = 4M \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial h_2} \int_{s'} \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{m-\frac{1}{2}}(x_2) \cos m(\psi - \psi') \right] ds' - \frac{\partial}{\partial h_1} \int_{s'} \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{r r'}} Q_{m-\frac{1}{2}}(x_2) \cos m(\psi - \psi') \right] ds' \right\},$$

где

$$x_2 = \frac{h_2^2 + r^2 - r'^2}{2 r r'}, \quad x_1 = \frac{h_1^2 + r^2 - r'^2}{2 r r'} \quad /3.3/$$

Предварительный выбор параметров криволинейных шимм, обеспечивающих заданную амплитуду вариации, можно сделать из анализа магнитного поля бесконечной системы прямолинейных шимм неограниченной длины.

Разложение этого поля в ряд Фурье для амплитуд гармоник дает

$$H_z^{(m)} = 8M \frac{\sin(2\pi m a/d)}{m} e^{-2\pi m h/d} \left\{ 1 - e^{-4\pi m h/d} \right\}, \quad /3.4./$$

где  $d$  - расстояние между шиммами,  $a$  и  $h$  - полуширина и полувысота шимм, соответственно.

### IV. Магнитное поле шимм в присутствии ферромагнитных тел

В реальных условиях при формировании магнитных полей необходимо учитывать влияние полюсных наконечников на магнитное поле шимм, так как они обычно ставятся на поверхность полюсов или располагаются в непосред-

ственной близости от них. Влияние полюсных наконечников на магнитное поле шимм можно учесть введением полярizationного потенциала /8/.

$$\Phi_n = \int_S \sigma_m \frac{ds}{r}, \quad /4.1/$$

где  $\sigma_m = \frac{\mu - \mu_0}{2\pi(\mu + \mu_0)} H_n$  и  $\mu_0$  - магнитные проницаемости рассматриваемых сред,  $H_n$  - нормальная компонента полного поля, взятая непосредственно на границе рассматриваемых сред. Результирующее магнитное поле определяется суммой полей от намагниченных шимм и полярizationного поля, определяемого /4.1/. В общем случае решение задачи по определению полярizationного поля очень сложно; в данной работе этот вопрос не рассматривается.

Учет влияния полюсных наконечников можно произвести, если считать их плоскими безграничными поверхностями. В этом случае необходимо ввести бесконечную систему отраженных шимм с намагниченностью, определяемой соотношением

$$M_{\text{отр}}^{(k)} = M \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k;$$

где  $M_{\text{отр}}^{(k)}$  - намагниченность зеркально отраженных шимм,  $\mu$  - магнитная проницаемость полюсных наконечников,  $k$  - номер отражения.

Если в соотношении /4.2/ ограничиться областью индукций, при которых  $\mu > 100$ , что практически выполняется, то можно считать, что зеркально отраженные шиммы имеют одну и ту же величину намагниченности, т.е.  $M_{\text{отр}}^{(k)} = M$ . Это приближение вполне допустимо, так как вклад в величину и распределение составляющих магнитного поля от отражений относительно невелик и составляет небольшую добавку к полю основной шиммы.

Для шимм, находящихся на краю полюса электромагнита или вблизи его, учет влияния полюсных наконечников связан с определением полярizationного потенциала в форме /4.1/. Качественное рассмотрение показывает, что вклад в результирующее магнитное поле при учете влияния полюсных наконечников в этом случае будет меньше, чем для шимм, удаленных от края.



У. Магнитное поле пиклотрона с пространственной  
вариацией

Одним из возможных законов изменения магнитного поля для ускорителей с пространственной вариацией является следующий:

$$H_z(r, \varphi) = H_z(r) \left\{ 1 + \varepsilon \sin \left( \frac{r}{\lambda} - N\varphi \right) \right\}, \quad /5.1/$$

где  $N$  - периодичность поля по азимуту,  $2\pi\lambda$  - параметр, определяющий радиальный шаг структуры магнитного поля.

Из /5.1/ следует, что линии постоянной фазы напряженности магнитного поля  $\varepsilon H_z(r)$  представляют спирали Архимеда. Магнитное поле, близкое к /5.1/, можно сформировать системой кольцевых и спиральных с прямоугольным сечением шимм, уложенных на поверхности полюсных наконечников /8/. Составляющие магнитного поля от такой системы шимм могут быть рассчитаны с помощью /3.2/ и /3.3/.

Задача формирования магнитных полей с пространственной вариацией по заданному закону состояла в том, чтобы амплитуда вариации  $\varepsilon H_z(r)$  удовлетворяла условиям пространственной устойчивости движения части и, кроме того, чтобы создаваемое спиральными шиммами поле максимально приближалось к синусоидальному.

Заданная вариация была получена с помощью четырех прямоугольных шимм, изогнутых по спирали Архимеда и сдвинутых относительно друг друга на угол  $\pi/2$ . Амплитуда вариации была определена в интервале радиусов  $r = 0-60$  см численным интегрированием /3.3/ для случая, когда толщина шимм мала по сравнению с другими геометрическими размерами. Экспериментальная проверка показала, что амплитуда вариации в пределах ошибок эксперимента совпадает с проведенным расчетом.

Отклонение фазы основной /четвертой/ гармоники от фазы  $r/\lambda$ , представляющее наибольший интерес с точки зрения проверки данного метода формирования магнитных полей, является незначительным в диапазоне  $r = 7,0-50,0$  см.

Наибольшее отклонение имеет место в районе малых и больших радиусов. Это связано с увеличением кривизны шиммы в первом случае и краевого эффекта магнитного поля - во втором.

Формирование аксиально-симметричного магнитного поля, представляющее одну из самых сложных и трудоемких задач, было осуществлено с помощью кольцевых шимм. Подбор параметров шимм производился путем последовательно расчета и суперпозиции магнитных полей кольцевых шимм до получения требуемого закона по радиусу. Исправление среднего поля на величину в несколько эрстед производилось системой малых по объему стальных цилиндриков, закрепленных в накладках, установленных между спиральными шиммами. Оценку среднего поля и амплитуд гармоник от двух симметрично расположенных цилиндров, диаметр и высота которых малы по сравнению с расстоянием  $h_z$ , можно легко получить из /3.2/ и /3.3/. Процесс окончательного шиммирования состоит в подборе и правильном расположении малых цилиндриков, при котором, наряду с доведением среднего поля до заданных точностей, исправляются опасные в резонансном отношении низшие гармоники. Описанным способом отклонение от заданного закона изменения среднего поля было доведено до 3-5 эрстед, что составляет 0,02-0,03% от поля в центре.

Основные трудоемкие измерения производились ядерным магнитометром с точностью до 0,01-0,02% при градиенте поля около 200-300 эрстед/см. /10/

А к т у а р а т а

### З а к л ю ч е н и е

В работе развит метод расчета магнитных полей от ферромагнитных тел в предположении их равномерного намагничивания по направлению внешнего поля.

Расчетаны составляющие магнитного поля от равномерно намагниченных прямоугольного бруска, цилиндра, кольцевых и криволинейных шимм постоянной высоты. Знание составляющих магнитного поля от рассмотренных намагниченных образцов необходимо для правильного выбора требуемых параметров шимм при исправлении локальных неоднородностей магнитного поля, а также при формировании магнитных полей по заданному закону в центральной плоскости электро-

магнита.

Определены и рассчитаны размагничивающие факторы прямоугольных брусков, цилиндров, кольцевых шинн. С помощью размагничивающих факторов можно не только определять численное значение намагниченности  $M$ , но и находить в первом приближении условия как равномерного намагничивания, так и насыщения рассматриваемых образцов.

Проведенные расчеты и эксперименты по формированию магнитных полей с пространственной вариацией в первом варианте в январе 1958 года и успешный запуск модели циклотрона в январе 1959 года /8/ указывают на то, что описанным методом можно создать магнитное поле с пространственной вариацией для ускорителей заряженных частиц на большие энергии.

Изложенные в диссертации расчеты и исследования опубликованы в работах /1/-/4/, также в препринтах Объединенного института ядерных исследований /6/-/8/.

Рукопись поступила в издательский отдел 8 июня 1959 года.

### Л и т е р а т у р а

1. В.П. Дмитриевский, В.И. Данилов, Ю.Н. Денисов, Н.Л. Заплатин, **В.С. Катышев**, А.А. Кропин, А.В. Честной. Вывод пучка протонов из шестиметрового синхроциклотрона посредством возбуждения радиальных колебаний, ПТЭ, № 1, 11 /1957/.
2. В.И. Данилов, В.П. Дмитриевский, А.В. Честной. Метод повышения плотности пучка протонов, выведенного из шестиметрового синхроциклотрона, ПТЭ, № 3, 9 /1958/.
3. В.И. Данилов, О.В. Савченко. Метод фокусировки заряженных частиц от ускорителей, ПТЭ, № 3 /1959/.
4. В.И. Данилов, В.П. Дмитриевский, Б.И. Замолотчиков, **В.С. Катышев**, А.А. Кропин, А.В. Честной. Исправление.medianной поверхности магнитного поля шестиметрового синхроциклотрона, ПТЭ, № 3, 17 /1958/.

5. С. Neuman. Tables of complete elliptic integrals Journal of Mathematics and Physics v. 20, 137-207, (1941).
6. В.И. Данилов, И.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян. Формирование аксиально-симметричных магнитных полей. Препринт ОИЯИ /1958/.
7. В.И. Данилов, В.П. Дмитриевский, Н.Л. Заплатин, В.В. Кольга, Лю Нэ-чуань, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян. Формирование магнитного поля циклотрона с пространственной вариацией. Препринт ОИЯИ /1959/.
8. Д.П. Василевская, А.А. Глазов, В.И. Данилов, Ю.Н. Денисов, В.П. Желепов, В.П. Дмитриевский, Б.И. Замолодчиков, И.Л. Заплатин, В.В. Кольга, А.А. Кропкин, Лю Нэ-Чуань, В.С. Рыбалко, А.Л. Савенков, Л.А. Саркисян. Запуск циклотрона с пространственной вариацией напряженности магнитного поля. Препринт ОИЯИ /1959/.
9. Г.А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Издательство АН СССР М-Л /1958/.
10. Ю.Н. Денисов. Универсальный магнитометр. ПТЭ, № 5, 67 /1958/.