ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-337

Б.В. Медведев, М.К. Поливанов

СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ КАК СПОСОБ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

ДАН, 1959, т 127, № 3, с 541-544.

Дубна 1959 год

P - 337

Б.В. Медведев, М.К. Поливанов

СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ КАК СПОСОБ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

I. Как известно, в квантовой теории поля имеется трудность, связанная с появлением логарифмического полюса в отрицательной области или т.н. "духового состояния". Для модели Ли было показано [I], что этой особенностью обладает точное решение. В квантовой электродинамике и других более реалистических теориях поля о наличии полюса заключают [2 xx)] на основе исследования асимптотических свойств сумм "главных членов" рядов теории возмущений, причем, естественно, вопрос о наличии такой трудности в точном решении остаётся открытым. Последовательное проведение той точки зрения, что такие суммы правильно передают свойства точного решения во всей области импульсов, приводит к так называемой проблеме " нуль-заряда" [2].

Недавно было указано [4,5], что содержащие логарифмический полюс выражения для функций Грина противоречат вытекающим из самых общих физических предположений спектральным теоремам Челлена - Лемана [6], и был предложен метод модификации функций Грина, приводящий их в согласие со спектральными теоремами, который мы будем называть редмондизацией.

Редмонд указывает, что предложенная процедура может иметь троякий смысл: (I) Точное решение обладает тем же нефизическим полюсом; тогда редмондизация сводится к изменению гамильтониана. (2) Теория поля не определяет точного решения единственным образом; редмондизация состоит в отборе одного, физически разумного, решения из множества возможных .(3) Точное решение не обладает нефизическими свойствами; редмондизация есть улучшение метода приближения. Какая из этих возможностей осуществляется в настоящей квантовой теории поля - неизвестно. Чтобы выяснить к каким физическим следствиям привело бы осуществление первой возможности, мы рассмотрим модель Ли, в которой гарантированно осуществляется случай (I).

2. В модели Ли [7] точная ренормированная функция Грина для V -частицы имеет вид:

$$G_V(\omega)=g(\omega-m);\quad g(x)=\lim_{\epsilon\to+0}\tilde{g}(x+i\epsilon);\quad \tilde{g}(z)=\frac{1}{h(z)};\quad \Im m\, x=0, \tag{I}$$

где

$$h(z)=z\left\{1+\frac{g^2}{(2\pi)^2}\,z\int_{\mu}^{\infty}f^2(\omega)\,\frac{\sqrt{\omega^2-\mu^2}\,d\omega}{\omega^2(\omega-z)}\right\} \tag{2}$$

- функция, введенная Челленом и Паули [I x)]. В случае $g^2>g^2_{crit}$, который мы только и будем рассматривать, $g(x)$ имеет нефизический полюс при $x=-\lambda$. Кроме того, из (I), (2) видно, что функция $\tilde{g}(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, исключая второй физический полюс при $z=0$ и линию разреза от μ до ∞ вдоль вещественной оси. При $t\to\infty$

$$\tilde{g}(z)\to(zN^2)^{-1},\quad N^2<0. \tag{3}$$

Поэтому к $\tilde{g}(z)$ можно применить теорему Коши с контуром, окружающим всю комплексную плос-

---

x) Мы пользуемся обозначениями этой работы.

xx) см. однако [3]

кость, исключая вещественную ось от $z=-\lambda$ до $z=+\infty$, который, в силу (3), сводится к (взятым с отрицательным знаком) вычетам в полюсах $-\lambda$ и 0 и разности интегралов по верхнему и нижнему берегам линии разреза. Мы придем таким образом к спектральному представлению для $\tilde{g}(z)$.

$$\tilde{g}(z)=\int_{-\lambda}^{\infty}\frac{\tilde{I}(x)\,dx}{z-x}=-\frac{1}{(z+\lambda)N_\lambda^2}+\frac{1}{z}+\int_{\mu}^{\infty}\frac{I(x)\,dx}{z-x}, \qquad (4)$$

где

$$\tilde{I}(x)=-\frac{1}{\pi}\,Im\,g(x)=-\frac{\delta(x+\lambda)}{N_\lambda^2}+\delta(x)+I(x);\quad F(x)=\frac{g^2}{4\pi^2}\,\frac{f^2(x)\sqrt{x^2-\mu^2}}{x^2};\quad N_\lambda^2=-\frac{dh(z)}{dz}\Big|_{z=-\lambda}>0 . \qquad (5)$$

Вычисляя с помощью (I), (2), (5) явное выражение для спектральной интенсивности

$$I(x)=\frac{\vartheta(x-\mu)\,F(x)}{\left[1+P\int_{\mu}^{\infty}F(x')\,\frac{x\,dx'}{x'-x}\right]^2+\left[\pi x F(x)\right]^2}>0 \qquad (6)$$

видим, что оно имеет типичный, отмеченный в [4,5] резонансный характер.

Спектральное представление (4), напоминая по форме требуемое теоремой Челлена-Лемана, содержит физически недопустимый вклад в $\tilde{I}(x)$ в отрицательной области, т.е. из-за наличия нефизического состояния $(-\lambda)$ нарушается необходимое для вывода теоремы Челлена-Лемана условие спектральности.

3. Редмондизация [4,5] состоит в замене

$$\tilde{g}(z)\to\tilde{g}'(z)=\tilde{g}(z)-\frac{1}{(z+\lambda)N_\lambda^2}, \qquad (7)$$

после чего для новой функции Грина $\tilde{g}(z)$ мы получаем уже нормальное представление Челлена-Лемана

$$\tilde{g}'(z)=\frac{1}{z}+\int_{\mu}^{\infty}\frac{I(x)\,dx}{z-x} \qquad (8)$$

с той же самой, как легко убедиться, функцией $I(x)$.

Исследование асимптотических свойств новой функции Грина показывает, что при $z\to 0$ редмондизация не сказывается (по-прежнему $\tilde{g}'(z)\to 1/z$), при стремлении же z к ∞ вместо (3) получается

$$\tilde{g}'(z)=(z\,N'^2)^{-1},\ \text{где}\ 1/N'^2=1/N^2+1/N_\lambda^2 . \qquad (9)$$

Можно показать, что новая константа перенормировки будет удовлетворять физическим требованиям

$$0\le N'^2\le 1 . \qquad (10)$$

Поскольку мы работали с точной функцией Грина $\tilde{g}(z)$, то ясно, что новая $\tilde{g}'(z)$ уже не будет отвечать первоначальному гамильтониану. Наша цель будет состоять теперь в том, чтобы найти модифицированный гамильтониан, для которого $\tilde{g}^1(z)$ будет функцией Грина.

4. Введем для этого новую функцию $h(z)$, обозначив её h':

$$h'(z) = \frac{1}{\tilde{g}'(z)} \qquad (11)$$

и введем функцию $\zeta(z) = z^{-2} h'(z)$. В силу свойств функции $\tilde{g}'(z)$, $\zeta(z)$ будет аналитической всюду, исключая полюс при $z=0$ и разрез $(\mu, +\infty)$. Действительно, в силу (8) $\tilde{g}'(z)$ не может иметь нулей ни вне вещественной оси, ни на отрицательной вещественной полуоси. В интервале же (0,1) $\tilde{g}'(x)$ не может обратиться в нуль, поскольку она (а) монотонна в нем, как это видно из (8), (б) > 0 при $x \to +0$ и (в) при $x \to \mu$ $\tilde{g}'(\mu) = h^{-1}(\mu) + (\mu+\lambda)^{-1} N_\lambda^{-2} > 0$ (мы воспользовались спектральным представлением (2) для $h(\mu)$). Поэтому к $\zeta(z)$ можно применить теорему Коши с контуром, обходящим в положительном смысле всю комплексную плоскость, исключая особенности, и получить для неё спектральное представление

$$\zeta(z) = 1/z + \int_\mu^\infty F'(x)\, dx/x-z \;; \quad F'(x) = (1/\pi) Im\, \zeta(x+i\epsilon)$$

Умножением на z^2 получаем отсюда спектральное представление для $h'(z)$:

$$h'(z) = z\left[1 + \int_\mu^\infty F'(x)\, dx\, \frac{z}{x-z}\right] \qquad (12)$$

со спектральной функцией

$$F'(x) = \frac{1}{\pi x^2}\, Im\, h'(\omega + i\epsilon)\,. \qquad (13)$$

Сравнивая (12) с представлением (2) для $h(z)$, видим, что они различаются лишь заменой спектральной функции $F(x)$ на $F'(x)$. Поскольку (/5/) физически $F(x)$ представляет собой квадрат произведения наблюдаемого заряда на форм-фактор $f(x)$, то чтобы можно было бы так же интерпретировать $F'(x)$ для нового гамильтониана, надо, чтобы $F'(x)$ было бы положительным. Явное вычисление, использующее (11), (7), (5) и (2) даёт

$$F'(x) = \frac{\vartheta(x-\mu)\, F(x)}{\left[1 + \frac{x}{(x+\lambda) N_\lambda^2}\left(1 + P\int_\mu^\infty F(\omega)\frac{x\, d\omega}{x-\omega}\right)\right]^2 + \left[\frac{\pi x^2 F(x)}{(x+\lambda) N_\lambda^2}\right]^2}\,, \qquad (14)$$

т.е. это условие оказывается выполненным.

Итак, если ввести теперь новый форм-фактор $f'(\omega)$:

$$F'(\omega) = \frac{g^2}{4\pi^2}\, \frac{f'^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega^2}\,, \qquad (15)$$

то новый гамильтониан, отличающийся от первоначального лишь другим форм-фактором $f'(\omega)$, приведет в точности к той же функции Грина, что и редмондизированная функция Грина $g'(x)$ первоначального гамильтониана. Иными словами, в случае (1) редмондизация состоит в замене форм-фактора, приводившего к мнимой константе перенормировки (3) на другой, однозначно по нему определяемый форм-фактор, который (/9/) не приведет более ни к мнимой перенормировке, ни, следовательно, к "духовому состоянию".

5. Представляет интерес рассмотреть специальный случай отсутствия форм-фактора $f(\omega)=1$. Явный вид $h(x)$ для этого случая приведен в работе Челлена и Паули [I], а значения констант λ и N_λ^2 можно найти в приближениях слабой и сильной связи. Для слабой связи

$$\lambda = \mu/2 \, e^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \qquad N_\lambda^2 = \gamma \qquad \gamma = g^2/4\pi^2 . \tag{I6}$$

Используя эти значения, находим в предельных случаях малых и сверхвысоких энергий

$$f'(\omega)=1, \quad \omega=\mu; \quad f'(\omega)=\frac{1}{\ln 2\omega/\mu}; \quad \ln\left(\omega/\mu\right)\gg 1, \quad \omega\gg\lambda . \tag{I7}$$

Наконец, при "умеренно высоких" энергиях $\omega\sim\lambda$ форм-фактор обнаруживает резонансное поведение:

$$f'^2(\omega)=\frac{1}{\left[1+\frac{1+\gamma\left[1-\ln 2\omega/\mu\right]}{(1+\lambda/\omega)N_\lambda^2}\right]^2+\frac{\pi^2\gamma^2}{(1+\lambda/\omega)^2 N_\lambda^2}} \tag{I8}$$

Первый член в знаменателе в (I8) обращается в нуль при $\omega=\bar{\omega}$, при этом

$$\bar{\omega}\approx 3{,}6\,\lambda; \qquad f'(\omega)\approx 0{,}41 . \tag{I9}$$

Отметим ещё, что для перенормировки заряда получается:

$$N^2=\infty; \quad N'^2=N_\lambda^2=\gamma \quad \text{и} \quad g^{0\prime}=\left(1/N'\right)g=2\pi . \tag{20}$$

6. Выводы: Итак, в случае (I), когда гамильтониан приводит к физически недопустимым следствиям, проявляющимся в нарушении теоремы Лемана-Челлена, прием Редмонда исправляет дело за счёт добавления к гамильтониану контр-члена типа $(f'-f)$, не являющегося полиномом по ω и потому существенно нелокального. В нерелятивистской теории это, конечно, не вносит принципиальных осложнений.

При попытке перейти к релятивистской теории мы столкнемся с двумя трудностями. Во-первых, пространство и время не будут более расцеплены и мы придем к теории, нелокальной не только по пространству, но и по времени - то есть к релятивистской нелокальной теории поля со всеми присущими ей проблемами.

Во-вторых, в настоящих релятивистских теориях поля мы не знаем точного решения, а можем, в случае, только просуммировать некоторые "главные" диаграммы. Вопрос о соотношении такой суммы и точного решения остаётся, конечно, совершенно открытым.

7. Мы хотели бы поблагодарить Н.Н. Боголюбова и Д.В. Ширкова за обсуждение полученных результатов, а также П. Редмонда за присылку препринта.

Л И Т Е Р А Т У Р А :

I. G.Källén, W. Pauli, Dan.Mat.Fys.Medd. 30, n.7 (1955).
2. Л.Д. Ландау, И.Я. Померанчук, ДАН, I02, 489, (I955), И.Я. Померанчук, ibid. 103,1005(1955).
3. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков, Nuovo Cimento 3, 845 (1956).
4. P.Redmand, Phys.Rev. 112, 1404 (1958).
5. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков, препринт ОИЯИ, Р. 295 (I959).
6. G.Källén, Halv.Phys.Acta, 25, 416 (1952); H.Lehmann, Nuovo Cimento, 11, 342 (1954).
7. T.D.Lee, Phys.Rev., 95, 1329 (1954).

Работа поступила в издательский отдел II апреля I959 года.