ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

Р-360

В.И. Котов, А.Б. Кузнецов, Н.Б. Рубин

ДЕЙСТВИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАКОПЛЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ

В кн.: "Ускорители" Сб. статей.
М., Атомиздат, 1960, стр. 105-113.

Дубна 1959 год

P - 360

В.И. Котов, А.Б. Кузнецов, Н.Б. Рубин

ДЕЙСТВИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАКОПЛЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ

А н н о т а ц и я

Проведен анализ совместного действия раскачки вертикальных свободных колебаний из-за рассеяния на остаточном газе и их радиационного затухания при накоплении электронов в циклических ускорителях. Получено выражение для предельной среднеквадратичной амплитуды. Найдена формула для вероятности потерь электронов к любому моменту времени. Показано, что время жизни накапливаемого пучка электронов благодаря радиационному затуханию может быть сделано достаточно большим или даже практически бесконечным.

1. В в е д е н и е

При накоплении частиц в ускорителях необходимо учитывать ряд факторов, накладывающих ограничение на число накапливаемых порций частиц: влияние пространственного заряда, расплывание накапливаемого пучка по радиусу ввиду действия закона сохранения фазового объема, потери частиц на горизонтальных стенках камеры из-за рассеяния на остаточном газе и т.д. Два первых эффекта частично были рассмотрены в работах [1, 2, 3]. Третий эффект просто рассчитывается для протонов на основе работы Блахмана и Куранта [4], поскольку энергия накапливаемых частиц практически постоянна и, следовательно, адиабатическое затухание свободных колебаний отсутствует. По отношению к электронам вопрос о расплывании пучка за счет рассеяния должен рассматриваться с обязательным учетом противоположного процесса - радиационного затухания [5] возбужденных вертикальных свободных колебаний. Наличие такого затухания, как показано в данной работе, приводит при определенных условиях к существенному увеличению времени жизни пучка и, следовательно, дает возможность накапливать значительное число порций частиц.

2. Качественное описание явления

Прежде чем переходить к точному решению задачи о совместном действии многократного рассеяния и излучения[x/] целесообразно остановиться на некоторых общих характеристиках описываемого явления.

Обычно для оценок представляет интерес выражение среднего квадрата амплитуды возбужденных за отрезок времени t свободных колебаний $\langle y \rangle$, полученное в простейших предположениях, что:

а/ стенки вакуумной камеры не ограничивают амплитуд колебаний;

б/ в начальный момент времени $/t=0/$ колебания отсутствуют.

[x/] Для простоты мы в дальнейшем изложении ограничиваемся случаем, когда накопление осуществляется в цилиндрически-симметричном магнитном поле /слабая фокусировка/. Обобщение на случай сильной фокусировки нетрудно провести по той же схеме.

Легко показать, что при учете статистического нарастания амплитуд вертикальных колебаний, происходящего в результате рассеяния, и закономерного их убывания по закону $e^{-\nu t}$ за счет радиационного затухания, величина $\langle y \rangle$ при постоянной энергии обращающегося пучка равна:

$$\langle y \rangle = \frac{g}{2\nu}\left(1 - e^{-2\nu t}\right). \qquad /1/$$

Параметр g определяется рассеянием на остаточном газе и в релятивистском случае имеет вид:

$$g = \frac{R^2}{n} \langle \theta^2 \rangle N \sigma c, \qquad /2/$$

где R - радиус орбиты, $\langle \theta^2 \rangle$- проекция среднего квадрата угла рассеяния на вертикальную плоскость, N - число атомов газа в см^3, σ - полное сечение упругого рассеяния, c - скорость света, n - показатель поля, ν - есть декремент радиационного затухания [5] вертикальных свободных колебаний, равный

$$\nu = \frac{1}{2}\frac{W}{E}, \quad W = \frac{2}{3}\frac{ce^2}{R^2}\gamma^4. \qquad /3/$$

Здесь E - полная энергия частиц, W - потери энергии на излучение в единицу времени, $\gamma = \frac{E}{E_0}$ - энергия частицы, выраженная в единицах энергии покоя E_0, e - её заряд.

Из /1/ следует, что при $t \to \infty$ величина $\langle y \rangle$ стремится к постоянному пределу $\langle y \rangle_\infty = \frac{g}{2\nu}$, в то время как при учете только рассеяния $\langle y \rangle$ линейно растет со временем. Указанный предел, естественно, тем меньше, чем больше потери энергии на излучение и чем меньше g. Предельная среднеквадратичная амплитуда вертикальных колебаний $\sqrt{\langle y \rangle_\infty}$ в случае, когда остаточным газом в камере является воздух, выражается следующей формулой:

$$\sqrt{\langle y \rangle_\infty} = 3{,}9 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{p}{H^4 \gamma n}}, \qquad /4/$$

где p - давление, выраженное в мм.рт.ст., H - магнитное поле в эрстедах, $\sqrt{\langle y \rangle_\infty}$ - в см. Например, при энергии $\gamma = 200$, когда излучение еще сравнительно невелико, затухание уже сказывается существенно, и при $p = 10^{-6}$ мм.рт.ст., $H = 5000$ эрстед, $n = 2/3$ величина $\sqrt{\langle y \rangle_\infty} = 0{,}14$ см.

Как видно, $\sqrt{\langle y \rangle_\infty}$ получается достаточно малым, и учет затухания действительно необходим. С другой стороны, во всем интервале энергий, практически интересном с точки зрения накопления электронов, можно пренебречь действием квантовых флуктуаций излучения. В самом деле, если взять отношение ξ предельной среднеквадратичной амплитуды, обязанной квантовым флуктуациям [5], к $\sqrt{\langle y \rangle_\infty}$ из /4/, то будем иметь

$$\xi = 4{,}5 \cdot 10^{-15} \gamma \sqrt{\frac{H^3}{p}} \,. \qquad /5/$$

Даже при такой достаточно большой для накопления энергии как $\gamma = 600$ и $H = 10^4$ э, $p = 10^{-6}$ мм.рт.ст., получим $\xi = 0{,}25.10^{-2}$.

Приведенное выше выражение для $\sqrt{\langle y \rangle_\infty}$ и дальнейшее детальное рассмотрение совместного действия многократного рассеяния и излучения справедливы, строго говоря, до тех пор, пока $\sqrt{T} \ll 1$, где T – время свободного пробега. Подставляя вместо γ и T их значения, для воздуха получим

$$\gamma \frac{H^2}{P} \ll 3 \cdot 10^{17}, \qquad /6/$$

где, как и раньше, p – в мм.рт.ст., H – в эрстедах.

В интервале энергий до нескольких сотен Мэв условие /6/ при разумных p и H хорошо выполняется.

3. Уравнение, описывающее процесс, и его решение

Обозначим через $U(t_0, y_0, t)$ вероятность потери частицы к моменту времени t на одной из горизонтальных стенок камеры, если в момент $t_0 < t$ квадрат её амплитуды свободных колебаний равнялся $y_0 \leqslant D^2$, где D – полувысота камеры ускорителя. Выражаясь математически, $U(t_0, y_0, t)$ есть вероятность того, что "координата" частицы y, равная y_0 в момент t_0, достигнет за время $t - t_0$ хотя бы один раз своего граничного значения $y = D^2$. Можно показать, что функция $U(t_0, y_0, t)$ подчиняется уравнению, сопряженному уравнению Эйнштейна–Фоккера:

$$\frac{\partial U}{\partial t_0} = -X(t_0, y_0) \frac{\partial U}{\partial y_0} - Y(t_0, y_0) \frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2} \,, \qquad /7/$$

где $X(t,y)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\langle y(t+\Delta t)-y(t)\rangle}{\Delta t}$, $Y(t,y)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\langle [y(t+\Delta t)-y(t)]^2\rangle}{\Delta t}$.

Для рассматриваемого процесса

$$X(t,y)=g-2\nu y,\quad Y(t,y)=gy. \qquad /8/$$

По своему смыслу $u(t_0,y_0,t)$ удовлетворяет следующим начальному и граничному условиям:

$$u(t_0,y_0,t_0)=0 \quad \text{при} \quad y_0<D^2, \qquad /9/$$

$$\left.\begin{array}{l} u(t_0,0,t) - \text{ограничена} \\ u(t_0,D^2,t)=1. \end{array}\right\} \qquad /10/$$

Подставляя в /7/ выражения для X и Y при $y=y_0$ из /8/ и делая замену переменных:

$$z_0=\frac{2\nu}{g}y_0=\frac{y_0}{\langle y\rangle_\infty},$$
$$\tau_0=2\nu t_0=\frac{gt_0}{\langle y\rangle_\infty}, \qquad /11/$$

придем к уравнению вида:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau_0}=(z_0-1)\frac{\partial u}{\partial z_0}-z_0\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}. \qquad /12/$$

Уравнение /12/ допускает разделение переменных и его решением при сформулированных условиях /9/ и /10/ будет

$$u(z_0,\tau)=1-\sum_{j=1}^{\infty}C_j\,e^{\lambda_j\tau}F(\lambda_j,1,z_0). \qquad /13/$$

/Здесь начало отсчета времени τ_0 взято равным нулю/. $F(\lambda_j,1,z_0)$ - вырожденные гипергеометрические функции[x/], λ_j - собственные значения, определяемые из граничного условия /10/, сводящегося к

[x/] О свойствах этих функций см., например, в работе [6].

$$F(\lambda_j, 1, Z_{max}) = 0\,, \quad Z_{max} = \frac{2\nu}{g} D^2 = \frac{D^2}{\langle y\rangle_\infty}\,. \qquad /14/$$

Гипергеометрические функции $F(\lambda_j, 1, Z)$, соответствующие собственным значениям λ_j, образуют полную ортогональную систему с весом e^{-Z}. Используя эти свойства данной системы функций, нетрудно определить постоянные C_j из начального условия /9/:

$$C_j = \frac{\int_0^{Z_{max}} e^{-Z} F(\lambda_j, 1, Z)\, dZ}{N_j^2} = \frac{Z_{max} e^{-Z_{max}} F(\lambda_j+1, 2, Z_{max})}{N_j^2} = \frac{Z_{max} e^{-Z_{max}}}{\lambda_j N_j^2} \left. \frac{dF(\lambda_j, 1, Z)}{dZ} \right|_{Z=Z_{max}}, \qquad /15/$$

где

$$N_j^2 = \int_0^{Z_{max}} e^{-Z} F^2(\lambda_j, 1, Z)\, dZ \qquad /16/$$

— квадрат нормы функции $F(\lambda_j, 1, Z)$.

Выражение /13/ определяет, очевидно, долю потерянных к моменту $\tau = \frac{g}{\langle y\rangle_\infty} t$ частиц в случае, когда их начальное распределение по квадратам амплитуд есть $\delta(Z - Z_0)$. При произвольном /нормированном на единицу/ начальном распределении $\varphi(Z_0)$ доля потерянных частиц $U(\tau)$ определяется выражением, получаемым из /13/ путем умножения его на $\varphi(Z_0)$ и последующего интегрирования по всем Z_0 от 0 до Z_{max}:

$$U(\tau) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j e^{\lambda_j \tau} \int_0^{Z_{max}} \varphi(Z_0) F(\lambda_j, 1, Z_0)\, dZ_0\,. \qquad /17/$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда в начальный момент амплитуды вертикальных колебаний частиц равны нулю. Тогда, полагая в /13/ $Z_0 = 0$, будем иметь

$$U(\tau) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j e^{\lambda_j \tau}. \qquad /18/$$

Получение численных результатов требует, вообще говоря, отыскания собственных значений и табулирования соответствующих гипергеометрических функций. Однако, как показали расчеты, при $Z_{max} \leq 1$ доля потерянных к моменту t частиц будет незначительно отличаться от таковой, рассчитанной без учета радиационного затухания. Значительная разница будет наблюдаться для $Z_{max} \gg 1$. Исходя из общих свойств вырожденных гипергеометрических функций, нетрудно показать, что при $Z_{max} \to \infty$ собственные значения λ_j стремятся к целым отрицательным числам: 0, - 1, - 2...

В соответствии с таким асимптотическим поведением собственных значений λ_1 при больших Z_{max} имеет вид

$$\lambda_1 = -\frac{1}{Ei(Z_{max}) - \ln Z_{max} - C}, \qquad /19/$$

где $Ei(Z)$ – интегральная показательная функция /свойства $Ei(Z)$ см. в [6], таблицы приведены в [7] /, C = 0,577 – постоянная Эйлера. Все коэффициенты C_j, начиная с j = 2, при $Z_{max} \to \infty$ будут стремиться к нулю /см. /15/ , а $C_1 \to 1$. Таким образом, при больших Z_{max} приближенно можно считать, что доля потерянных частиц к моменту τ равна

$$u(\tau) \cong 1 - e^{\lambda_1 \tau}, \qquad /20/$$

где λ_1 – определяется формулой /19/. Выражением /20/ практически можно пользоваться для $Z_{max} \geq 3$. Если определить время жизни пучка электронов из условия $-\lambda_1 \tau_ж = 1$, то будем иметь

$$t_ж = \frac{Ei(Z_{max}) - \ln Z_{max} - C}{2\nu}. \qquad /21/$$

На основе полученных выше формул можно всегда так подобрать параметры ускорителя, что время жизни пучка будет достаточно большим или даже практически бесконечным, и рассматриваемый эффект не будет накладывать ограничения на число накапливаемых порций частиц.

Работа поступила в издательский отдел
26 апреля 1959 года.

Литература

1. C.E. Nielson, A.M. Sessler, Rev. Sci. Instr., 30, 80 (1959).
2. В.И.Котов, В.А.Пуштарик, "Атомная энергия" /в печати/.
3. K.R. Symon, A.M. Sessler, CERN Symposium I, 44 (1956).
4. N.M. Blachmann, E.D. Courant, Phys.Rev. 74, 140, (1948), перевод в сборнике "Проблемы современной физики" 2 /1952/.
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Приложение № 4 к журналу "Атомная энергия", 31 /1957/.
6. Н.Н.Лебедев, Специальные функции и их приложения, ГИТТЛ, Москва, /1953/.
7. Е.Янке и Ф.Эмде. Таблица функций, стр. 102, ГИТТЛ /1949/.