

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

P-344

В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян

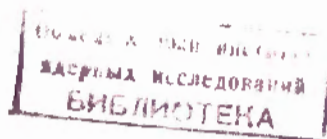
ФОРМИРОВАНИЕ
АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Дубна 1959 год

Р - 344

В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян

ФОРМИРОВАНИЕ
АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ



В в е д е н и е

Одной из основных характеристик циклических ускорителей /циклотрон, синхроциклотрон, циклотрон с пространственной вариацией магнитного поля/ является аксиально-симметричное магнитное поле, определяющее частоту обращения частиц.

Формирование такого поля по заданному закону в медианной плоскости может быть осуществлено кольцевыми шиммами, располагаемыми в определенной последовательности. Выбор нужной конфигурации представляет сложную задачу.

Одним из возможных методов определения необходимой конфигурации кольцевых шимм является метод, при котором прибегают к расчету и суперпозиции магнитных полей одиночных кольцевых шимм до получения требуемого закона.

В работе рассмотрены составляющие магнитного поля кольцевых шимм, расчет которых сделан на основе предположения о равномерном намагничивании объема шиммы по направлению вертикальной составляющей внешнего намагничивающего поля.

Проведенные расчеты и эксперименты указывают на возможность расчета таким методом составляющих магнитного поля кольцевых шимм с точностью в несколько процентов.

1. Метод равномерного намагничивания

Магнитное состояние намагниченного ферромагнитного тела и распределение составляющих магнитного поля вне его можно определить из следующей системы уравнений:

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_0 + \vec{H},$$
$$\vec{H} = \text{grad} \left\{ \int_{V'} \text{div} \vec{M} \frac{dv'}{r} - \int_{S'} \frac{(\vec{M} \cdot \vec{n})}{r} ds' \right\}, \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{H}_\Sigma), \quad /1.1/$$

где \vec{H}_0 - напряженность внешнего намагничивающего поля; \vec{H} - напряженность магнитного поля, созданная намагниченным телом объема V' , ограниченного поверхностью S' ; \vec{H}_Z - напряженность результирующего магнитного поля либо внутри объема рассматриваемого тела, либо вне его; \vec{M} - намагниченность элемента объема dv' или "плотность магнитных зарядов" элемента поверхности dS' ; z - расстояние от точки наблюдения до рассматриваемых dv' или dS' .

Система уравнений /1.1./ имеет строгое решение только для ферромагнитных тел, ограниченных поверхностями второго порядка /1/. Особенность таких тел состоит в том, что в однородном внешнем поле их объем намагничивается равномерно.

Хотя равномерное намагничивание справедливо лишь в указанном случае, мы будем при расчете магнитного поля кольцевых шимм также предполагать их равномерное намагничивание. Возможность такого предположения основана на том, что во многих практических случаях шиммы рассматриваемых конфигураций могут находиться в магнитном состоянии, близком к равномерному намагничиванию. Последнее имеет место при условии, что радиальная протяженность кольцевых шимм велика по сравнению с их высотой.

Предположение о равномерном намагничивании объема кольцевых шимм позволяет аналитически рассчитать как распределение составляющих магнитного поля, так и численное значение намагниченности M .

11. Скалярный потенциал тел с аксиальной симметрией

Если намагничивающее поле однородно и имеет компоненту $H_Z = H_0$, то скалярный потенциал равномерно намагниченного тела в цилиндрической системе координат удобно представить следующим образом:

$$\varphi = M \frac{\partial}{\partial z} \int_{V'} \frac{dv'}{[(z-z')^2 + z^2 + z'^2 - 2zz' \cos(\psi - \psi')]^{1/2}}, \quad /2.1/$$

где положено $M_z = M$, z, φ - координаты точки наблюдения;
 z', φ' - координаты переменной точки элемента объема dv' .

В дальнейших преобразованиях воспользуемся известным соотношением /2/

$$\frac{1}{\rho} = \int_0^{\infty} e^{-|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|\lambda} J_0(b\lambda) d\lambda ,$$

/2.2/

где $\rho = [(z-z')^2 + z^2 + z'^2 - 2zz' \cos(\varphi-\varphi')]^{1/2}$,

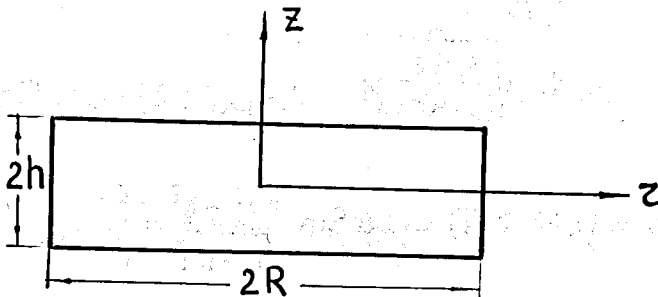
$$b = [z^2 + z'^2 - 2zz' \cos(\varphi-\varphi')]^{1/2}.$$

Согласно теореме о сложении функций Бесселя первого порядка с индексом нуль /2/ , для тел, обладающих аксиальной симметрией, возможно следующее представление скалярного потенциала:

$$\Phi(z, z) = M \frac{\partial}{\partial z} \int_{V'} \left[\int_0^{\infty} e^{-|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|\lambda} J_0(\lambda z) J_0(\lambda z') d\lambda \right] dv'.$$

/2.3/

111. Магнитное поле кольцевых шимм



Черт. 1.

Скалярный потенциал равномерно намагниченного цилиндра в системе координат, указанной на чертеже 1, после интегрирования /2.3/ по z' , φ' и φ можно представить в виде

$$\varphi = 2\pi MR \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma\lambda} J_0(\lambda z) J_1(\lambda R) d\lambda \Big|_{\gamma_2}^{\gamma_1} \quad /3.1/$$

Здесь γ_1 и γ_2 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} & \gamma_1 = z+h, \quad \gamma_2 = z-h \quad \text{при} \quad z < h; \quad \gamma_1 = z-h, \quad \gamma_2 = z+h \\ & \text{при} \quad z < -h; \quad \gamma_1 = h-z, \quad \gamma_2 = z-h \quad \text{при} \quad -h < z < h; \quad R, h \\ & - \text{ радиус и полувысота цилиндра.} \end{aligned}$$

Полагая в /3.1/ $z=0$, найдем выражение скалярного потенциала на оси симметрии:

$$\varphi(0, z) = \left\{ \sqrt{\gamma^2 + R^2} - \gamma \right\} \Big|_{\gamma_2}^{\gamma_1} \quad /3.2/$$

Выражение H_z - составляющей магнитного поля можно найти из /3.1/ в виде совокупности полных эллиптических интегралов третьего рода. После приведения этих интегралов к табулированной функции $\Lambda_0(\alpha, \beta)^{4/}$ $H_z(z, z)$ представляется следующим образом ^{/5/}:

$$H_z(z, z) = 2\pi M \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\Lambda_0(\alpha, \beta) + \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \frac{\kappa^2}{P} F_0(\alpha)] \right\} \Big|_{\gamma_2}^{\gamma_1} \quad /3.3/$$

где $\alpha = \alpha(\gamma, z, R) = \alpha z c \sin \sqrt{\frac{4Rz}{(z+R)^2 + \gamma^2}}$, $\beta = \beta(\gamma, z, R) = \alpha z c \sin \sqrt{\frac{(z+R)^2 + \gamma^2}{z^2 + \gamma^2 + R}}$,

$$\beta_1 = \beta_1(\gamma, z, R) = \alpha z c \sin \frac{\sqrt{z^2 + \gamma^2} - R}{\sqrt{(z-R)^2 + \gamma^2}},$$

$$\frac{\kappa^2}{P} = \frac{\kappa^2}{P}(\gamma, z, R) = \frac{2R\gamma}{\sqrt{(z+R)^2 + \gamma^2} (\sqrt{z^2 + \gamma^2} + R)},$$

$F_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} F(\alpha, \frac{\pi}{2})$ - нормированный эллиптический интеграл первого рода;

$\Lambda_0(\alpha, \beta)$ - табулированная функция двух переменных α, β

Из свойств функции $\Lambda_0 / \alpha, \beta /$ отметим следующие ^{/4/}:

$$\Lambda_0(0, \beta) = \sin \beta, \quad \Lambda_0(d, 0) = 0,$$

$$\Lambda_0\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) = \frac{2}{\pi} \beta, \quad \Lambda_0(d, -\beta) = -\Lambda_0(d, \beta), \quad /3.4/$$

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial d} = -\frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta}{\Delta' \beta} \{ F_0(d) - E_0(d) \},$$

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \beta} = \frac{1}{\Delta' \beta} \{ E_0(d) - \kappa'^2 \sin \beta F_0(d) \},$$

где $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$, $\Delta' \beta = [1 - \kappa'^2 \sin^2 \beta]$, $E_0(d) = \frac{2}{\pi} E\left(d, \frac{\pi}{2}\right)$

нормированный эллиптический интеграл второго ряда.

Используя соотношение /3/

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_0(bt) J_0(ct) dt = \frac{1}{\pi \sqrt{bc}} Q_{\nu-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right) \quad /3.5/$$

и выражение /3.1/ для радиальной составляющей магнитного поля, найдем

$$H_z(z, z) = 2M \sqrt{\frac{R}{z}} Q_{1/2} \left(\frac{\gamma^2 + R^2 + z^2}{2Rz} \right) \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \quad /3.6/$$

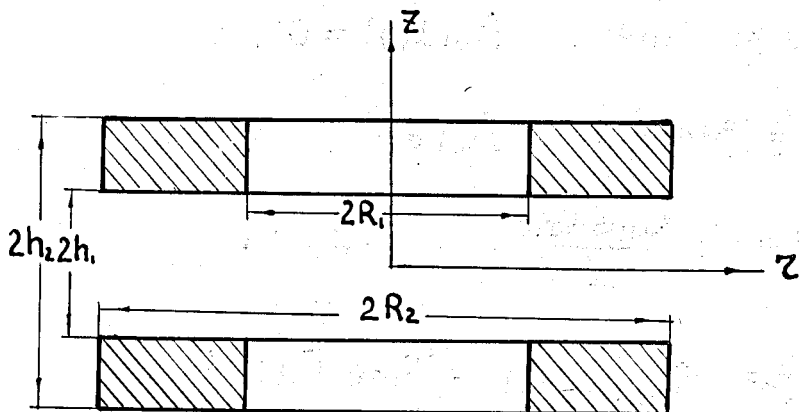
Здесь $Q_{\nu-1/2} \left(\frac{\gamma^2 + R^2 + z^2}{2Rz} \right)$ обозначает сферическую функцию Лежандра второго рода с полуцелым индексом.

При $z = 0$ имеем

$$H_z(0, z) = 2\pi M \left\{ 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + R^2}} \right\} \Big|_{\delta_1}^{\delta_2}, \quad /3.7/$$

$$H_z(0, z) = 0. \quad /3.8/$$

Обычно наибольший интерес при формировании аксиально-симметричных магнитных полей представляет знание H_z - составляющей магнитного поля в средней плоскости / $z = 0$ / от двух симметрично расположенных кольцевых шимм, показанных на чертеже 2.



Черт. 2.

В этом случае выражение H_z - составляющей магнитного поля в плоскости $z = 0$ может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
 H_z(z) = & 2\pi M \left\{ \Lambda_0[d(h_1, z, R_1), \beta(h_1, z, R_1)] + \Lambda_0[d(h_1, z, R_1), \beta(h_1, z, R_2)] + \right. \\
 & + \frac{\kappa^2}{\rho}(h_1, z, R_1) F_0[d(h_1, z, R_1)] - \Lambda_0[d(h_1, z, R_1), \beta(h_1, z, R_2)] - \\
 & - \Lambda_0[d(h_1, z, R_2), \beta_1(h_1, z, R_2)] - \frac{\kappa^2}{\rho}(h_1, z, R_2) F_0[d(h_1, z, R_2)] - \quad /3.9/ \\
 & - \Lambda_0[d(h_2, z, R_1), \beta(h_2, z, R_1)] - \Lambda_0[d(h_2, z, R_1), \beta_1(h_2, z, R_1)] - \\
 & - \frac{\kappa^2}{\rho}(h_2, z, R_1) F_0[d(h_2, z, R_1)] + \Lambda_0[d(h_2, z, R_2), \beta_1(h_2, z, R_2)] + \\
 & \left. + \Lambda_0[d(h_2, z, R_2), \beta_1(h_2, z, R_2)] + \frac{\kappa^2}{\rho}(h_2, z, R_2) F_0[d(h_2, z, R_2)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Соотношение /3.9/ представляет собой разность магнитных полей от двух цилиндров конечной высоты $2h = h_2 - h_1$ с радиусами R_1 и R_2 .

Из /3.9/ легко получить формулы для H_z - составляющей магнитного поля от цилиндров конечной высоты и кольцевых шимм, верхние основания которых удалены в бесконечность, полагая $R_1 = 0$ в первом случае и $h_2 \rightarrow \infty$ - во втором.

Составляющая магнитного поля $H_z(z)$ от шимм конечной высоты имеет как положительный, так и отрицательный знак, а от шимм неограниченной высоты - только положительный.

Общим для этих конфигураций намагниченных тел является наличие положительного поля с максимумом непосредственно под цилиндром или кольцевой шиммой.

Если рассмотреть магнитное поле H_z от симметрично расположенных относительно друг друга цилиндров неограниченной высоты $h_2 \rightarrow \infty$, то можно получить

$$H_z(z,0) = 4\pi M \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\Lambda_0(\alpha, \beta) + \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \frac{\kappa^2}{P} F_0(\alpha)] \right\}, \quad /3.10/$$

где функции $\alpha = \alpha(h_1, z, R)$, $\beta = \beta(h_1, z, R)$, $\beta_1 = \beta_1(h_1, z, R)$, $\frac{\kappa^2}{P} = \frac{\kappa^2}{P}(h_1, z, R)$ определяются из /3.3/ подстановкой h_1, z, R .

При радиусе цилиндра $R \rightarrow \infty$ из /3.10/ следует, что

$$H_z = 4\pi M. \quad /3.11/$$

Для центра $z = 0$ из /3.10/ найдем

$$H_z(0) = 4\pi M \left\{ 1 - \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + R^2}} \right\}. \quad /3.12/$$

Для распределения магнитного поля $H_z(z)$ от двух цилиндров неограниченной высоты характерным является наличие максимального поля при $z = 0$, плавного спада поля по радиусу до точки $z \approx R - h_1$, и более резкого при $z \approx R + h_1$.

В ряде практических случаев представляет интерес рассмотреть магнитное поле кольцевых шимм, у которых один из геометрических размеров мал по сравнению с другими.

Первоначально найдем выражение H_z - составляющей магнитного поля кольцевых шимм, у которых радиальная протяженность $\Delta R = R_2 - R_1$ мала по сравнению со средним радиусом $\Delta R \ll \frac{R_2 + R_1}{2} = R$.

Разлагая выражение /3.9/ в ряд и ограничиваясь первым приближением, найдем для кольцевых шимм неограниченной высоты

$$H_z(z) = 4\pi M \frac{R h_1 E_0(d) \Delta R}{[(z-R)^2 + h_1^2] \sqrt{(z+R)^2 + h_1^2}} \quad /3.13/$$

В предельном случае при $R \rightarrow \infty$, $\Delta R = \text{Const.}$ в системе координат связанной с шиммой, получим

$$H_z(z) = 4\pi M \left\{ \frac{h_1 R \Delta R E_0(d)}{[(z-R)^2 + h_1^2] \sqrt{(z+R)^2 + h_1^2}} \right\} \xrightarrow[R-z=y]{R \rightarrow \infty} 8M \frac{h_1 \Delta R}{y^2 + h_1^2} \quad /3.14/$$

где y - точка наблюдения.

Соотношение /3.14/ описывает магнитное поле $H_z(z)$ от двух симметрично расположенных тонких прямолинейных шимм^{16/}. Отличительной чертой распределений H_z - составляющей магнитного поля от тонких по радиусу кольцевых шимм является наличие максимума напряженности магнитного поля вблизи среднего радиуса шиммы с отходом от него на небольшую величину к центру.

В практике формирования аксиально-симметричных магнитных полей в интервале от десятков до сотен эрстед важное значение имеет знание H_z - составляющей магнитного поля кольцевых шимм, высота которых мала по сравнению с расстоянием h_1 от центральной плоскости до шимм ($\Delta h = h_2 - h_1 \ll h_1$).

Так, для двух дисков /тонких "по высоте" цилиндров при условии, что $\Delta h/h_1 \ll 1$, из /3.9/ получим^{17/}

$$H_z(z) = 2\pi M \frac{\Delta h}{\sqrt{(R+z)^2 + h_1^2}} \left\{ F_0(d) + \frac{R^2 - z^2 - h_1^2}{(R-z)^2 + h_1^2} E_0(d) \right\} \quad /3.15/$$

Выражение /3.15/ можно представить иным способом, а именно через сферические функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом /7/, а также с помощью вспомогательных интегралов, таблицы которых приведены в работе /8/.

Для радиальной составляющей от тонких "по высоте" цилиндров найдем:

$$H_z(z) = 2M \frac{h_1 \Delta h}{\sqrt{(R+z)^2 + h_1^2}} \left\{ \frac{h_1^2 + R^2 + z^2}{h_1^2 + (R-z)^2} E_0(\alpha) - F_0(\alpha) \right\}. \quad /3.16/$$

На оси симметрии из /3.15/ и /3.16/ при $z = 0$ имеем

$$H_z(0) = 4\pi M \Delta h \frac{R^2}{[R^2 + h_1^2]^{3/2}}, \quad /3.17/$$

$$H_z(0) = 0. \quad /3.18/$$

Соотношения /3.15/ и /3.16/ с точностью до постоянного множителя описывают вертикальную и радиальную составляющие магнитного поля от кругового витка с током /8/.

Расчет магнитного поля по /3.15/ и /3.16/ обладает тем преимуществом, что позволяет по одному рассчитанному варианту найти распределение составляющих $H_z(z)$ от геометрически подобных дисков и кольцевых шимм с помощью соотношений

$$\frac{h_1'}{h_1} = \frac{R_1'}{R} = \frac{\Delta h_1'}{\Delta h} = \frac{z_1'}{z} = \nu, \quad / \text{ для дисков} / \quad /3.19/$$

$$\frac{h_1'}{h_1} = \frac{R_1'}{R_1} = \frac{R_2'}{R_2} = \frac{\Delta R_1'}{\Delta R} = \frac{\Delta h_1'}{\Delta h} = \frac{z_1'}{z} = \nu. \quad / \text{ для кольцевых шимм} /$$

Для облегчения расчета компоненты магнитного поля $H_z(z)$ от тонких "по высоте" кольцевых шимм на рис. 1 приведена номограмма, построенная на основе вычислений, выполненных в работах /7, 8/.

По оси ординат номограммы отложен безразмерный параметр $\frac{H_z(z)}{4\pi M \Delta h/h_1}$, а по оси абсцисс - $\frac{R}{h_1}$. Приведенная сетка кривых при различных значениях $\frac{z}{h_1} = \text{const}$ дает возможность рассчитать H_z - составляющую напряженности магнитного поля тонких "по высоте" кольцевых шимм для значений $R < 6h_1$ с интервалом между точками наблюдения $\Delta z = 0,25 h_1$.

Координаты точек экстремума и соответствующие значения z - составляющей напряженности магнитного поля от дисков могут быть определены с помощью графиков, представленных на рисунках /2/-/4/. Из анализа этих графиков в случае $h_1 = \text{const}$ следует, что H_z - составляющая магнитного поля максимальна в центре $z = 0$ для дисков, радиус которых удовлетворяет соотношению $R \leq \sqrt{2}h_1$, а при $R > \sqrt{2}h_1$, этот максимум смещается к краю диска. Его координаты можно определить по кривым, изображенным на рис. 2.

При $R = \sqrt{2}h_1$, имеет место максимум из максимумов, который ~~при $R > \sqrt{2}h_1$, смещается от центра к краю диска. Его координаты можно определить по кривым, изображенным на рис. 2.~~

Значение поля в центре $z = 0, z = 0$ от тонких "по высоте" кольцевых шимм, симметрично расположенных относительно центральной плоскости, может быть как отрицательным, так и положительным. Последнее зависит от отношений внутреннего и внешнего радиусов к радиусу $R = \sqrt{2}h_1$.

1У. Размагничивающие факторы цилиндров и кольцевых шимм /9/

До сих пор мы рассматривали составляющие магнитного поля, не делая никаких заключений относительно величины намагниченности M .

Предположение о равномерном намагничивании позволяет в первом приближении сделать некоторые теоретические заключения относительно величины M в зависимости от геометрии рассматриваемых образцов и величины намагничивающего поля. При определении размагничивающих факторов и величины намагниченности M для цилиндров и кольцевых шимм будем исходить из определения соответствующих величин для равномерно намагниченных эллипсоидов вращения /1/.

Напряженность магнитного поля внутри объема тел, ограниченных поверх-

ностями второго порядка, может быть записана следующим образом:

$$H_{\Sigma i} = H_{0i} + \Delta H_i, \quad /4.1/$$

где $i \rightarrow x, y, z$, $\Delta H_i = -N_i M_i$ - напряженность так называемого размагничивающего поля, M_i - намагниченность, N_i - размагничивающий фактор, зависящий в данном случае только от геометрии рассматриваемого образца.

Для равномерно намагниченных по оси Z цилиндров и кольцевых шимм можно определить также размагничивающее поле в виде:

$$\Delta H_z = -M_z \cdot f_z(z, z, h, R) \quad \text{для цилиндров,} \quad /4.2/$$

$$\Delta H_z = -M_z f_z(z, z, h, R_1, R_2) \quad \text{для кольцевых шимм.} \quad /4.3/$$

Здесь функции $f_z(z, z, h, R)$ и $f_z(z, z, h, R_1, R_2)$ находятся из /3.1/ и определяют Z -составляющую магнитного поля для точек, лежащих внутри объема.

Эти функции можно трактовать как размагничивающие факторы, особенность которых состоит в том, что они зависят не только от геометрии, но и от координат точек наблюдения. Еще одним отличием является то, что помимо функций $f_z(z, z, h, R)$ и $f_z(z, z, h, R_1, R_2)$ имеются функции $f_z(z, z, h, R)$ и $f_z(z, z, h, R_1, R_2)$ тождественно равные нулю в случае эллипсоидов вращения.

Однако роль размагничивающих факторов могут выполнять только функции $f_z(z, z, h, R)$ и $f_z(z, z, h, R_1, R_2)$ в силу следующих соотношений:

$$f_z(z, 0, h, R) = f_z(z, 0, h, R_1, R_2) = 0, \quad /4.3/$$

$$\int_{V_i} f_z(z, z, h, R) z dz d\varphi dz = \int_{V_i} f_z(z, z, h, R_1, R_2) z dz d\varphi dz = 0,$$

где интегрирование производится по координатам точек наблюдения внутри объема V' .

В практике обычно рассматривались размагничивающие факторы, характеризующие среднюю индукцию, отнесенную к центральному сечению или ко всему объему. В первом случае - это так называемые баллистические, а во втором - магнитометрические размагничивающие факторы.

В соответствии с этим, усредняя функцию

$$f_z(z, z, h, R) = 2\pi R \int_0^{\infty} e^{-h\lambda} (e^{-z\lambda} + e^{z\lambda}) J_0(\lambda z) J_1(\lambda R) d\lambda, \quad /4.4/$$

описывающую размагничивающее поле внутри цилиндра радиуса R и высоты $2h$, по координатам точек наблюдения, отнесенным к центральному сечению $/z = 0/$ или ко всему объему, получим:

1/ баллистический размагничивающий фактор

$$\frac{N_s(m)}{4\pi} = 1 + \frac{m}{2} \sqrt{4+m^2} \{ E_0(d_s) - F_0(d_s) \}, \quad /4.5/$$

где $m = \frac{h}{R}$, $d_s = a z c \sin \frac{2}{\sqrt{4+m^2}}$

2/ магнитометрический размагничивающий фактор

$$\frac{N_v(m)}{4\pi} = 1 + \frac{4}{3\pi m} - \frac{2}{3m} \sqrt{m^2+1} \{ E_0(d_v) + m^2 [F_0(d_v) - E_0(d_v)] \}, \quad /4.6/$$

где $d_v = a z c \sin \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

Между баллистическим и магнитометрическим размагничивающим фактором существует простая связь, а именно:

$$N_s(2m) = N_v(m) + m \frac{d}{dm} N_v(m). \quad /4.7/$$

Магнитометрический размагничивающий фактор кольцевых шимм может быть определен в следующей форме:

$$N_v = \frac{1}{2\pi h(R_2^2 - R_1^2)} \int_{-h}^{+h} dz \int_{R_1}^{R_2} z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ 2\pi \int_0^{\infty} e^{-h\lambda} (e^{z\lambda} + e^{-z\lambda}) \times \right. \\ \left. \times [R_2 J_1(\lambda R_2) - R_1 J_1(\lambda R_1)] J_0(\lambda z) d\lambda \right\}. \quad /4.8/$$

После интегрирования по z, φ - координатам точек наблюдения, находящихся внутри объема кольцевой шиммы, выражение /4.8/ примет вид

$$N_v = \frac{2\pi}{h(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{\infty} (1 - e^{-2h\lambda}) \frac{R_1^2 J_1^2(\lambda R_1) + R_2^2 J_1^2(\lambda R_2) - 2R_1 R_2 J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda R_2)}{\lambda^2} d\lambda$$

или

/4.9/

$$\frac{N_v(m_1, m_2)}{4\pi} = \frac{N_v(m_2)/4\pi}{1 - (R_1/R_2)^2} + \frac{N_v(m_1)/4\pi}{(R_2/R_1)^2 - 1} - \frac{R_1 R_2}{\pi h(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{\infty} (1 - e^{-2h\lambda}) \frac{J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda R_2)}{\lambda^2} d\lambda.$$

Из /4.9/ видно, что для определения магнитометрического размагничивающего фактора кольцевой шиммы необходимо найти интеграл, выраженный соотношением вида

$$\int_0^{\infty} e^{-a\lambda} \frac{J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda R_2)}{\lambda^2} d\lambda = K(a, R_1, R_2). \quad /4.10/$$

Дифференцируя соотношение /4.10/ дважды по параметру a и используя интегральное представление для функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом ^{/2/} с последующим интегрированием, найдем следующее выражение для магнитометрического размагничивающего фактора в окончательной форме:

$$\begin{aligned} \frac{N_V(m_1, m_2)}{4\pi} = & \left\{ \frac{N_V(m_2)/4\pi}{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2} + \frac{N_V(m_1)/4\pi}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1} - \Lambda_0(d, \beta) - \frac{2}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1} + \right. \\ & + \frac{4m_1^2 \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2m_1^2 + 1 \right] - \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1 \right]^2}{3m_1 \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1 \right] \sqrt{4m_1^2 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2}} E_0(d) + \frac{m_1 - m_2}{3m_1 m_2} F_0(d_0) + \\ & \left. + \frac{\sqrt{4m_1^2 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 1 - 2m_1^2 \right]}{3m_1 \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1 \right]} E_0(d) - \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 1}{3m_1 \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)} E_0(d_0) \right\}, \end{aligned} \quad /4.11/$$

где

$$m_1 = \frac{h}{R_1}, \quad m_2 = \frac{h}{R_2}, \quad \beta = \arcsin \frac{2m_1}{\sqrt{4m_1^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)^2}}$$

$$d = \arcsin \sqrt{\frac{4 \frac{m_1}{m_2}}{4m_1^2 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2}}, \quad d_0 = \arcsin \sqrt{\frac{4 \frac{m_1}{m_2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2}}$$

$N_V(m_2)/4\pi, N_V(m_1)/4\pi$ - магнитометрические размагничивающие факторы цилиндров, определяемые из /4.8/.

Знание размагничивающих факторов позволяет найти и величину намагниченности M , необходимую для количественных расчетов магнитных полей.

Если известна кривая намагничивания вещества $M = M(H_\Sigma)$, снятая при $N = 0$, то кривые намагничивания тел могут быть построены на основании /4.1/. При этом необходимо положить $N = \text{Const}$ и, пользуясь известной кривой $M = M(H_\Sigma)$, найти искомые кривые $M = M(H_0, N)$. На рисунке /5/ дана кривая намагничивания тел из динамной стали. Эти кривые получены на основании /4.1/ и данных по намагничиванию вещества, взятых из работы /10/.

У. Экспериментальная проверка магнитного поля тонких
"по высоте" кольцевых шимм

Для практики представляет интерес сопоставить экспериментальные и расчетные данные по распределению H_z - составляющей тонких "по высоте" кольцевых шимм, с помощью которых производят формирование магнитных полей относительно небольшой величины от десятков до сотен эрстед.

Расчет компоненты магнитного поля $H_z(z)$ от таких кольцевых шимм можно сделать с помощью номограммы /рис.1/, что заметно уменьшает объем вычислений.

В реальных условиях при формировании магнитных полей необходимо учитывать влияние полюсных наконечников на магнитное поле шимм, так как они обычно ставятся на поверхность полюсов или располагаются в непосредственной близости от них. Влияние полюсных наконечников можно учесть введением поляризационного потенциала^{/11/}

$$\varphi_{п} = \int_{s} \sigma_{м} \frac{ds}{z}, \quad /5.1/$$

где $\sigma_{м} = \frac{\mu - \mu_0}{2\pi(\mu + \mu_0)} [H_z]$, μ и μ_0 - магнитные проницаемости рассматриваемых сред, H_z - нормальная компонента полного поля, взятая непосредственно на границе рассматриваемых сред. Результирующее магнитное поле определяется суммой полей от намагниченных шимм и поляризационного поля, определяемого /5.1/.

В общем случае решение задач по определению поляризационного поля очень сложно, в данной работе этот вопрос не рассматривается.

Учет влияния полюсных наконечников можно произвести, если считать их плоскими и безграничными поверхностями.

Так как магнитный зазор ограничен двумя поверхностями, то результирующее магнитное поле в зазоре электромагнита будет включать в себя дополнительно поля от двух бесконечных систем зеркально отображенных шимм. При этом для намагниченности зеркально отображенных шимм можно записать

$$M_{\text{отр}}^{(n)} = M \cdot \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^n, \quad /5.2/$$

где $M_{\text{отр}}^{(n)}$ - намагниченность зеркально отраженных шимм, M - намагниченность шиммы в зазоре электромагнита; μ - магнитная проницаемость полюсных наконечников; n - номер отражения.

Если ограничиться областью индукций, при которых $\mu > 100$, то можно приближенно считать, что зеркально отраженные шиммы имеют одну и ту же величину намагниченности, т.е.

$$M_{\text{отр}}^{(n)} \approx M. \quad /5.3/$$

При этом расчет в значительной мере упрощается, ибо нет необходимости в определении параметра μ .

В общем случае число отражений, необходимых для достижения заданной точности расчетов, определяется величиной полузазора электромагнита и радиальной протяженностью шимм. Как показали расчеты для зазора электромагнита $2h_3 \geq 10$ см и радиальной протяженности шимм $\Delta R = R_2 - R_1 \leq 10$ см, вклад отражений выше третьего как по величине, так и по производной является малым. При этом погрешность определения формы кривой, по нашим оценкам, не превышает 2% - 3%.

Экспериментальное распределение H_z - составляющей магнитного поля тонких "по высоте" кольцевых шимм может быть получено из разности измерений магнитного поля в различных точках по радиусу в зазоре электромагнита с поставленной шиммой и без нее при неизменной величине намагничивающего тока в обмотках электромагнита. Из этих экспериментов магнитное поле шимм / H_z / можно выделить с точностью до постоянной величины, по-видимому, обусловленной, в основном гистерезисом магнитного поля электромагнита при повторном его включении и выключении. На рисунках /6/ и /9/ приведены кривые распределения компоненты магнитного поля $H_z(r)$ от тонких "по высоте" кольцевых шимм. Эксперименты были проведены в зазоре двух электромагнитов. / ϕ 500 мм, $2h_3 = 100$ мм; ϕ 1200 мм $2h_3 = 220$ мм/.

Обработка экспериментальных данных производилась при следующих допущениях и в следующем порядке.

Во-первых, внешнее намагничивающее поле принималось постоянным в плоскости полюсных наконечников и приравнивалось полю H_0 в центре электромагнита. Это допущение справедливо для большей части полюсных наконечников, за исключением края электромагнита, где, как показали измерения, имеет место резкий рост магнитного поля. Протяженность этой области составляет около полузазора электромагнита.

Во-вторых, для заданной геометрии шимм $2h$, R_2 , R_1 рассчитывается на основании /4.11/ значение магнитометрического размагничивающего фактора и по известным кривым намагничивания тел /рис.5/ определяется величина намагниченности в единицах $4\pi M$.

В-третьих, рассчитывается распределение Z -составляющей магнитного поля с помощью номограммы с учетом 3-х отражений.

И, в-четвертых, определяется разность расчетных и экспериментальных значений напряженности магнитного поля в каждой точке. Из полученных разностей определяется среднее арифметическое, которое отбрасывается при нанесении экспериментальных точек совместно с расчетными.

На рис. /6/ показаны распределения H_z -составляющей магнитного поля кольцевых шимм в зависимости от изменения внешнего намагничивающего поля в диапазоне $H_0 = 8400 - 12000$ эрстед. На следующих рисунках /7/-/9/ даны составляющие магнитного поля $H_z = H_z / z$ / от одной, двух и трех шимм, снятых при постоянном намагничивающем поле.

Анализ графиков из рисунков /6/ - /8/ показывает, что в пределах 3-8% от максимального значения напряженности магнитного поля имеет место совпадение расчетов с экспериментами, при которых можно не учитывать взаимное влияние магнитных полей тонких "по высоте" кольцевых шимм друг на друга.

Л и т е р а т у р а

1. В.К.Аркадьев. Электромагнитные процессы в металлах ОНТИ, т. 1 /1934/.
2. Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва /1953/.
3. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций. Часть первая. Издательство иностранной литературы. Москва /1949/.
4. С. Neuman. Tables of Complete elliptic integrals. Journal of Mathematics and Physics v.20 p.127 - 206 (1941).
5. В.И.Данилов, Н.Л.Заплатин. Расчет магнитного поля от равномерно намагниченных цилиндрических шимм. Отчет ЛЯП ОИЯИ /1957/.
6. Г.И.Будкер. Расчет параметров шимм при исправлении локальных неоднородностей в магнитном поле. Отчет ИЯП АН СССР /1951/.
7. В.И.Данилов, Н.Л.Заплатин, В.А.Рыбалко, Л.А.Саркисян. Расчет "тонких" кольцевых шимм. Отчет ЛЯП ОИЯИ. Часть первая /1957/. Отчет ЛЯП ОИЯИ, часть вторая /1958/.
8. С. Bartberger. Journal of Applied Physics 21. 1108. (1950).
9. В.И.Данилов. Формирование магнитных полей для ускорителей с пространственной вариацией. Диссертация ЛЯП ОИЯИ /1959/.
10. И.В.Антик, Е.И.Кондорский, Е.П.Островский, Б.А.Садиков. Магнитные измерения. ГОНТИ /1938/.
11. Г.А.Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Издательство АН СССР М-Л /1948/.

$H_z \cdot 10^4$
 $\frac{4\pi I (R_2 - R_1)}{b}$

Напограмма для расчета H_z -составляющей поля
тонких кольцевых шинн.

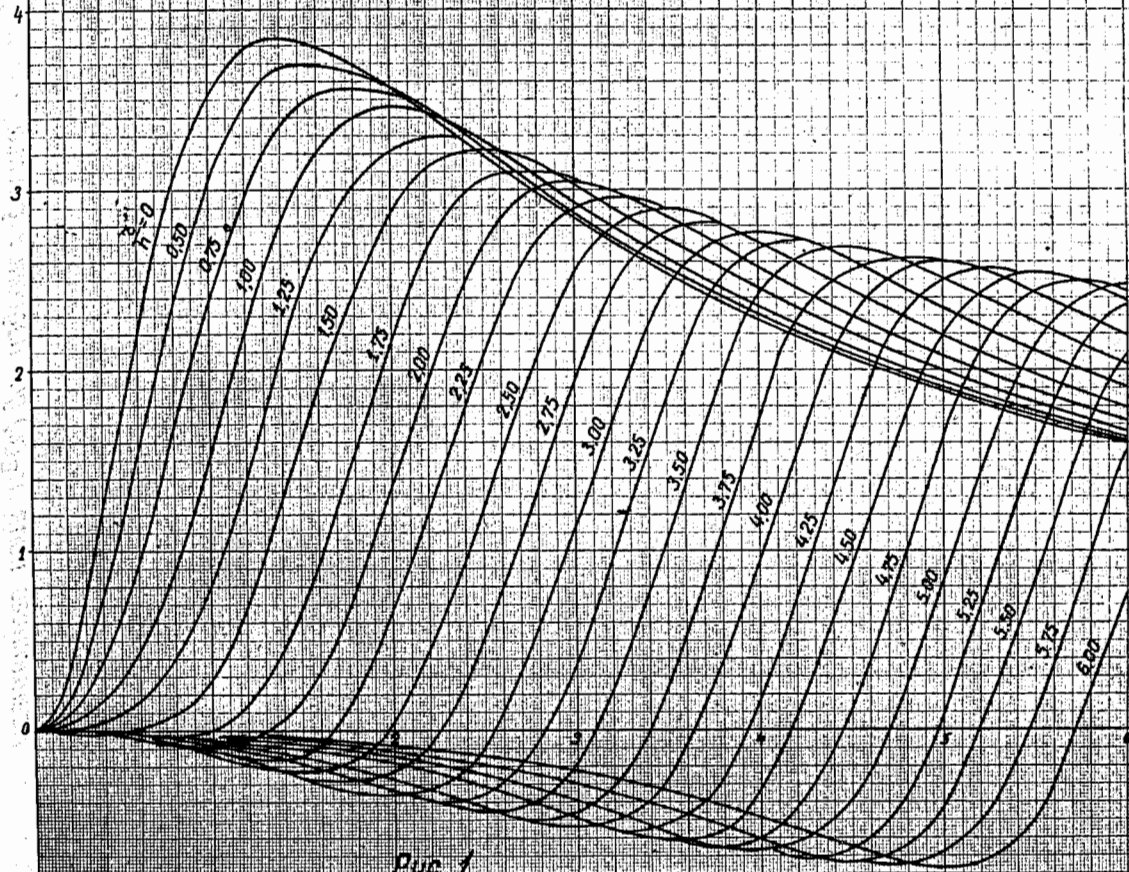


Рис. 1

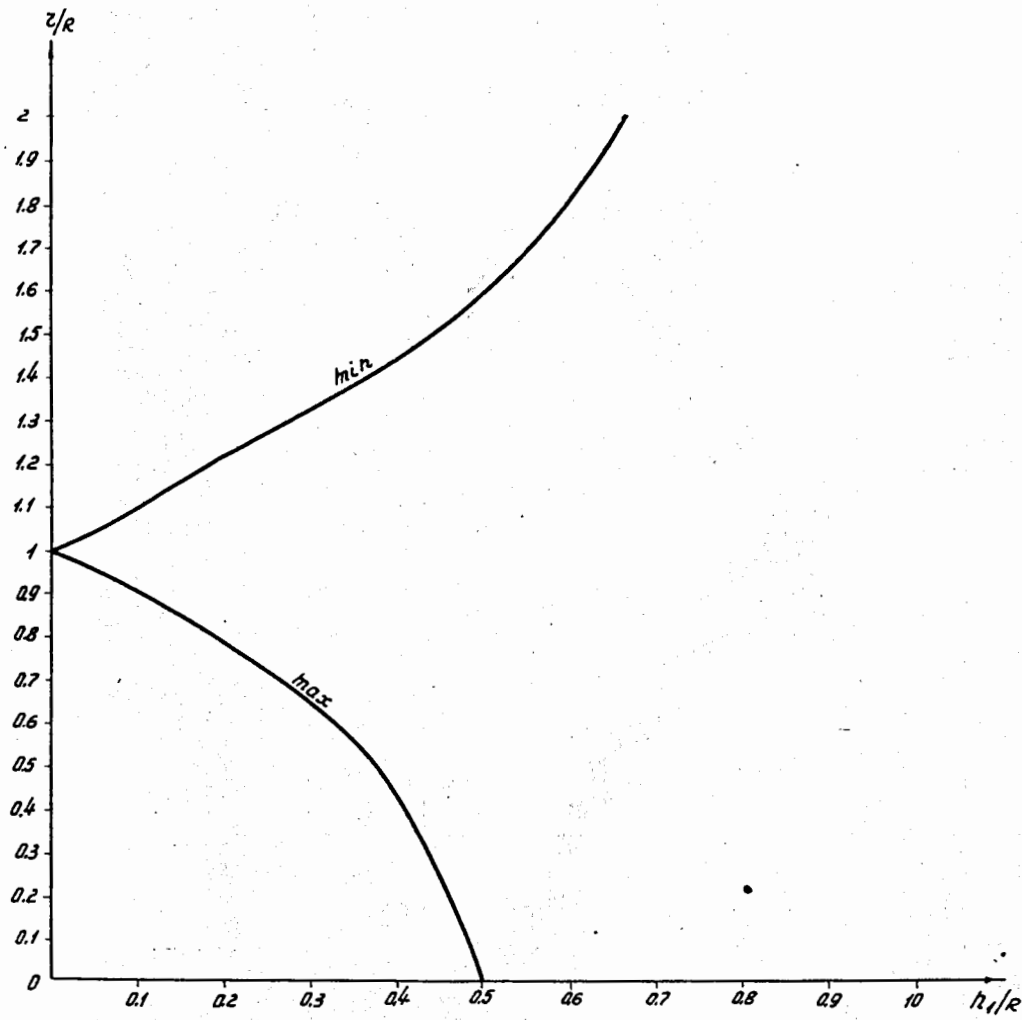


Рис. 2 Координаты точек экстремума составляющей магнитного поля $H_z(z)$ для подобных дисков.

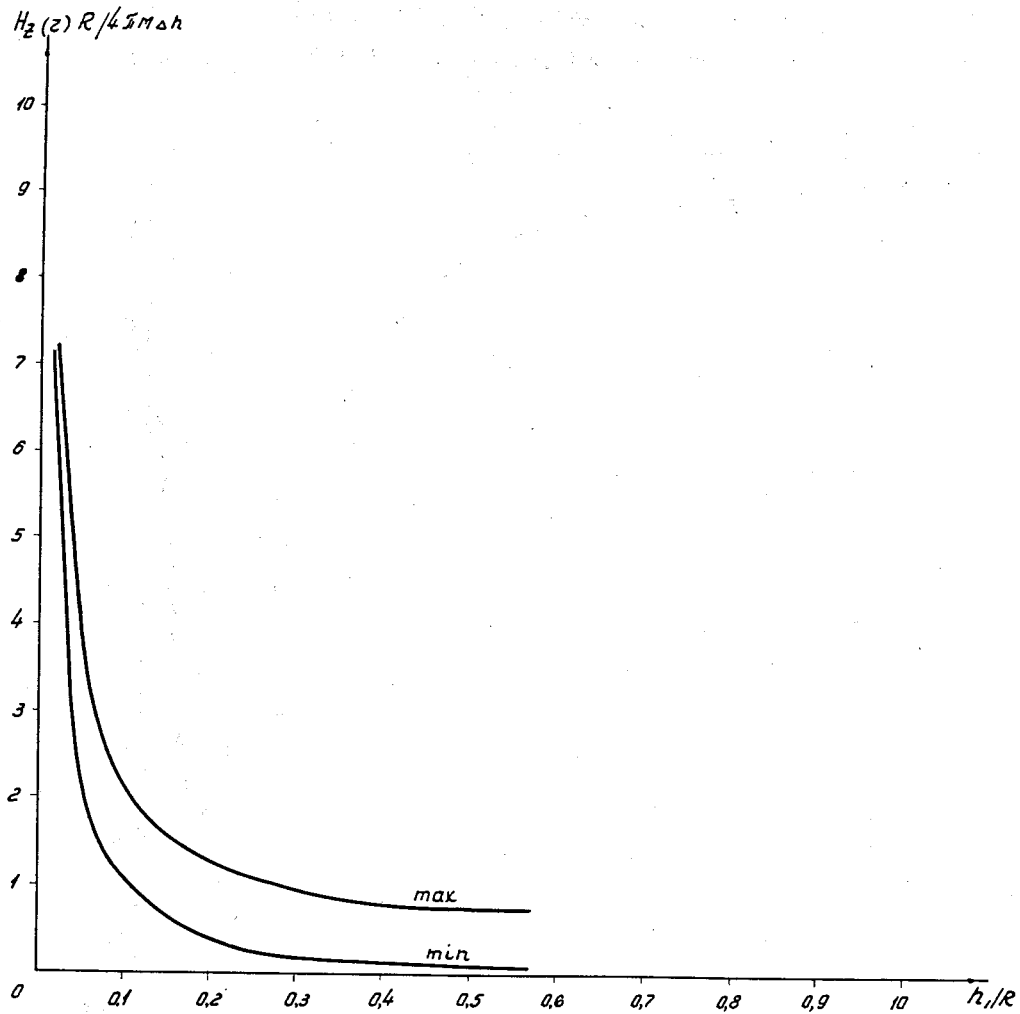


Рис. 3 Экстремальные значения составляющей магнитного поля $H_z(z)$ для подобных дисков.

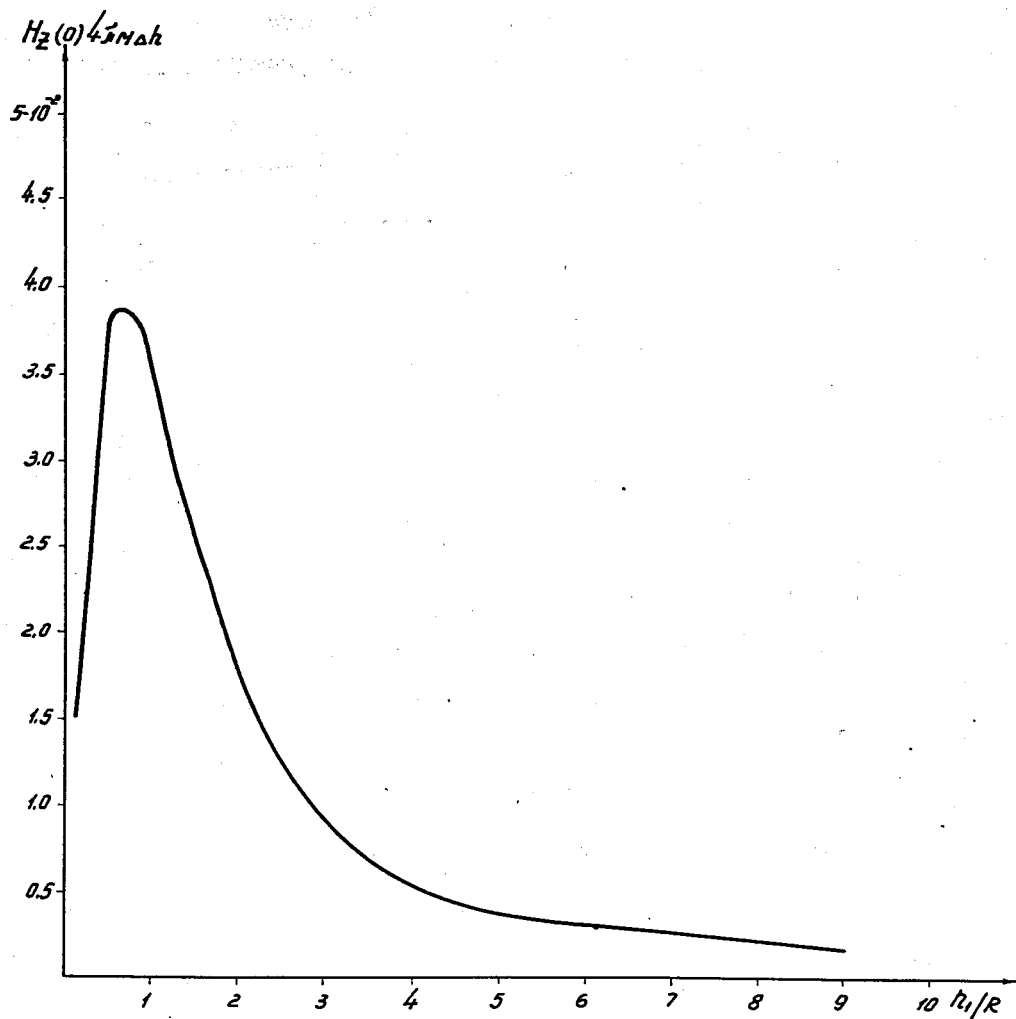


Рис. 4 Распределение составляющей магнитного поля $H_z(0)$ от дисков в точке $z=0$, $\tau=0$

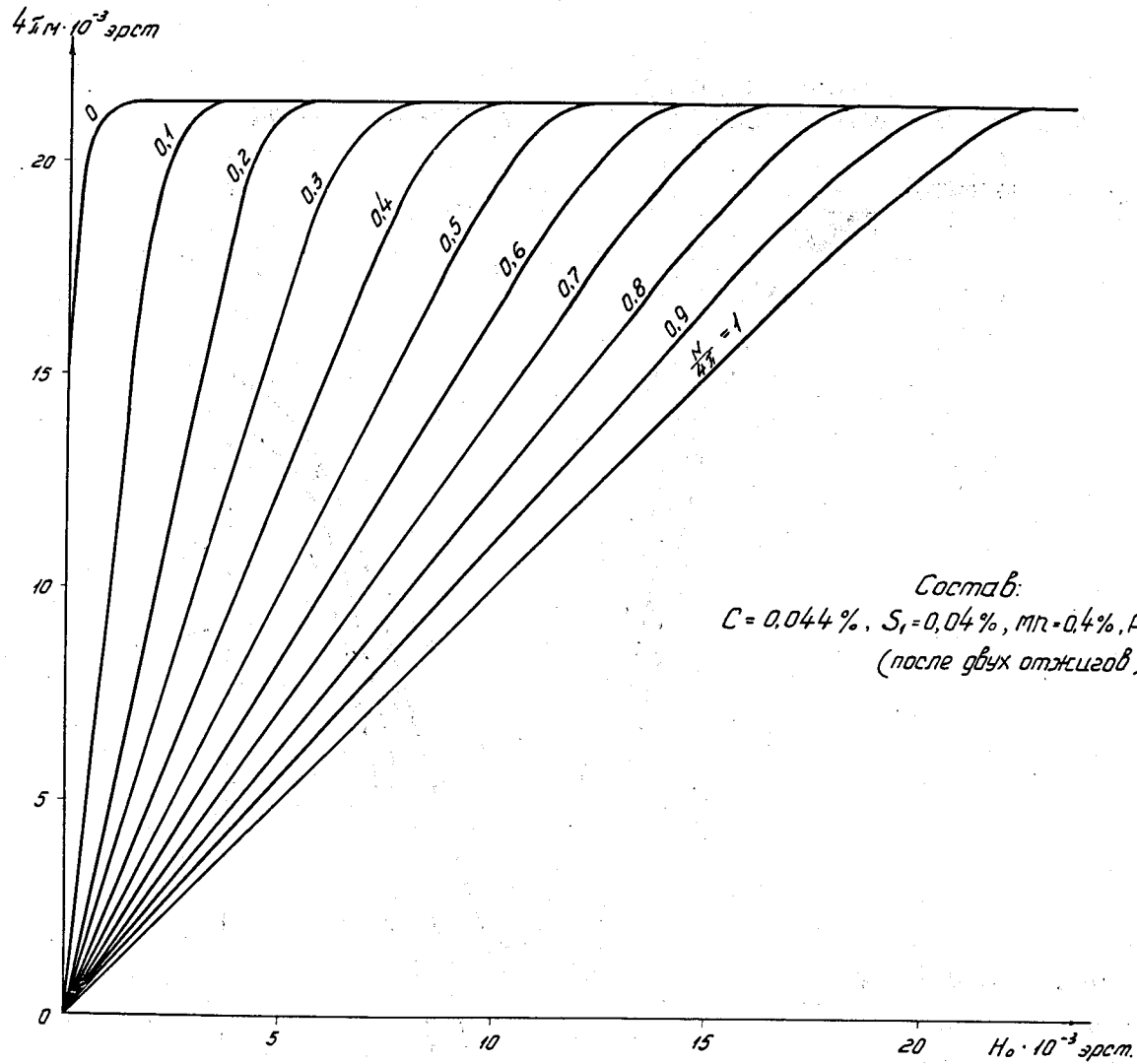


Рис. 5 Кривые намагничения тел из динамной стали.

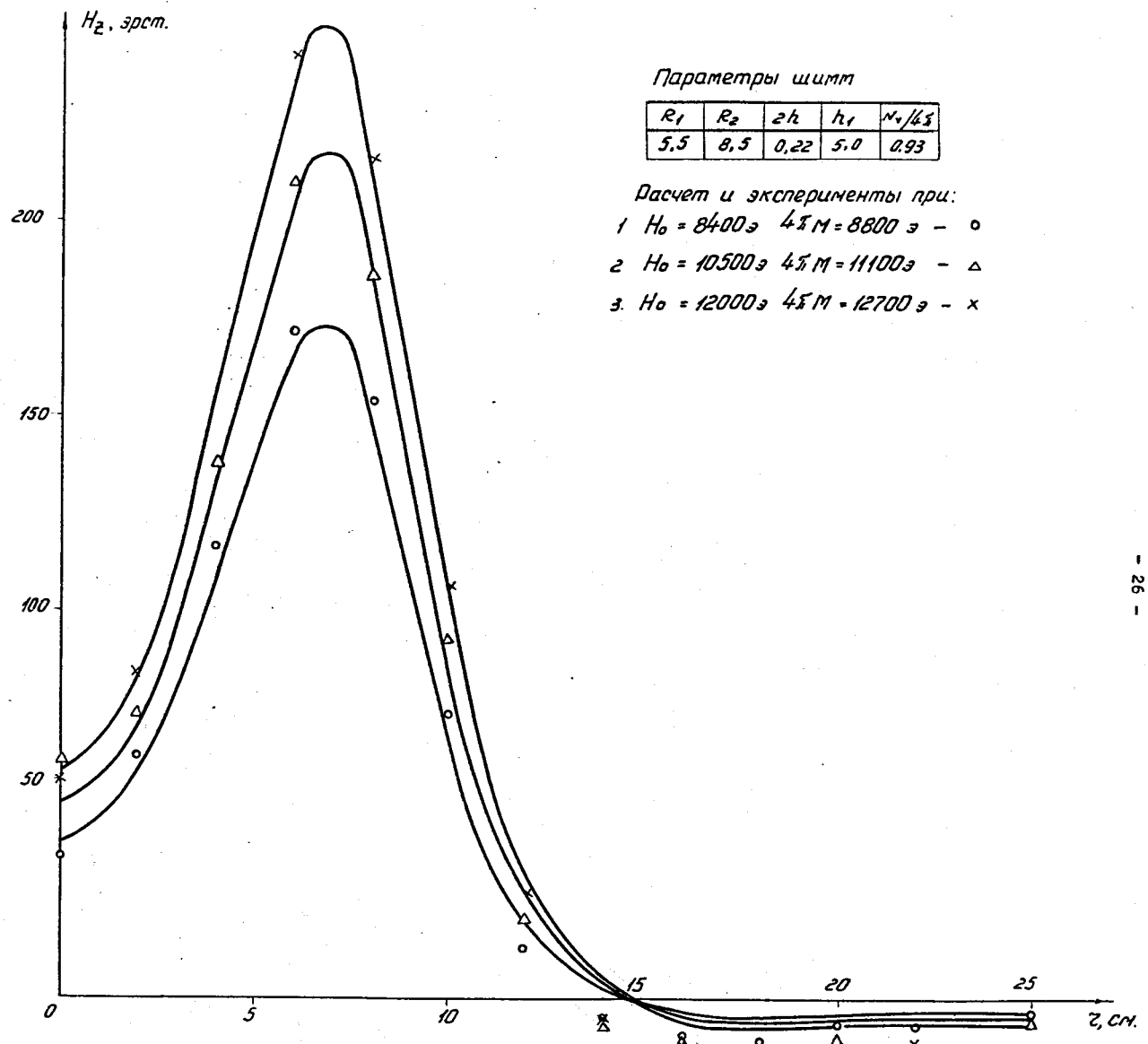


Рис. 6 Изменение Z -составляющей магнитного поля кольцевой шиммы от индукции.

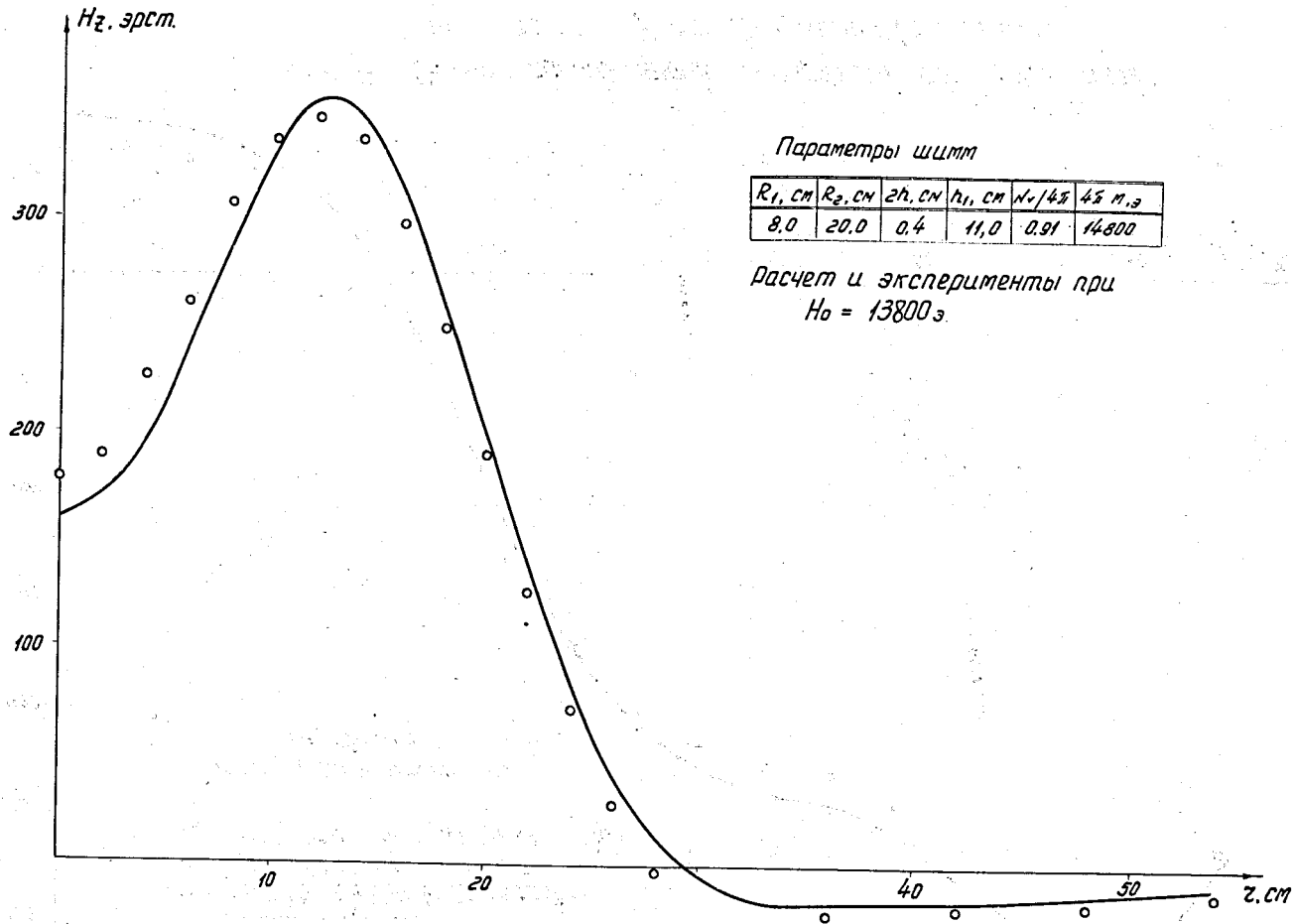
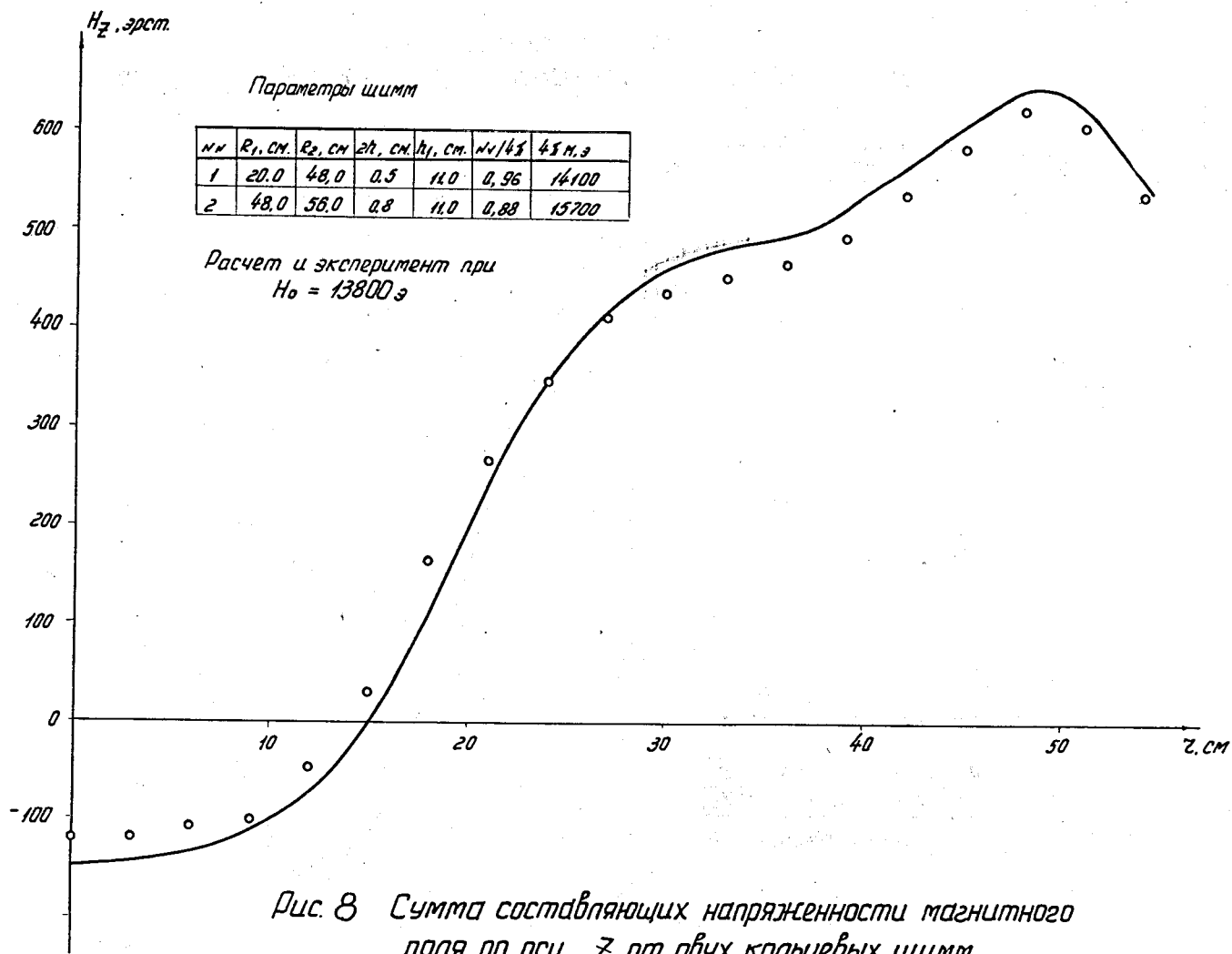


Рис. 7. Распределение Z -составляющей магнитного поля от кольцевой шиммы.



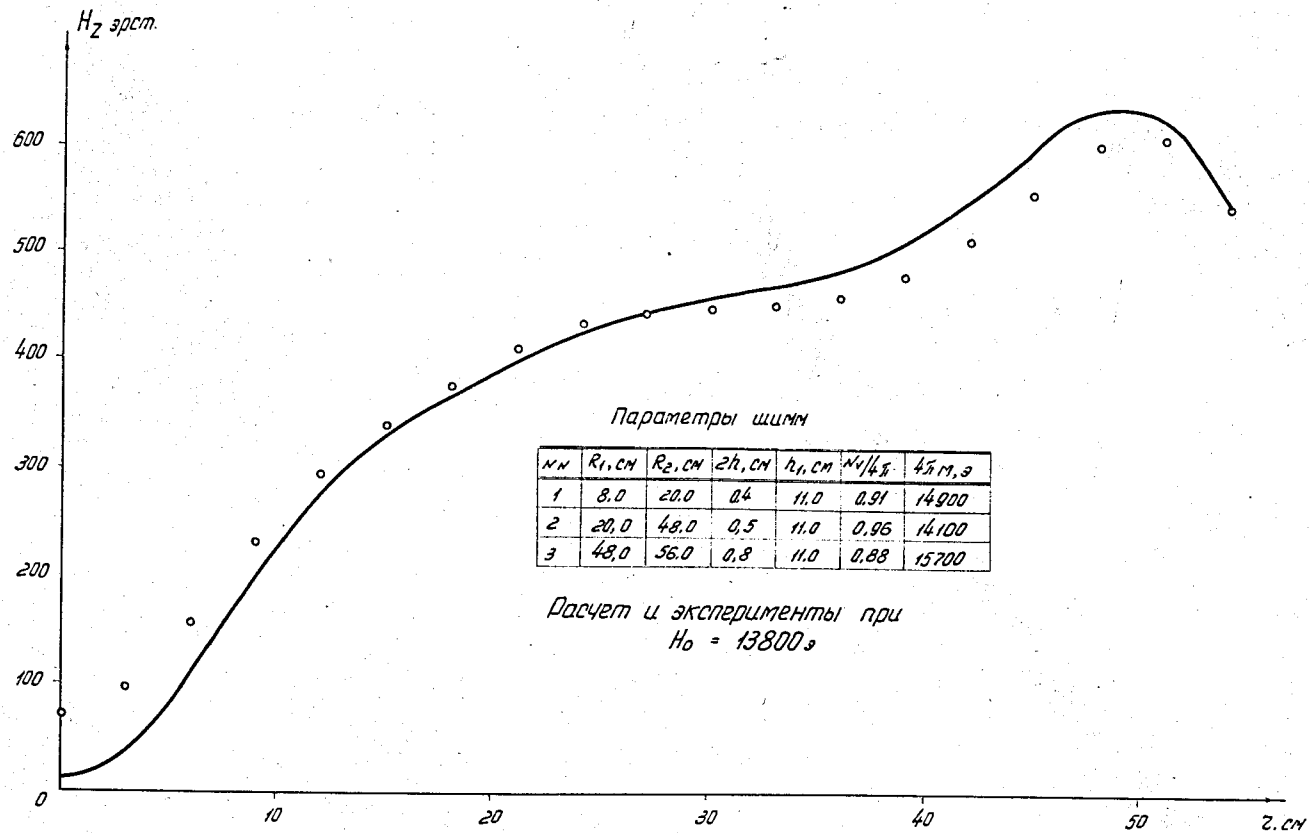


Рис. 9 Сумма составляющих напряженности магнитного поля по оси Z от трех кольцевых шимм.