JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

Laboratory of Theoretical Physics

F. Kaschluhn

P-332

EINE FELDTHEORETISCHE VERALLGEMEINERUNG DER IMPULSNÄHERUNG

Nucl. Phys., 1959, v14, N 2, c 314-338.

Dubna 1959

F. Kaschluhn

P-332

EINE FELDTHEORETISCHE VERALLGEMEINERUNG DER IMPULSNÄHERUNG

A field-theoretical generalization of Chew's impulse approximation is proposed as it is necessary for an explicit evaluation of the contribution from the non-observable region in the dispersion relations for pion-deuteron scattering. The Hamilton-formalism for a non-relativistic two-nucleon system is assumed with a pseudovector coupling to the pion field for which the usual cut-off is used. The generalization to the case of more than two nucleons and to other couplings is obvious and should also be possible - using the appropriate modifications - to the relativistic case. We employ the time-dependent scattering formalism: The S-matrix describes transitions between the bare states of the two-nucleon system, which are defined as the projections of the corresponding real states onto the meson vacuum. This leads directly to the introduction of a field-energy operator which involves self-energies and interaction between the nucleons and by means of which it is possible to avoid the difficulties associated in general with the bound state problem in quantum field theory. It is shown that the higher approximations to the impulse approximation correspond also in the field-theoretical case to the potential and multiple scattering corrections which also include the absorption phenomena.

1. Einleitung

Bei der Aufstellung und Auswertung der Dispersionsbeziehungen für die elastische Streuung von π-Mesonen an Deuteronen[1,2,3,4] tauchte das Problem einer Berechnung der Strom-Matrixelemente bezüglich des Deuteron-Grundzustandes und der nicht gebundenen Zustände des kontinuierlichen Spektrums des Zwei-Nukleonen-Systems auf (bzw. der Übergangselemente für die Absorption des einlaufenden π-Mesons durch das Deuteron). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass das in[1,2,3] vorgeschlagene Näherungsverfahren genau einer feldtheoretischen Verallgemeinerung der Chewschen Impulsnäherung[5,6,7] entspricht: die Übergangsmatrix für den in Frage stehenden Prozess am Deuteron wird durch die Summe der Ein-Nukleon-Übergangsmatrizen approximiert, wobei die einzelnen freien Nukleonen Impulsverteilungen haben, die genau ihrer Impulsverteilung in den nackten Zuständen des Zwei-Nukleonen-Systems entsprechen. Hierbei sind die nackten Zustände des Zwei Nukleonen-Systems als die Projektionen der entsprechenden reellen Zustände auf das Mesonvakuum definiert. Die höheren Näherungen der Impulsnäherung entsprechen auch im feldtheoretischen Falle der Potential- und Vielfachstreukorrektur, die auch den Absorptionseffekt korrigieren.

Unseren Untersuchungen wird der zeitabhängige Streuformalismus zugrunde gelegt. Der Hamilton-Operator beschreibt die nichtrelativistische Bewegung zweier Nukleonen, die in pseudovektorieller Wechselwirkung mit dem π-Mesonfeld stehen, für das die übliche Abschneidung vorausgesetzt wird. Elektromagnetische Wechselwirkung und der Massenunterschied der verschieden geladenen Teilchen werden vernachlässigt. Die S-Matrix selbst beschreibt Übergänge zwischen den nackten Zuständen der Teilchen. Die Definition der nackten Zustände des Zwei-Nukleonen-Systems als der Mesonvakuum-Projektionen der entsprechenden reellen Zustände führt zwangsläufig zur Einführung eines Feldenergieoperators, der Selbstenergie und Wechselwirkung der Nukleonen enthält. Mit Hilfe dieses Operators, dessen Eigenschaften in Abschnitt 2 genauer untersucht werden, können die Schwierigkeiten explizit überwunden werden, die sonst der Formulierung einer Feldtheorie mit gebundenen Zuständen im Wege stehen und die bekanntlich mit der Adiabaten-Konzeption zusammenhängen (da diese - in üblicher Weise interpretiert - zum Zerfall des gebundenen Zustandes führt). Der S-Matrix-Formalismus wird im einzelnen im Abschnitt 3 entwickelt, wobei wir in Anlehnung an Bogolubov und Mitarbeitern[8,9] Variationsableitungen der S-Matrix verwenden, die in unserem Falle aber zweckmässiger Weise bezüglich des Hamiltonoperators der Wechselwirkung gebildet werden (was im übrigen auch eine einfache Formulierung der Kausalitätsbedingung in unserer bezüglich der Nukleonen nichtrelativistischen Theorie gestattet). Im Abschnitt 4 wird die Impulsnäherung formuliert, wobei die Bedeutung der höheren Näherungen sich zwangsläufig an Hand zweckmässig geschriebener allgemeiner Ausdrücke ergibt. In der Schlussbemerkung in Abschnitt 5 werden kurz einige Probleme erörtert, die mit den Dispersionsbeziehungen für die Streuung von π -Mesonen an Deuteronen im Zusammenhang stehen (insbesonders wird auf die Frage nach der Abweichung des Massenspektrums der intermediären Zustände vom normalen Spektrum eingegangen).

Die Verallgemeinerung der vorliegenden Untersuchungen auf den Fall von mehr als zwei Nukleonen und anderer Kopplungsarten ist offensichtlich und sollte - bei geeigneten Modifikationen - auch auf den relativistischen Fall möglich sein.

2. Feldenergieoperator und die Zustände der nackten Teilchen

Wir setzen den Hamilton-Formalismus für zwei nichtrelativistisch bewegte Nukleonen voraus, die in pseudovektorieller Wechselwirkung mit dem π -Mesonfeld stehen, für das die übliche Abschneidung vorausgesetzt wird. Bezüglich der Nukleonen wird keine zweite Quantisierung durchgeführt, und elektromagnetische Wechselwirkung und der Massenunterschied der verschieden geladenen Teilchen werden vernachlässigt. Weiterhin setzen wir voraus, dass das Gesamtsystem nur einen gebundenen Zustand hat, den Deuteron-Grundzustand. Wir schreiben den Gesamt-Hamiltonoperator in der Form

$$H = H_0 + H_i \tag{1}$$

wo H_0 der Hamiltonoperator des ungekoppelten Systems und H_1 die Wechselwirkung ist. Es gilt

$$H_0 = \sum_{j=1}^{2}\left(M_0 + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_0}\right) + \sum_{\varsigma=1}^{3}\sum_{\vec{q}} \omega_q a^*_{\varsigma\vec{q}} a_{\varsigma\vec{q}} \tag{2}$$

wo $\vec{p}_j$ der Impulsoperator des Nukleons j mit der nichtrenormierten Masse M_0 und $\omega_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}}$ die Energie eines π -Mesons der Masse m mit Isotopenspinindex ς und Impuls $\vec{q}$ ist, dessen Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator $a_{s\vec{q}}$ bzw. $a^*_{s\vec{q}}$ ist (wie sie in üblicher Weise für Bosonen gelten). Das Problem einer Renormierung der Mesonmasse tritt nicht auf, da im betrachteten nichtrelativistischen Fall eine Paarerzeugung von Nukleonen nicht möglich ist. Der Hamiltonoperator der Wechselwirkung besteht aus einer Summe zweier Terme, die den beiden Nukleonen entsprechen

$$H_i = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{3} \frac{\sqrt{4\pi} f_0}{m} \int d\vec{x}\, \varrho(\vec{x}-\vec{x}_j)\, \tau_s^j \vec{\sigma}^j \nabla \phi_s(\vec{x}) \tag{3}$$

$\varrho(\vec{x}-\vec{x}_j)$ ist die Quelldichtefunktion der (räumlich ausgedehnten) Nukleonen mit den Ortskoordinaten $\vec{x}_j$, den Isotopenspinoperatoren τ_s^j und Spinoperatoren $\vec{\sigma}^j$ und $\phi_s(\vec{x})$ der reelle pseudoskalare Feldoperator der π-Mesonen. f_0 ist die nichtrenormierte (nicht rationalisierte) Kopplungskonstante. Wir schreiben

$$\phi_s(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left\{ a_{s\vec{q}}\, e^{i\vec{q}\vec{x}} + a^*_{s\vec{q}}\, e^{-i\vec{q}\vec{x}} \right\} \tag{4}$$

wo V das Normierungsvolumen ist, und erhalten für (3)

$$H_i = \sum_{s=1}^{3} \sum_{\vec{q}} \left\{ a_{s\vec{q}} V_{s\vec{q}} + a^*_{s\vec{q}} V^*_{s\vec{q}} \right\} \tag{5}$$

mit

$$V_{s\vec{q}} = \sum_{j=1}^{2} V^j_{s\vec{q}}, \qquad V^j_{s\vec{q}} = \frac{i}{\sqrt{V}} \frac{\sqrt{4\pi} f_0}{m} \tau_s^j \vec{\sigma}^j \vec{q}\, v_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} e^{i\vec{q}\vec{x}_j} \tag{6}$$

wo

$$v_{\vec{q}} = \int d\vec{x}\, e^{i\vec{q}\vec{x}} \varrho(\vec{x}) \tag{7}$$

die Abschneidefunktion ist. Im folgenden werden die Indizes $s,\vec{q}$ zu q zusammengefasst.

Der wesentliche Punkt für den im folgenden Abschnitt zu entwickelnden S-Matrix-Formalismus, der die Streuung an stabilen gebundenen Komplexen beschreiben soll, besteht nun in einer geeigneten Definition der nackten Zustände der Teilchen, in die das System in der fernen Vergangenheit bzw. fernen Zukunft übergehen soll. Eine übliche Anwendung der Adiabaten-Konzeption in dem Sinne, dass die gesamte Wechselwirkung für $t \to \pm\infty$ verschwinden soll, ist in unserem Falle, wo die Existenz des stabilen Deuteron-Grundzustandes zu berücksichtigen ist, ganz unzweckmässig, weil diese zum Zerfall des gebundenen Zustandes führt. Wir wollen hingegen die nackten Zustände des Zwei-Nukleonen-Systems einfach als die Projektionen der entsprechenden reellen Zustände auf das Mesonvakuum definieren, was genau dem Abschalten der Mesonwolke für $t \to \pm\infty$ entspricht (und nicht der gesamten Wechselwirkung). Mathematisch formuliert: ist der (normierte) reelle Zustand des Zwei-Nukleonen-Systems als stabiler gebundener Deuteron-Grundzusatnd oder als nicht gebundener Zustand des kontinuierlichen Spektrums durch

$$H\Psi_p = E_p\Psi_p \tag{8}$$

gegeben, so ist der entsprechende (normierte) nackte Zustand, in welchen das System für $t\to\pm\infty$ asymptotisch übergehen soll, durch

$$\Psi_p^o = c_p^{-1}\Lambda_o\Psi_p \tag{9}$$

definiert, wo Λ_o der Projektionsoperator ist, der auf das Mesonvakuum projiziert, und c_p eine Normierungskonstante ist. Wir verwenden für den reellen Zustand auch die Schreibweise

$$\Psi_p = c_p\Psi_p^o + \Lambda_c\Psi_p \tag{10}$$

wo Λ_c der Projektionsoperator ist, der weg vom Mesonvakuum projiziert. $|c_p|^2$ ist dann einfach die Wahrscheinlichkeit dafür, das nackte System im reellen Zustand anzutreffen, und der Zusatz $\Lambda_c\Psi_p$ entspricht genau der Mesonwolke. Für die Projektionsoperatoren gilt

$$\Lambda_o + \Lambda_c = 1, \qquad \Lambda_o^2 = \Lambda_o, \qquad \Lambda_c^2 = \Lambda_c \tag{11}$$

Aus (8) in Verbindung mit (1) folgt nach Multiplikation mit Λ_o von links her und Verwendung von (10), (11) und

$$[H_o,\Lambda_o] = 0 \qquad\qquad \Lambda_o H_i \Lambda_o = 0 \tag{12}$$

die Beziehung

$$H_o c_p \Psi_p^o + \Lambda_o H_i \Lambda_c \Psi_p = E_p c_p \Psi_p^o \tag{13}$$

Definieren wir den Feldenergieoperator Γ_p durch

$$c_p \Gamma_p \Psi_p^o = \Lambda_o H_i \Lambda_c \Psi_p \tag{14}$$

dann wird aus (13)

$$(H_o + \Gamma_p)\Psi_p^o = \Big\{\sum_j \Big(M_o + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_o}\Big) + \Gamma_p\Big\}\Psi_p^o = E_p\Psi_p^o \tag{15}$$

Zur Berechnung von Γ_p multiplizieren wir (8) in Verbindung mit (1) von links her mit Λ_c und erhalten unter Verwendung von (10), (11) und

$$[H_o,\Lambda_c] = 0 \qquad\qquad \Lambda_c H_i \Psi_p^o = H_i \Psi_p^o \tag{16}$$

für die Mesonwolke

$$\Lambda_c\Psi_p = c_p \frac{P}{E_p - H_o - \Lambda_c H_i} H_i \Psi_p^o \tag{17}$$

wo P den Hauptwert bezeichnet. Zwar verbietet der Operator Λ_c im Nenner, dass ein Mesonvakuum-Zustand weder intermediär noch als Endzustand auftreten kann, aber wir haben (im Gegensatz zum Ein-Nukleon-Problem) die Möglichkeit instabiler Zustände des Zwei-Nukleonen-Systems in Betracht zu ziehen, die zur reellen Emission von Mesonen führen (wo dann der Energienenner verschwinden würde). Aus (14) und (17) folgt dann für den Operator Γ_p

$$\Gamma_p = \Lambda_o H_i \frac{P}{E_p - H_o - \Lambda_c H_i} H_i \Lambda_o \tag{18}$$

der wegen (11) rechts und (12) links auch in der Form

$$\Gamma_p = \Lambda_o H_i \frac{P}{E_p - H_o - \Lambda_c H_i \Lambda_c} H_i \Lambda_o \tag{18'}$$

geschrieben werden kann, was direkt die Hermitizität von Γ_p zeigt. Γ_p beschreibt Selbstenergie und Wechselwirkung der beiden Nukleonen, worauf wir noch genauer eingehen.

Es ist nützlich, Γ_p noch in einer anderen Form zu bestimmen. Aus (18) in Verbindung mit (1) und der aus (15) folgenden Gleichung

$$H \Psi_p^o = E_p \Psi_p^o + (H_i - \Gamma_p) \Psi_p^o \tag{19}$$

folgt nach Standard-Methode die stationäre Lösung von (8)

$$\Psi_p = c_p \left\{ 1 + \frac{P}{E_p - H} (H_i - \Gamma_p) \right\} \Psi_p^o \tag{20}$$

Es ist offenbar

$$c_p \frac{P}{E_p - H} (H_i - \Gamma_p) \Psi_p^o = \Lambda_c \Psi_p \tag{21}$$

da Γ_p (unter anderem) diejenigen Beiträge von H_i kompensiert, die zum Mesonvakuum als Endzustand führen. Die Konstante c_p hat also auch denselben Wert wie in (10). Aus (14) folgt unter Verwendung von (21)

$$\Gamma_p = \Lambda_o H_i \frac{P}{E_p - H} (H_i - \Gamma_p) \Lambda_o \tag{22}$$

was natürlich identisch mit obigem Ausdruck (18) bzw. (18') ist (Γ_p auf der rechten Seite bedingt, dass kein intermediärer Mesonvakuum-Zustand auftritt).

Die (normierten) reellen Zustände, die zusätzlich zum Vorhandensein der beiden Nukleonen noch die Existenz von einem oder mehreren π-Mesonen beschreiben, sind dann gegeben durch

$$H \Psi_{p,qq'\dots} = (E_p + \omega_q + \omega_{q'} + \dots) \Psi_{p,qq'\dots} \tag{23}$$

Diese sollen asymptotisch für $t \to \pm\infty$ in die nackten Zustände

$$\Psi^{\circ}_{p,qq'\ldots} = a^{*}_{q} a^{*}_{q'} \ldots \Psi^{\circ}_{p} \tag{24}$$

übergehen, die also das Vorhandensein eines freien Zwei-Nukleonen-Systems im nackten Zustand Ψ°_{p} und freien π -Mesonen mit den Impulsen und Isotopenspinindizes q,q',... beschreiben (im Falle übereinstimmender q,q',... sind die bekannten Normierungsfaktoren anzubringen). Definieren wir den allgemeinen Feldenergieoperator Γ des Zwei-Nukleonen-Systems durch

$$\Gamma = \sum_{p,qq'\ldots} a^{*}_{q} a^{*}_{q'} \ldots \Gamma_{p} \,|\Psi^{\circ}_{p}\rangle\langle\Psi^{\circ}_{p,qq'\ldots}| \tag{25}$$

wo Γ_{p} durch (18) oder (22) gegeben ist und die Summe in (25) über alle Zustände des Systems zu erstrecken ist, so genügen die Zustände (24) trivialerweise der Gleichung

$$(H_{\circ} + \Gamma)\,\Psi^{\circ}_{p,qq'\ldots} = (E_{p} + \omega_{q} + \omega_{q'} + \ldots)\,\Psi^{\circ}_{p,qq'\ldots} \tag{26}$$

Insbesonders gilt natürlich auch

$$(H_{\circ} + \Gamma)\,\Psi^{\circ}_{p} = E_{p}\,\Psi^{\circ}_{p} \tag{15'}$$

da diese Gleichung mit (15) identisch ist. Die Voraussetzungen zur Aufstellung des Streuformalismus sind nun nahezu vollständig: die asymptotischen Zustände sind durch (24),(26) gegeben und stellen ein vollständiges Orthonormalsystem dar, wobei die Energieeigenwerte sich in der Tat additiv aus den Beiträgen des Zwei-Nukleonen-Systems und der π -Mesonen zusammensetzen, während die Wechselwirkung dann durch

$$(H_{i} - \Gamma) \tag{27}$$

gegeben ist. Es ist noch nötig zu zeigen, dass die Eigenwerte von (23) und (26) wirklich zusammenfallen, d.h. dass auch für die reellen Zustände gilt, dass ihre Energieeigenwerte sich in der angegebenen Form additiv zusammensetzen*.

---

* Dass die Energien der reellen und der nackten Zwei-Nukleonen-Zustände gleich sind, ist gemäss (8) und (15) klar.

Dazu schreiben wir z.B. für den Fall eines zusätzlichen Mesons

$$\Psi_{p,q} = \Lambda_{q}\Psi_{p,q} + \Lambda_{qc}\Psi_{p,q} \tag{28}$$

wo Λ_{q} der Projektionsoperator ist, der auf den Ein-Meson-Zustand q projiziert, und Λ_{qc} derjenige, der von diesem weg projiziert. Der zweite Term in (28) repräsentiert gewissermassen die "Mesonwolke" (mit Einschluss des Mesonvakuumbeitrags) des Ein-Meson-Zwei-Nukleonen-Zustandes. Die Entwicklung von (28) nach dem System (24) zeigt, dass

$$\Lambda_{q}\Psi_{p,q} = c_{p,q}\, a^{*}_{q}\,\Psi^{\circ}_{p} \tag{29}$$

worin Ψ°_{p} zunächst eine allgemeine Superposition der Eigenfunktionen von (15) und $c_{p,q}$ eine Normierungskonstante ist. Aus der Annahme

$$H\,\Psi_{p,q} = (E_{p} + \omega_{q})\,\Psi_{p,q} \tag{30}$$

und (29) folgt nun analog den Überlegungen, die zu (15) führen,

$$(H_0 + \Gamma_{p,q}) a_q^* \Psi_p^0 = \{ \sum_j (M_0 + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_0}) + \omega_q + \Gamma_{p,q} \} a_q^* \Psi_p^0 = (E_p + \omega_q) a_q^* \Psi_p^0 \tag{31}$$

wo

$$\Gamma_{p,q} = \Lambda_q H_i \frac{P}{E_p + \omega_q - H_0 - \Lambda_{qc} H_i} H_i \Lambda_q \tag{32}$$

der Feldenergieoperator des Zustandes $\Psi_{p,q}$ ist, der Selbstenergie und Wechselwirkung der Teilchen beschreibt, und der in der Tat in dem allgemeinen Feldenergieoperator (25) enthalten ist. Denn wegen

$$a_q^* \Lambda_0 = \Lambda_q a_q^* \qquad\qquad a_q^* \Lambda_c = \Lambda_{qc} a_q^* \tag{33}$$

gilt

$$\Gamma_{p,q} a_q^* = a_q^* \Gamma_p \tag{34}$$

wo Γ_p durch (18) definiert ist (vgl.(25)), wobei Glieder unterdrückt sind, die aus (vgl. (5))

$$[H_i, a_q^*] = V_q \tag{35}$$

folgen und die gegenüber (34) wie 1/V für wachsendes Normierungsvolumen $V \to \infty$ gegen Null gehen. (Um (34) zu beweisen, verwende man die Identität

$$(E_p + \omega_q - H_0 - \Lambda_{qc} H_i)^{-1} a_q^* = a_q^* (E_p - H_0 - \Lambda_c H_i)^{-1} + (E_p + \omega_q - H_0 - \Lambda_{qc} H_i)^{-1} \Lambda_{qc} V_q (E_p - H_0 - \Lambda_c H_i)^{-1}$$

die einfach durch Multiplikation mit einem der Energienenner zu beweisen ist). Aus (34) folgt aber, dass die Gleichungen (15) und (31) identisch sind. Dieses zeigt, dass der Eigenwert von (30) die vorausgesetzte Form haben muss und dass im übrigen Ψ_p^0 in (29) direkt Eigenfunktion von (15) (und keine Superposition) ist.

Oder anders ausgedrückt: wir haben gezeigt (für Zustände mit mehr als einem Meson gehen die Überlegungen ganz analog), dass die Wechselwirkung (27) keine Energieänderung bewirkt, sondern nur noch Einfluss auf die Zustandsvektoren selbst hat*, was im übrigen auch

---

* d.h. es ist $\Delta E_n = \langle \Psi_n^0 | (H_i - \Gamma) | \Psi_n \rangle = 0$ was natürlich auch direkt an diesem Ausdruck gezeigt werden kann.

---

dann der Fall ist, wenn wir vom gesamten Feldenergieoperator Γ den Wechselwirkungsanteil der beiden Nukleonen abtrennen (so dass nur der reine Selbstenergieanteil verbleibt), da dieser ebenfalls keine Energieänderung bewirkt (wie das etwa beim gewöhnlichen Potential der Fall ist). Dann würde Ψ_p^0 den Zustand zweier freier nackter Nukleonen beschreiben. Jedoch hat in unserem Falle dieses Vorgehen keinen Sinn, da wir explizit die Existenz des gebundenen Zustandes zu berücksichtigen haben.

Der Zustandsvektor Ψ_p^0 des nackten Zwei-Nukleonen-Systems hat nun als allgemeiner

Fock-Raum-Vektor die Form

$$\Psi_p^\circ = \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2\, \psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|\vec{x}_1,\vec{x}_2;s\rangle \tag{36}$$

wo

$$\psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \langle \vec{x}_1,\vec{x}_2;s|\Psi_p^\circ\rangle \tag{37}$$

die übliche Schrödingersche Wellenfunktion ist. s soll den Spin- und Isotopenspin-Zustand des Zwei-Nukleonen-Systems bezeichnen, der ansonsten mit durch p charakterisiert sein soll. Aus (15) folgt nun nach Multiplikation mit $\langle \vec{x}_1,\vec{x}_2;s|$ von links her direkt die Schrödinger-Gleichung für das Zwei-Nukleonen-System

$$\sum_j \left(M_0 + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_0}\right)\psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2) + \int d\vec{x}_1{}' d\vec{x}_2{}' \langle \vec{x}_1,\vec{x}_2;s|\Gamma_p|\vec{x}_1{}',\vec{x}_2{}';s\rangle\, \psi_p(\vec{x}_1{}',\vec{x}_2{}') = E_p\psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \tag{38}$$

Es ist gut bekannt, dass (38) als Ausgangspunkt für eine nichtrelativistische Theorie der Kernkräfte verwandt werden kann. Im allgemeinen ist das resultierende Potential von den Nukleonenimpulsen abhängig und nichtlokal. Das hängt damit zusammen, dass Γ_p die Operatoren der Nukleonenimpulse enthält und damit nichtdiagonal in den Nukleonenkoordinaten ist. Wir zeigen, dass aber im gesamten nichtrelativistischen Bereich diese Abhängigkeit nur an den Selbstenergien selbst und nicht an dem Wechselwirkungsanteil wesentlich sein kann (sofern dieser klein gegen die Nukleonenmasse M ist). Zu diesem Zwecke beachten wir, dass bei einer Entwicklung von (18) nach $(\Lambda_c H_i - \Gamma)$ oder Iteration von (2) und Entwicklung nach $(H_i - \Gamma)$ gemäss*

---

* Bei Iteration von (22) tritt zunächst $(1-\Lambda_0)$ im zweiten und in den höheren Gliedern auf. Es gilt aber nach (11) $1-\Lambda_0 = \Lambda_c$.

$$\Gamma_p = \Lambda_0 H_i \frac{P}{E_p-(H_0+\Gamma)} H_i \Lambda_0 + \Lambda_0 H_i \frac{P}{E_p-(H_0+\Gamma)} \Lambda_c H_i \frac{P}{E_p-(H_0+\Gamma)} H_i \Lambda_0 + \dots \tag{39}$$

in allen Gliedern kein intermediärer Mesonvakuum-Zustand auftreten kann, so dass also die Zwischenzustände mindestens ein Meson enthalten müssen. Die Energienenner sind bei Entwicklung nach dem System (24) Differenzen der Form

$$E_p - E_{p'} - \omega_q\,, \quad E_p - E_{p''} - \omega_{q'} - \omega_{q''}\,, \dots \tag{40}$$

und enthalten also mindestens die Energie eines Mesons (wobei die Untersuchung dieses Falles genügt). Daneben tritt die Differenz der Energien des Zwei-Nukleonen-Systems im gebundenen Zustand oder in den nicht gebundenen Zuständen auf. Wir betrachten zunächst letztere, so dass also gilt

$$E_p = \left(M + \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2M}\right) + \left(M + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2M}\right) \tag{41}$$

und entsprechend für $E_{p'}$, wo M die renormierte Nukleonenmasse ist. Für hinreichend hohe

Energien der Relativbewegung der Nukleonen sind ihre Eigenfunktionen ebene Wellen, so dass der Impulssatz beim einzelnen Emissionsakt (bzw.Absorptionsakt) am betreffenden Nukleon gelten muss. Dann gilt

$$E_p - E_{p'} = \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M} - \frac{(\vec{p}_j - \vec{q})^2}{2M} \qquad (j=1 \text{ oder } 2) \tag{42}$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass

$$\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M} - \frac{(\vec{p}_j - \vec{q})^2}{2M} \ll \omega_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}} \tag{43}$$

sofern

$$\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M} \ll M \tag{44}$$

(denn (43) ist äquivalent

$$\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M} \ll \left(\frac{|\vec{q}|}{2} + \frac{M}{|\vec{q}|}\sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}}\right)^2 / 2M$$

und die rechte Seite ist - wie sich leicht zeigen lässt - stets $\gtrsim$ M).

Bei niedrigen Energien der Relativbewegung gilt der Impulssatz nur genähert, aber die Korrekturen sind nur von der Art, dass sich $(E_p - E_{p'})$ von (42) nur durch einen nichtrelativistischen Betrag unterscheidet. Dasselbe gilt auch für den gebundenen Zustand. Insgesamt haben wir also

$$E_p - E_{p'} \ll \omega_q \tag{45}$$

Damit ist klar, dass die Impulsabhängigkeit des Potentials nur eine relativistische Korrektur darstellt, während sie an den Selbstenergien (sofern diese - im Unterschied zum Wechselwirkungsanteil - gross von der Ordnung M sind) bereits nichtrelativistische Korrekturen gibt, was allgemein nötig ist für den Übergang von den nichtrenormierten zu den renormierten Nukleonenenergien

$$\sum_j \left(M_0 + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_0}\right) \longrightarrow \sum_j \left(M + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M}\right). \tag{46}$$

3. S-Matrix-Formalismus

Die S-Matrix ist für die Wechselwirkung (27) gegeben durch

$$S = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(t)\,dt\right\} \tag{47}$$

mit

$$H_i(t) = e^{i(H_0+\Gamma)t}(H_i - \Gamma)\,e^{-i(H_0+\Gamma)t} = \sum_q \left\{a_q V_q(t) + a_q^* V_q^*(t)\right\} - \Gamma(t) \tag{48}$$

wo nun (vgl. (5) und (6))

$$V_q(t) = \sum_j \frac{i}{\sqrt{V}} \frac{\sqrt{4\pi} f_0}{m} \tau_5^j \vec{\sigma}^j \vec{q}\, v_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} e^{iH_N t} e^{i\vec{q}\vec{x}_j} e^{-iH_N t} e^{-i\omega_q t}, \quad \Gamma(t) = e^{iH_N t} \Gamma e^{-iH_N t} \tag{49}$$

$$H_N = \sum_j \left(M_0 + \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2M_0}\right) + \Gamma$$

Hierbei haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass Γ bzw. $\Gamma(t)$ gemäss (25) eine mit a_q^* und a_q kommutierende Grösse ist. Das T-Symbol in (47) ordnet die einzelnen Terme in der Entwicklung nach $H_i(t)$ in der bekannten Weise. Jedoch werden wir keinen expliziten Gebrauch von einer störungstheoretischen Entwicklung machen, sondern nur einige allgemeine Beziehungen brauchen, die aus der Darstellung (47) folgen.

Die unitäre S-Matrix (47) geht nun durch einen Grenzübergang aus der Transformationsmatrix

$$U(t,t_0) = T \exp\left\{-i \int_{t_0}^{t} H_i(t)\,dt\right\} \tag{50}$$

hervor, die den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = -i H_i(t) U(t,t_0), \qquad \frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t_0} = i U(t,t_0) H_i(t_0) \tag{51}$$

mit der Anfangsbedingung $U(t_0,t_0) = 1$ bzw. den Integralgleichungen

$$U(t,t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t} dt' H_i(t') U(t',t_0) = 1 + i \int_{t}^{t_0} dt'\, U(t,t') H_i(t') \tag{51'}$$

genügt. Der Grenzübergang ist ist dabei so vorzunehmen, dass die oszillierenden Terme in (50) für $t_0 \to -\infty$, $t \to +\infty$ verschwinden, damit sich ein definierter Grenzwert ergibt. Wir ersetzen dazu

$$H_i(t) \to e^{-\varepsilon|t|} H_i(t) \tag{52}$$

wo $e^{-\varepsilon|t|}$ ein Dämpfungsfaktor in dem Sinne ist, dass nach Ausführung der Rechnung der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vorzunehmen ist. Dann erhalten wir gemäss der zweiten Gleichung (51') in Anwendung auf einen nackten Zustand (24), (26) die Chew-Gell-Mann-Goldberger-Darstellung für den uns wichtigen Operator $U(0,\mp\infty)$ [7,11]

$$U(0,\mp\infty)\Psi_n^0 = \left\{1 + i \int_0^{\mp\infty} dt\, e^{\pm\varepsilon t} e^{i(H-E_n)t} (H_i - \Gamma)\right\} \Psi_n^0 \tag{53}$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{E_n - H \pm i\varepsilon} (H_i - \Gamma)\right\} \Psi_n^0$$

wo wir (vgl. (48) und (50))

$$U(0,t) H_i(t) = e^{iHt} (H_i - \Gamma) e^{-i(H_0+\Gamma)t} \tag{54}$$

benutzt haben, was aus einfacher Anwendung der bekannten Additionstheoreme für Exponentialoperatoren folgt. (53) ergibt aber

$$(H-E_n)\,U(0,\mp\infty)\,\Psi_n^0 = 0 \tag{55}$$

d.h. die Zustände

$$\Psi_n^{(\pm)} = U(0,\mp\infty)\,\Psi_n^0 \tag{56}$$

sind Eigenfunktionen des Gesamt-Hamiltonoperators in dem Sinne, dass der Operator $U(0,\mp\infty)$ einen nackten Zustand Ψ_n^0 in einen Eigenzustand $\Psi_n^{(\pm)}$ des Gesamt-Hamiltonoperators überführt, wobei Ψ_n^0 die einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen beschreibt. Es ist wichtig zu bemerken, dass auch in unserem Falle, wo die Existenz eines gebundenen Zustandes zu berücksichtigen ist, $U(0,\mp\infty)$ ein unitärer Operator ist (wobei insbesonders eine Normierungskonstante in (53) zu berücksichtigen ist, da $U(0,\mp\infty)\Psi_n^0$ im allgemeinen kein normierter Zustandsvektor ist, was wir aber nicht explizit ausschreiben wollen). Wegen

$$U^*(0,\mp\infty) = U(\mp\infty,0) \tag{57}$$

lautet die Unitaritätsbeziehung

$$U(\mp\infty,0)\,U(0,\mp\infty) = 1\,, \qquad U(0,\mp\infty)\,U(\mp\infty,0) = 1 \tag{58}$$

Der Grund ist der, dass zwischen den von uns definierten asymptotischen Zuständen (24) und den reellen Zuständen eine ein-eindeutige Beziehung besteht, da die von uns benutzte Asymptotenbedingung nicht zum Zerfall des gebundenen Zustandes führt, weil die Wechselwirkung zwischen den Teilchen im nackten Zustand nicht abgeschaltet wird (sondern nur die Mesonwolke). Bei üblicher Verwendung der Adiabaten-Konzeption, die die gesamte Wechselwirkung abschaltet, zerfällt zwangsläufig der gebundene Zustand und die zweite Gleichung in (58) ist ungültig[11].

Im folgenden verwenden wir den S-Matrix-Formalismus unter Benutzung von Variationsableitungen, wie er von Bogolubov[8,9] vorgeschlagen wurde. Die Tatsache, dass wir das Nukleonenfeld nicht ein zweites Mal quantisiert haben, bedingt, dass der Operator der kinetischen Energie der Nukleonen nicht mit dem Feldoperator der Mesonen am Ort der Nukleonen kommutiert, was wir aber im einzelnen zu beachten haben, wenn wir die Vertauschungsrelationen für die Vernichtungs-und Erzeugungsoperatoren der Mesonen mit der S-Matrix durch Variationsableitungen dieser bezüglich des Mesonfeldes $\phi_s(x)$ formulieren wollen. Es erscheint in unserem Falle aber zweckmässiger, direkt Variationsableitungen von S bezüglich des Wechselwirkungsoperators $H_i(t)$ in (47) zu bilden. Aus (48) folgt

$$[a_q, H_i(t)] = V_q^*(t)\,, \qquad [H_i(t), a_q^*] = V_q(t) \tag{59}$$

und hieraus, da die S-Matrix gemäss (47) ein Funktional in $H_i(t)$ ist,

$$[a_q, S] = T[a_q, e^{-i\int H_i(t)dt}] = T\int dt\, V_q^*(t)\frac{\delta}{\delta H_i(t)} e^{-i\int H_i(t)dt}$$
$$= \int dt\, T V_q^*(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)} \tag{60}$$

$$[S, a_q^*] = \int dt\, T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)}$$

wo die Operatoren $V_q^*(t)$ und $V_q(t)$, die bei verschiedenen Zeiten nicht vertauschbar sind und demgemäss auch nicht mit dem Operator S und seinen Variationsableitungen nach $H_i(t)$, innerhalb des als T-Produkt geordneten Endausdruckes stehen müssen (innerhalb eines T-Produktes haben sie die Eigenschaften von c-Zahlen, was die übliche Herleitung in (60) möglich macht). Natürlich ist das T-Symbol durch durch das $\bar{T}$-Symbol für das antichronologische Produkt in (60) zu ersetzen, falls die S-Matrix durch dieses ausgedrückt wird.

Die Kausalitätsbedingung, die von Bogolubov[8,9] als "Retardierungs-" bzw. "Avancierungseigenschaft" des Stromoperators j(x) in dem Sinne formuliert wurde, dass dieser nicht von den einlaufenden Mesonfeldern mit Zeiten $t' > t$ bzw. nicht von den auslaufenden mit Zeiten $t' < t$ abhängen soll, ist in unserem Falle zu schreiben

$$\frac{\delta}{\delta H_i(t')}\left[S^*\left(T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)}\right)\right] = 0 \qquad \text{für} \quad t' > t \tag{61}$$

$$\frac{\delta}{\delta H_i(t')}\left[\left(T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)}\right)S^*\right] = 0 \qquad \text{für} \quad t' < t \tag{61'}$$

wo natürlich $V_q(t)$ auch durch $V_q^*(t)$ ersetzt werden kann. Wegen (vgl. (47))

$$T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)} = -i\,U(+\infty, t)V_q(t)\,U(t, -\infty) \tag{62}$$

und

$$S^* U(+\infty, t) = U(-\infty, t)$$
$$U(t, -\infty)\, S^* = U(t, +\infty)$$

(wo wir die Unitarität von $U(t, \pm\infty)$ benutzen) sind die Beziehungen (61),(61') in unserem Hamilton-Formalismus trivialerweise erfüllt..

Im folgenden benutzen wir die Bezeichnung

$$\bar{V}_q(t) = i\left(T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)}\right)S^* = U(+\infty, t)\,V_q(t)\,U(t, +\infty) \tag{63}$$

wodurch $V_q(t)$ in der Heisenberg-Darstellung ausgedrückt wird, die für $t \to +\infty$ mit der Wechselwirkungsdarstellung übereinstimmt, was fürs Folgende zweckmässig ist. Durch einfaches Ableiten folgt die wichtige Beziehung

$$\left(T V_{q'}^*(t')\frac{\delta}{\delta H_i(t')}\right)\bar{V}_q(t) = i\,\Theta(t'-t)\left[\bar{V}_q(t), \bar{V}_{q'}^*(t')\right] \tag{64}$$

welche im übrigen die Bedingung (61') enthält. (64) ist die "Goldberger"-Darstellung[12] für unser Problem.

Genau so einfach leitet man die Beziehung (vgl. (62))

$$\left[\left(T V^*_{q'}(t') \frac{\delta}{\delta H_i(t')}\right)\left(T V_q(t) \frac{\delta S}{\delta H_i(t)}\right)\right] S^* = -T\, \overline{V}^*_{q'}(t')\, \overline{V}_q(t) \tag{65}$$

ab, die genau dem in einer kovarianten Formulierung auftretenden T-Produkt der Ströme entspricht. Wir werden (65) aber nicht brauchen.

Unser Streuformalismus ist nun so weit fertig, dass wir unmittelbar zur Formulierung der Impulsnäherung für den Fall der Streuung von π -Mesonen an Deuteronen übergehen können.

4. Impulsnäherung

Wir betrachten das S-Matrixelement für die (elastische oder unelastische) Streuung von π -Mesonen an Deuteronen

$$\langle p',q'|S|p,q\rangle = \langle \Psi^\circ_{p',q'}|S|\Psi^\circ_{p,q}\rangle = \langle a^*_{q'}\Psi^\circ_{p'}|S|a^*_q \Psi^\circ_p\rangle \tag{66}$$

wo $\Psi^\circ_{p,q}$ den Anfangszustand beschreibt, in dem sich ein Deuteron im Grundzustand Ψ°_p und ein π -Meson im Zustand q befindet, und entsprechend $\Psi_{p',q'}$ den Endzustand, in dem das Zwei-Nukleonen-System im Zustand $\Psi^\circ_{p'}$ und das π -Meson im Zustand q' ist. Die Anwendung der Vertauschungsrelation (60) auf das einlaufende Meson führt auf

$$\langle p',q'|S|p,q\rangle = \delta_{q'q}\langle \Psi^\circ_{p'}|S|\Psi^\circ_p\rangle + \int dt\, \langle a^*_{q'}\Psi^\circ_{p'}|\left(T V_q(t)\frac{\delta S}{\delta H_i(t)}\right)|\Psi^\circ_p\rangle \tag{67}$$

Wir verwenden nun die Tatsache, dass das Zwei-Nukleonen-System sich im Anfang im stabilen Deuteron-Grundzustand befindet, für den (bis auf einen Phasenfaktor) gilt

$$S\Psi^\circ_p = S^*\Psi^\circ_p = \Psi^\circ_p \tag{68}$$

so dass sich (67) bei Anwendung von (60) auf das auslaufende Meson und Verwendung von (63) weiter reduziert auf

$$\langle p',q'|S|p,q\rangle = \delta_{p'q';pq} - i\int dt\, dt' \langle p'|\left(T V^*_{q'}(t')\frac{\delta}{\delta H_i(t')}\right)\overline{V}_q(t)|p\rangle \tag{69}$$

Definieren wir die R-Matrix durch

$$S = 1 + R \tag{70}$$

und verwenden wir (64), so folgt

$$\langle p',q'|R|p,q\rangle = -\int dt\, dt'\, \Theta(t'-t)\langle p'|[\overline{V}^*_{q'}(t'), \overline{V}_q(t)]|p\rangle \tag{71}$$

$\overline{V}_q(t)$ lässt sich auch in der von (63) verschiedenen Form schreiben

$$\overline{V}_q(t) = U(+\infty,0)\, e^{iHt}\, V_q\, e^{-i\omega_q t}\, e^{-iHt}\, U(0,+\infty) \tag{72}$$

wo V_q durch (6) gegeben ist, so dass unter Verwendung von (55),(56) nach einfacher Rechnung wird

$$\langle p'q'|R|p,q\rangle = -2\pi\delta(E_{p'}+\omega_{q'}-E_p-\omega_q)\int dt\,\Theta(t)\langle p'|[\overline{V}^*_{q'}(t),\overline{V}_q(0)]|p\rangle \tag{73}$$

Definieren wir die T-Matrix durch

$$S = 1-2\pi i\delta(E_{p'}+\omega_{q'}-E_p-\omega_q)\,T \tag{74}$$

so gilt nach (70) und (73)

$$\langle p'q'|T|p,q\rangle = -i\int dt\,\Theta(t)\langle p'|[\overline{V}^*_{q'}(t),\overline{V}_q(0)]|p\rangle \tag{75}$$

Wir entwickeln (75) nach dem Funktionensystem (24), (26) und erhalten*

---

* Falls wir die S-Matrix gemäss (65) reduziert hätten, so wären wir auf einen Ausdruck der Form (76) gestossen, in dem im zweiten Glied $-i\varepsilon$ durch $+i\varepsilon$ ersetzt ist, und der also ganz andere analytische Eigenschaften hat.

$$\langle p'q'|T|p,q\rangle = -i\sum_n\int dt\,\Theta(t)\{\langle p'|\overline{V}^*_{q'}(t)|n\rangle\langle n|\overline{V}_q(0)|p\rangle - \langle p'|\overline{V}_q(0)|n\rangle\langle n|\overline{V}^*_{q'}(t)|p\rangle\}$$

$$= \sum_n\left\{\frac{\langle p'q'|T^*|n\rangle\langle n|T|p,q\rangle}{E_{p'}+\omega_{q'}-E_n+i\varepsilon} + \frac{\langle p'q|T|n\rangle\langle n|T^*|p,q'\rangle}{E_p-\omega_{q'}-E_n-i\varepsilon}\right\} \tag{76}$$

wobei wir die Tatsache verwandt haben, dass gemäss (vgl. (67),(68),(63) und (72))

$$\langle n|S|p,q\rangle = \langle n|S|a^*_q\Psi^0_p\rangle = \delta_{n;p,q} - i\int dt\,\langle n|\overline{V}_q(t)|p\rangle$$
$$= \delta_{n;p,q} - 2\pi i\delta(E_n-E_p-\omega_q)\langle n|\overline{V}_q(0)|p\rangle \tag{77}$$

allgemein für die T-Matrix gilt

$$\langle n|T|p,q\rangle = \langle n|\overline{V}_q(0)|p\rangle \tag{78}$$

Wir bemerken, dass im Gegensatz zur statischen Ein-Nukleon-Theorie von Chew und Low[13] die Abhängigkeit vom Impuls des einkommenden Mesons in (78) nichttrivial ist, weil diese gemäss (6) zusätzlich in den Exponentialfaktoren $e^{i\vec{q}\vec{x}_j}$ steckt. Dennoch definiert der Ausdruck (78) eine bestimmte Extrapolation von der Energieschale, und es ist klar, dass (76) dieselbe Extrapolation hat. Der Beweis in der statischen Ein-Nukleon-Theorie von Chew und Low ist bekanntlich trivial, weil sich die Abhängigkeit vom Impuls des einfallenden Mesons auf beiden Seiten der zu (76) analogen Chew-Low-Gleichung als Faktor einfach heraushebt. Im allgemeinen Fall folgt die Möglichkeit der Extrapolation einfach aus der Tatsache, dass (76) eine mathematische Identität ist, denn (75) und (76) folgen unter Verwendung von (60) unmittelbar aus der Definition (78) (unabhängig davon, ob die Werte der Impulse auf der Energieschale liegen oder nicht; es ist klar, dass in den Energienennern in (76) $E_{p'}+\omega_{q'}$ bzw. $E_p-\omega_{q'}$ nur dann durch $E_p+\omega_q$ bzw. $E_{p'}-\omega_q$ ersetzt werden darf, wenn Werte auf der Energieschale betrachtet werden, s.a.[10]).

Der antihermitische Teil der Übergangsmatrix folgt nun aus (76) in der Form

$$\begin{aligned}\langle p',q'|A|p,q\rangle &= \frac{1}{2i}\langle p',q'|T-T^*|p,q\rangle \\ &= -\pi\sum_n\{\langle p',q'|T^*|n\rangle\langle n|T|p,q\rangle\,\delta(E_{p'}+\omega_{q'}-E_n) \\ &\qquad -\langle p',q|T|n\rangle\langle n|T^*|p,q'\rangle\,\delta(E_p-\omega_{q'}-E_n)\}\end{aligned} \tag{79}$$

der für den Fall der elastischen Vorwärtsstreuung in bekannter Weise mit dem totalen Wirkungsquerschnitt zusammenhängt gemäss dem optischen Theorem

$$\sigma_t = \frac{2\pi}{v}V\sum_n\delta(E_p+\omega_q-E_n)\,|\langle n|T|p,q\rangle|^2 = -\frac{2}{v}V\langle p,q|A|p,q\rangle \tag{80}$$

worin V das Normierungsvolumen und v die Relativgeschwindigkeit ist, für die im Laboratoriumssystem gilt $v=|\vec{q}|/\omega_q$, das wir im folgenden voraussetzen wollen. Hierbei ist zu beachten, dass im beobachtbaren Bereich ($\omega_q \geq m$) der zweite Summand in (79) auf Grund der Stabilität des Anfangszustandes (Deuteron-Grundzustand) verschwindet, weil keine Emission eines oder mehrerer Mesonen möglich ist ($E_p \neq E_n+\omega_{q'}$). Die Beziehung (79) war Gegenstand der Untersuchungen in[1,2,3] bei der Aufstellung und Auswertung der Dispersionsbeziehungen für den Fall der elastischen Vorwärtsstreuung von π-Mesonen an Deuteronen. Besonderes Interesse hatte der Absorptions- bzw. Emissionsprozess mit $|n\rangle=|p''\rangle$ in (79), der genähert ausgerechnet und in den nichtbeobachtbaren Bereich analytisch fortgesetzt wurde. Der Grundgedanke dieses naheliegenden Näherungsverfahrens, das auch von Ioffe, Pomeranchuk und Rudik[14] und für den Fall der statischen Theorie von Lichtenberg[15] in ähnlichem Zusammenhang verwandt wurde, ist einfach der: man ersetze beim Emissions- bzw. Absorptionsprozess die reellen Zustandsvektoren des Zwei-Nukleonen-Systems durch die Wellenfunktionen der entsprechenden nackten Zustände unter gleichzeitiger Ersetzung der nichtrenormierten Kopplungskostanten durch die renormierte. Dieses Näherungsverfahren soll hier nun im einzelnen untersucht werden, was uns ganz zwangsläufig zu einer feldtheoretischen Verallgemeinerung der Chewschen Impulsnäherung führen wird.

Dazu betrachten wir genauer die T-Matrix (78) unter Verwendung von (63) und (6)

$$\begin{aligned}\langle n|T|p,q\rangle &= \langle n|\bar{V}_q(0)|p\rangle = \langle n|U(+\infty,0)V_qU(0,+\infty)|p\rangle \\ &= \sum_j\langle n|U(+\infty,0)V_q^jU(0,+\infty)|p\rangle\end{aligned} \tag{81}$$

wo nach (49)

$$\mathcal{U}(0,+\infty) = T\exp\{-i\int_{+\infty}^{0} H_i(t)dt\} = \exp_+\{-i\int_{+\infty}^{0} H_i(t)dt\} \tag{82}$$

$H_i(t)$ ist durch (43) gegeben und das + -Symbol soll im folgenden die chronologische Ordnung der Operatoren angeben und entsprechend das - -Symbol die antichronologische. Wir schreiben unter Verwendung der Additionstheoreme für Exponentialoperatoren

$$\begin{aligned}\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0} H_i(t)dt\} &= \exp\{i\int_{\infty}^{0}(H_0+\Gamma)dt\}\exp\{-i\int_{\infty}^{0} H\,dt\} \\ &= \exp\{i\int_{\infty}^{0}(H_0+\Gamma)dt\}\exp\{-i\int_{\infty}^{0}(H_0+\Gamma_1+\Gamma_2)dt\}\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}[H_i^1(t)+H_i^2(t)]dt\} \\ &= \exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}\Gamma_p^{12}(t)dt\}\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}[H_i^1(t)+H_i^2(t)]dt\}\end{aligned} \tag{83}$$

mit

$$\Gamma_p^{12}(t) = e^{i(H_0+\Gamma)t}\,\Gamma_p^{12}\,e^{-i(H_0+\Gamma)t}, \quad \Gamma_p^{12} = \Gamma_p^{21} = \Gamma_1+\Gamma_2-\Gamma \tag{84}$$

worin Γ_j die Selbstenergieoperatoren für die einzelnen Nukleonen*

---

* gebildet analog (25) für die Ein-Nukleon-Systeme

---

und Γ der Feldenergieoperator (25) ist und (vgl. (6) und (48), (49))

$$H_i^j(t) = \sum_q \{V_q^j(t)a_q + V_q^{j*}(t)a_q^*\} - \Gamma_j(t) \tag{85}$$

mit

$$V_q^j(t) = e^{iH_N^j t}\,V_q^j\,e^{-i\omega_q t}e^{-iH_N^j t}, \qquad \Gamma_j(t) = e^{iH_N^j t}\,\Gamma_j\,e^{-iH_N^j t}$$

$$H_N^j = (M_0 + \frac{\vec{P}_j^2}{2M_0}) + \Gamma_j \tag{86}$$

die Wechselwirkungsoperatoren für die entsprechenden Ein-Nukleon-Systeme sind.

Weiterhin formen wir um

$$\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}[H_i^1(t)+H_i^2(t)]dt\} = \begin{cases}\mathcal{U}^1(0,+\infty)\,\mathcal{U}^2(0,+\infty)\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}\Gamma_M^{12}(t)dt\} \\ \mathcal{U}^2(0,+\infty)\,\mathcal{U}^1(0,+\infty)\exp_+\{-i\int_{\infty}^{0}\Gamma_M^{21}(t)dt\}\end{cases} \tag{87}$$

mit

$$\mathcal{U}^j(0,+\infty) = \exp_+\{-i\int_{\infty}^{0} H_i^j(t)dt\} \tag{88}$$

als den Transformationsoperatoren für die entsprechenden Ein-Nukleon-Systeme und

$$\Gamma_M^{12}(t) = -i\sum_q\{\bar{V}_q^2(t)\int_0^t dt'\,\bar{V}_q^{1*}(t') - \bar{V}_q^{2*}(t)\int_0^t dt'\cancel{\int_0^t dt}\,\bar{V}_q^1(t')\} \tag{89}$$

wo

$$\overline{V}_q^j(t) = \exp_-\{i\int_0^t H_i^j(t')dt'\}\, V_q^j\, \exp_+\{-i\int_0^t H_i^j(t')dt'\} \tag{90}$$

Insgesamt wird damit

$$\mathcal{U}(0,+\infty) = \begin{cases} \exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_P^{12}(t)dt\}\, \mathcal{U}^1(0,+\infty)\,\mathcal{U}^2(0,+\infty)\, \exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_M^{12}(t)dt\} \\ \exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_P^{12}(t)dt\}\, \mathcal{U}^2(0,+\infty)\,\mathcal{U}^1(0,+\infty)\, \exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_M^{21}(t)dt\} \end{cases} \tag{91}$$

(91) ist nun unmittelbar geeignet für eine Definition der Impulsnäherung. Wir definieren diese durch

$$\exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_P^{12}(t)dt\} \rightarrow 1 \tag{92}$$

$$\exp_+\{-i\int_\infty^0 \Gamma_M^{\binom{12}{21}}(t)dt\} \rightarrow 1 \tag{93}$$

so dass

$$\mathcal{U}(0,+\infty) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}^1(0,+\infty)\,\mathcal{U}^2(0,+\infty) \\ \mathcal{U}^2(0,+\infty)\,\mathcal{U}^1(0,+\infty) \end{cases} \tag{94}$$

Die Näherung (92) entspricht gemäss (84) der Vernachlässigung der Potentialeffekte, da $\Gamma - (\Gamma_1 + \Gamma_2)$ im wesentlichen die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen beschreibt (der Feldenergieoperator enthält ja Selbstenergie und Weohselwirkung des Zwei-Nukleonen-Systems*)und (93) entspricht der Vernachlässigung der Vielfachstreueffekte, welche gemäss

---

* Wir bemerken aber, dass sich die Selbstenergieanteile in Γ auf das Zwei-Nukleonen-System beziehen, im Unterschied zu den Γ_j.

---

(87) aus der Tatsache folgen, dass der Mesonfeldoperator $\phi_q(x)$ am Ort des einen Nukleons nicht mit dem am Ort des anderen Nukleons vertauschbar ist. Durch Berücksichtigung beider Effekte wird dann auch der Absorptionseffekt korrigiert. In dieser Weise erhalten wir eine direkte Korrespondenz zur Arbeit von Chew und Goldberger[7)] über eine Verallgemeinerung der Impulsnäherung im Falle des einfacheren Potentialproblems, wo die höheren Näherungen ebenfalls durch die Berücksichtigung der Potential- und Vielfachstreukorrekturen bestimmt sind.

Die T-Matrix (81) kann damit in der Impulsnäherung gemäss (94) durch

$$\langle n|T|p,q\rangle = \sum_j \langle n|\mathcal{U}^j(+\infty,0)\, V_q^j\, \mathcal{U}^j(0,+\infty)|p\rangle \tag{95}$$

approximiert werden. Wir können (95) auch in der Form

$$T = \sum_j T^j \tag{95'}$$

schreiben, wo T^j die Übergangsmatrizen für die Ein-Nukleon-Systeme sind. Hierbei ist natürlich der Anfangszustand durch $|p,q\rangle$ zu fixieren.

Wir betrachten zunächst den Absorptionsprozess mit $|n\rangle = |p'\rangle$ und untersuchen

$$\langle p'|T|p,q\rangle = \sum_j \langle \Psi^0_{p'}| U^j(+\infty,0) V^j_q U^j(0,+\infty)|\Psi^0_p\rangle \tag{96}$$

Nach (36), (37) wird dieser Ausdruck

$$\sum_j \int d\vec{x}_1' d\vec{x}_2' \psi^*_{p'}(\vec{x}_1',\vec{x}_2') \langle \vec{x}_1',\vec{x}_2'; s| U^j(+\infty,0) V^j_q U^j(0,+\infty)|\vec{x}_1,\vec{x}_2;s\rangle \psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \tag{97}$$

Wir führen die Fourier-Transformierte zu $\psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ ein

$$\psi_p(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2\, g_p(\vec{p}_1,\vec{p}_2) e^{i(\vec{p}_1\vec{x}_1+\vec{p}_2\vec{x}_2)} \tag{98}$$

und entsprechend zu $\psi_{p'}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$; so dass (97) die Form annimmt

$$\int d\vec{p}_1' d\vec{p}_2'\, g^*_{p'}(\vec{p}_1',\vec{p}_2') \Big\{ \langle \vec{p}_1';s'|T^1|\vec{p}_1,q;s\rangle \delta(\vec{p}_2'-\vec{p}_2)$$

$$+ \langle \vec{p}_2';s'|T^2|\vec{p}_2,q;s\rangle \delta(\vec{p}_1'-\vec{p}_1)\Big\} g_p(\vec{p}_1,\vec{p}_2) d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \tag{99}$$

worin

$$\langle \vec{p}_j';s'|T^j|\vec{p}_j,q;s\rangle = \langle \vec{p}_j';s'|U^j(+\infty,0)V^j_q U^j(0,+\infty)|\vec{p}_j;s\rangle \tag{100}$$

mit

$$|\vec{p}_j;s\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vec{x}_j\, e^{i\vec{p}_j\vec{x}_j}|\vec{x}_j;s\rangle \tag{101}$$

die entsprechenden T-Matrizen für die Ein-Nukleon-Systeme sind, deren Spin- und Isotopenspin-Zustände sich aber auf das Zwei-Nukleonen-System beziehen. Die Interpretation der Beziehung (99), die vollkommen analog der Chewschen Beziehung (13) in[5] für Potentialstreuung ist, ist die: das einfallende Meson wird jeweils von einem freien Nukleon bestimmter Impulsverteilung absorbiert, wobei die Störung durch das Vorhandensein des anderen vernachlässigt wird und dieses nur die Rolle eines Zuschauers spielt (δ -Funktionen in (99)). Hierbei hat das absorbierende freie Nukleon im Anfangs- und Endzustand eine Impulsverteilung, die genau derjenigen in den entsprechenden nackten Zuständen des Zwei-Nukleonen- Systems entspricht. Wir erwarten, dass angesichts der schwachen Bindung der Nukleonen im Deuteron-Grundzustand und der relativ hohen kinetischen Energie der Mesonen diese Näherung brauchbar ist.

Wir untersuchen nun die wichtige Frage nach der Abhängigkeit der T^j - Matrizen (100) von den Impulsen der einzelnen Nukleonen. Dazu betrachten wir den Ein-Nukleon-Zustandsvektor

$$\Psi_{p_j} = U^j(0,\pm\infty)\Psi^0_{p_j} \qquad (102)$$

wo die $\pm$ -Zeichen bedeutungslos sind angesichts der Stabilität der nackten Ein-Nukleon-Zustände $\Psi^0_{p_j}$. Wir wählen den Hauptwert und (102) kann analog (20) in der Form geschrieben werden

$$U^j(0,\pm\infty)\Psi^0_{p_j} = U^j\Psi^0_{p_j} = c_{p_j}\left\{1 + \frac{P}{E_{p_j}-H^j}(H^j_i - \Gamma_j)\right\}\Psi^0_{p_j} \qquad (103)$$

$$|c_{p_j}|^2 = \left[1 + \langle\Psi^0_{p_j}|(H^j_i-\Gamma_j)\frac{P}{E_{p_j}-H^j}\,\frac{P}{E_{p_j}-H^j}(H^j_i-\Gamma_j)|\Psi^0_{p_j}\rangle\right]^{-1} \qquad (104)$$

wo wir die Normierungskonstante nun explizit mitnehman. Ganz analog den Überlegungen am Ende von Abschnitt 2 lässt sich zeigen, dass die U^j im ganzen nichtrelativistischen Bereich vom Nukleonenimpuls unabhängig sind (was dann natürlich auch von der Normierungskonstanten gelten muss). Denn der Operator

$$\frac{P}{E_{p_j}-H^j}(H^j_i - \Gamma_j) \qquad (105)$$

enthält weder als End- noch intermediären Zustand das Mesonvakuum, so dass bei einer Entwicklung analog (39) die Energienenner mindestens die Energie eines Mesons enthalten müssen (hier kommt noch der Umstand hinzu, dass der Impulssatz streng gilt).

(100) lässt sich nun auf Beiträge reduzieren, deren Spin- und Isotopenspinzustände sich auf das einzelne Nukleon beziehen, und wir schreiben

$$\langle p'_j|T^j|p_j,q\rangle = \langle\Psi_{p'_j}|V^j_q|\Psi_{p_j}\rangle = Z\langle p'_j|V^j_q|p_j\rangle \qquad (106)$$

mit der Renormierungskonstanten

$$Z = \frac{\langle U^j\Psi^0_{p'_j}|V^j_q|U^j\Psi^0_{p_j}\rangle}{\langle\Psi^0_{p'_j}|V^j_q|\Psi^0_{p_j}\rangle} \qquad (107)$$

Aus der Tatsache, dass U^j im ganzen nichtrelativistischen Bereich von $\vec{p}_j$ unabhängig ist, folgt, dass dies auch für (107) gilt*, so dass wir die renormierte Kopplungskonstante ein-

---

* Wir beachten, dass (107) allgemein nur von den Impulsen des Nukleons und des Mesons (die im übrigen durch den Impulssatz verknüpft sind) und nicht von Spin-und Isotopenspin abhängen kann (vgl.[10]). Der Index j kann also weggelassen werden, wenn noch das im An-

schluss an (107) Gesagte berücksichtigt wird.

---

führen können gemäss

$$f = Z f_0 \tag{108}$$

Es ist gut bekannt, dass die renormierte Kopplungskonstante in der Theorie der Dispersionsbeziehungen für solche Werte der Nukleonenimpulse $\vec{p}, \vec{p}\,'$ und des Mesonimpulses $\vec{q}$ definiert wird, für die Energie- und Impulssatz bei der Absorption erfüllt sind. Hierbei ist $\vec{q}$ notwendig komplex und entspricht im Laboratoriumssystem der Mesonenergie

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}} = \frac{m^2}{2M} \ll m \tag{109}$$

was im einzelnen bedeutet, dass eine solche Definition der Kopplungskonstanten nur auf dem Wege einer analytischen Fortsetzung möglich ist. Wichtig ist die Tatsache, dass hierdurch die Kopplungskonstante für solche Werte der Nukleonenimpulse definiert wird, die nichtrelativistisch sind (wobei die entsprechenden kinetischen Energien sogar klein gegen die Mesonmasse sind), so dass also nach den obigen Überlegungen die Kopplungskonstante in diesem ganzen Energiebereich gar nicht von den Impulsen des Nukleons abhängt.

Damit wird also (100) gemäss (106)

$$< \vec{p}_j\,'; s' | T^j | \vec{p}_j, q; s > = Z < \vec{p}_j\,'; s' | V_q^j | \vec{p}_j; s > = < s' | M_q^j | s > \delta(\vec{p}_j\,' - \vec{p}_j - \vec{q}) \tag{110}$$

mit (vgl. (6))

$$M_q^j = \frac{i}{\sqrt{V}} \frac{\sqrt{4\pi}\, f}{m} \tau_s^j \, \vec{\sigma}^{\,j} \vec{q} \, v_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \tag{111}$$

wo $|s>$ den Spin- und Isotopenspin-Zustand des Zwei-Nukleonen-Systems bezeichnet und f die renormierte Kopplungskonstante (108) ist. (96) wird dann über (99) und (110)

$$< p' | T | p, q > = \delta(\vec{p}\,' - \vec{p} - \vec{q}) \left\{ \sum_j < s' | M_q^j | s > F^j_{p_r' p_r} \right\} \tag{112}$$

mit den Formfaktoren

$$F^j_{p_r' p_r} = \int d\vec{x}_r \, \chi^*_{p_r'}(\vec{x}_r) e^{\pm i \frac{\vec{q}\vec{x}_r}{2}} \chi_{p_r}(\vec{x}_r) \qquad \text{für} \quad j = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \tag{113}$$

wo gemäss

$$\psi_p(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \vec{p} \vec{x}_c} \chi_{p_r}(\vec{x}_r)$$

$$\vec{x}_c = \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \qquad \vec{x}_r = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \tag{114}$$

Schwerpunkts- und Relativbewegung absepariert wurden. Die Approximation (112) ist in[1,3] bei der Berechnung des Beitrags des nichtbeobachtbaren Bereichs in den Dispersionsbeziehungen verwandt worden.

Entsprechend lässt sich die T-Matrix für den Streuprozess in einer zu (99) analogen Form schreiben

$$\begin{aligned}\langle p',q'|T|p,q\rangle = \int d\vec{p}_1{}' d\vec{p}_2{}' g^*_{p'}(\vec{p}_1{}',\vec{p}_2{}')\{&\langle \vec{p}_1{}',q';s'|T^1|\vec{p}_1,q;s\rangle \delta(\vec{p}_2{}'-\vec{p}_2) \\ &+\langle \vec{p}_2{}',q';s'|T^2|\vec{p}_2,q;s\rangle \delta(\vec{p}_1{}'-\vec{p}_1)\} g_p(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\, d\vec{p}_1 d\vec{p}_2\end{aligned} \tag{115}$$

wo analog (100)

$$\langle \vec{p}_j{}',q';s'|T^j|\vec{p}_j,q;s\rangle = \langle \vec{p}_j{}';s'|a_{q'}\,U^j(+\infty,0)\,V_q^j\,U^j(0,+\infty)|\vec{p}_j;s\rangle \tag{116}$$

die entsprechenden T-Matrizen für die Ein-Nukleon-Systeme sind, deren Spin- und Isotopenspin-Zustände sich aber wiederum auf das Zwei-Nukleonen-System beziehen, und für die sich Ausdrücke der Form (76) herleiten lassen (Chew-Low-Gleichungen für den Fall eines bewegten Nukleons).

In der gleichen Weise wie im Falle der Absorption begründen wir die Unabhängigkeit der T^j -Matrizen von den Nukleonenimpulsen für den anfänglichen Deuteron-Grundzustand (wo die enthaltenen Impulse ja nichtrelativistisch sind). Wir können also in (116) $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0$ setzen. Bezüglich des Endzustandes, wo die Dinge nicht so einfach liegen, haben wir zwischen elastischer und unelastischer Streuung zu unterscheiden. Allgemein gilt für diesen

$$U^j(0,+\infty)\,a^*_{q'}\,\Psi^0_{p_j} = \left\{1 + \frac{P}{E_{p_j'}+\omega_{q'}-H^j}(H_I^j-\Gamma_j) - i\pi\,\delta(E_{p_j'}+\omega_q-H^j)(H_I^j-\Gamma_j)\right\} a^*_{q'}\,\Psi^0_{p_j} \tag{117}$$

worin nur auf die beiden ersten Terme die obigen Überlegungen bezüglich der Unabhängigkeit von den Nukleonenimpulsen verallgemeinert werden können, während der dritte Term - der wegen der Instabilität des betrachteten Zustandes nicht verschwindet - vom Nukleonenimpuls abhängen wird. Sofern wir aber zeigen können, dass nur Werte

$$\frac{\vec{p}_j{}'^2}{2M} \ll \omega_{q'} \tag{118}$$

wichtig sind, so wird nach (117) die Abhängigkeit des Operators $U^j(0,+\infty)$ vom Nukleonenimpuls auch für den Endzustand unwesentlich sein und die T^j -Matrizen in (115) können vor die Integrale gezogen werden.

Wir zeigen (118) zunächst für den Fall der elastischen Streuung. Dazu beachten wir, dass die Beiträge in (115) für grosse $\vec{p}_j{}'$ klein sind, weil jeweils $\vec{p}_2{}' = \vec{p}_2 \approx 0$ bzw. $\vec{p}_1{}' = \vec{p}_1 \approx 0$ gilt und $g_{p'}(\vec{p}_1{}',\vec{p}_2{}')$ als Fourier-Transformierte des Deuteron-Grundzustandes für grössere $(\vec{p}_1{}'-\vec{p}_2{}')$ verschwindet, d.h. es wird praktisch (118) gelten.

Im Falle der unelastischen Streuung beachten wir, dass für grössere $\vec{p}_j{}'$, wo (118) nicht mehr gilt, die Beziehung

$$g_{p'}(\vec{p}_1{}',\vec{p}_2{}') \sim \delta\,[\vec{p}_1{}'-\vec{p}_2{}'-(\vec{p}_1{}''-\vec{p}_2{}'')] \qquad (119)$$

richtig ist (etwa für eine Energie der Relativbewegung oberhalb 10 MeV, s. auch[5]), da die Wellenfunktion des Endzustandes dann durch ebene Wellen approximiert werden kann

$$\psi_{p'}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\, e^{i(\vec{p}_1{}''\vec{x}_1+\vec{p}_2{}''\vec{x}_2)} \qquad (120)$$

(von der notwendigen Symmetrisierung in den Raumkoordinaten abgesehen). Denn dann muss die Energie der Relativbewegung der Nukleonen wie im Falle der elastischen Streuung hoch sein, weil auch hier jeweils $\vec{p}_2{}'-\vec{p}_2=0$ bzw. $\vec{p}_1{}'=\vec{p}_1\approx 0$ gilt. In diesem Falle ist also die Integration über die $\vec{p}_j{}'$ für solche Werte, für die nicht mehr (118) gilt, durch δ- Funktionen festgelegt, so dass insgesamt die T^j -Matrizen vor die Integrale gezogen werden können.

Damit folgt aus (115)

$$\langle p',q'|T|p,q\rangle = \delta(\vec{p}\,'+\vec{q}\,'-\vec{p}-\vec{q})\left\{\sum_j \langle s'|M^j_{q'q,\vec{p}_j{}'}|s\rangle G^j_{p_r'p_r}\right\} \qquad (121)$$

mit den Formfaktoren (vgl. 112))

$$G^j_{p_r'p_r} = \int d\vec{x}_r\, \chi^*_{p_r'}(\vec{x}_r)\, e^{\pm i\frac{1}{2}(\vec{q}-\vec{q}\,')\vec{x}_r}\chi_{p_r}(\vec{x}_r) \qquad \text{für } j=\begin{cases}1\\2\end{cases} \qquad (122)$$

wo analog (110)

$$\langle \vec{p}_j{}',q';s'|T^j|\vec{p}_j,q;s\rangle = \langle s'|M^j_{q'q,\vec{p}_j{}'}|s\rangle\,\delta(\vec{p}_j{}'+\vec{q}\,'-\vec{p}_j-\vec{q}) \qquad (123)$$

In dem von uns benutzten Laboratoriumssystem ist sowohl in (121) $\vec{p}=0$ als auch in (123) $\vec{p}_j = 0$ zu setzen, d.h. die Streuamplitude für die Streuung von π-Mesonen an Deuteronen im Laboratoriumssystem ist durch die für Streuung von π -Mesonen an freien Nukleonen im Laboratoriumssystem ausgedrückt worden. (121) entspricht genau der Beziehung, die in[2] und[3] für die Berechung der totalen Wirkungsquerschnitte im beobachtbaren Bereich verwandt wurde, wo auch der Näherungscharakter diskutiert wurde.

Wir bemerken, dass der Beitrag des Absorptionsprozesses von π -Mesonen an Deuteronen in (121) im beobachtbaren Bereich verschwindet, da freie Nukleonen auf Grund der Erhaltungssätze nicht π -Mesonen absorbieren oder emittieren können, während im nichtbeobachtbaren Bereich ein reiner Polbeitrag auftritt. Dagegen liefert der strenge Ausdruck (76) einen (experimentell allerdings nur kleinen) Absorptionsbeitrag im beobachtbaren Bereich, während im nichtbeobachtbaren Gebiet ein kontinuierlicher Beitrag auftritt. Diese Verhältnisse sind im Rahmen der Theorie der Dispersionsbeziehungen in[1,2,3] im einzelnen untersucht worden.

5. Schlussbemerkung

Die obigen Untersuchungen zeigten, dass es möglich ist, die Chewsche Impulsnäherung auf den feldtheoretischen Fall in durchsichtiger Weise zu verallgemeinern. Hierbei wurde der Hamilton-Formalismus für zwei nichtrelativistisch bewegte Nukleonen zugrunde gelegt, die in pseudovektorieller Wechselwirkung mit dem π -Mesonfeld stehen, für das die übliche Abschneidung vorausgesetzt wurde. Die höheren Näherungen der Impulsnäherung entsprechen auch hier der Potential- und Vielfachstreukorrektur, wobei durch diese auch der Absorptionseffekt korrigiert wird. Die Verallgemeinerung auf den Fall von mehr als zwei Nukleonen und anderer Kopplungsarten ist offensichtlich und sollte auch - bei geeigneten Modifikationen - auf den relativistischen Fall möglich sein. Bei unserer Formulierung wurde der zeitabhängige Streuformalismus gewählt, in dem die Anfangs- und Endzustände die Situation der nackten Teilchen beschreiben. Die nackten Zustände des Zwei-Nukleonen-Systems bildeten die Projektionen der entsprechenden reellen Zustände auf das Mesonvakuum. Das führte zwangsläufig zur Einführung eines Feldenergieoperators, der Selbstenergie und Wechselwirkung der Nukleonen beschreibt und mit dessen Hilfe sich explizit die Schwierigkeiten beheben liessen, die sonst der Formulierung einer Feldtheorie mit gebundenen Zuständen im Wege stehen.

Die Anwendung der Ergebnisse dieser Untersuchungen ist bereits in[1,2,3] bei der Aufstellung und Auswertung der Dispersionsbeziehungen für die elastische Vorwärtsstreuung von π -Mesonen an Deuteronen gegeben worden. Bei der expliziten Berechnung des Beitrags des nichtbeobachtbaren Bereichs, wo die Übergangsmatrix für die Absorption des einfallenden π -Mesons auftritt, wurde die Beziehung (112) in Verbindung mit (111) verwandt, wobei die renormierte Kopplungskonstante im ganzen in Frage kommenden nichtrelativistischen Bereich der Nukleonenbewegung wirklich als konstant und in Übereinstimmung mit der Goldbergerschen Kopplungskonstante vorausgesetzt werden konnte. Die Matrixelemente des Stromes mussten wegen der auftretenden Divergenzen explizit in den nichtbeobachtbaren Bereich analytisch fortgesetzt werden, wozu genäherte Wellenfunktionen des Zwei-Nukleonen-Systems verwandt wurden, was anschliessend gerechtfertigt werden konnte. Die Dispersionsbeziehungen waren in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Impulsnäherung, gemäss derer für die Streuamplituden im beobachtbaren Bereich die Beziehung (121) benutzt werden konnte. Aus der Dispersionsbeziehung für Spinflip-Streuung, wo der Beitrag des nichtbeobachtbaren Bereichs hinreichend gross ist, folgte insbesonders ein Wert für die Kopplungskonstante, der nur um weniger als 10% von demjenigen abweicht, der sich aus der entsprechenden Dispersionsbeziehung für π -Meson-Streuung an freien Nukleonen ergibt. Diese Untersuchungen machen es sehr wahrscheinlich, dass die Theorie der Dispersionsbeziehungen nicht an die Voraussetzung der Elementarteilchen-Konzeption gebunden ist, sondern eine natürliche Ausdehnung auf den Fall der gebundenen Zustände erlaubt.

Wir machen noch folgende wichtige Anmerkung im Hinblick auf das in[1,2,3] verwandte Massenspektrum der intermediären Zustände. Von Nambu[16] wurde auf der "1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN" die Frage aufgeworfen, ob bei der Streuamplitude für π -Meson-Deuteron-Streuung nicht ähnliche Verhältnisse wie beim Deuteron-Formfaktor vorliegen, wo sich störungstheoretisch eine (physikalisch vernünftige) Abweichung des Massenspektrums der intermediären Zustände vom normalen Spektrum ergibt (und zwar liegt der störungstheoretische Schwellenwert tiefer als der normale). In unserem Falle würde das besagen, dass unser Massenspektrum nicht - wie vorausgesetzt - bei $(2M)^2$ beginnt (zwei ruhende Nukleonen im intermediären Zustand), sondern störungstheoretisch einen etwas tieferen Schwellenwert hat. Inzwischen ist von Karplus, Sommerfield und Wichmann[17] und Nambu[18] gezeigt worden, dass störungstheoretisch der Schwellenwert bei $(2M)^2 - 0{,}002\ M^2$ liegt (was einer Verschiebung um 0,61 MeV unterhalb der normalen Schwelle entspricht), so dass die Abweichung also praktisch ganz unwesentlich ist, denn die Integration über den nichtbeobachtbaren Bereich geht bis zu einer Energie von 140 MeV.

Ich habe Herrn Dr. Nambu für eine Diskussion des zuletzt erörterten Problems und ihm und den Herren Dr. Oehme, Dr. Karplus, Dr. Sommerfield und Dr. Wichmann für die Zusendung von damit in Zusammenhang stehenden Manuskripten bzw. Preprints sehr zu danken.

Literatur

1) F. Kaschluhn, Zs. f. Naturforsch. 13a, 183 (1958).

2) F. Kaschluhn, Nuclear Physics 8, 303 (1958).

3) F. Kaschluhn, Nuclear Physics 9, 347 (1958/59)

4) Chew-Vortrag in "Proceedings of the 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN".

5) G.F. Chew, Phys. Rev. 80, 196 (1950).

6) G.F. Chew, G.C. Wick, Phys. Rev. 85, 636 (1952).

7) G.F. Chew, M.L. Goldberger, Phys.Rev. 87, 778 (1952).

8) N.N. Bogolubov, B.V. Medvedev, M.K. Polivanov, Probleme der Theorie der Dispersionsbeziehungen, Gostekhisdat Moskau (1958), gekürzte deutsche Übersetzung in Fortschr.d. Phys. 6, 169 (1958).

9). F. Kaschluhn, Nuovo Cimento (im Druck), Preprint des Vereinigten Instituts für Kernforschung.

10) G.C. Wick, Rev. Mod. Phys. 27, 339 (1955).

11) M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, Phys. Rev. 91, 398 (1953).
12) M.L. Goldberger, Phys.Rev. 99, 979 (1955).
13) G.F. Chew, F.E. Low, Phys. Rev. 101, 1570 (1956).
14) B.L. Ioffe, I.Ya. Pomeranchuk, A.P. Rudik, Exp. Theor. Phys. USSR, 4, 712 (1956).
15) D.B. Lichtenberg, Phys. Rev. 100, 303 (1955).
16) Diskussion zum Goldberger-Vortrag in "Proceedings of the 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN".
17) R. Karplus, C.M. Sommerfield, E.H. Wichmann, Preprint.
18) Y.Nambu, Preprint.

Received by Publishing Department on March 3I, I959.