ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-311

Л.Г.Заставенко

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ

ЖЭТФ, 1959, т37, в5, с 1319-1323.

Дубна, 1959 год

P-311

Л.Г.Заставенко

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ

А н н о т а ц и я

Разработан метод вычисления фазовых объемов для двух, трех, четырех и пяти частиц. Погрешность метода возрастает с ростом числа частиц n и при $n=5$, по-видимому, не превосходит 5%.

1. Введение

Фазовым объемом называется величина

$$\rho(E, M_1, M_2, \ldots M_n) = \int d^3p_1 \int d^3p_2 \ldots \int d^3p_n \, \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n) \cdot \qquad /1/$$

$$\cdot \, \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{M_i^2 + p_i^2} - E\right),$$

являющаяся функцией полной энергии частиц E и их масс M_i.

Знание фазовых объемов необходимо для статистической теории Ферми, поэтому методы их вычисления рассматриваются в целом ряде работ.

В [1] вычислены фазовые объемы для случая, когда одни частицы являются нерелятивистскими, другие – ультрарелятивистскими, причем для последних не учитывается сохранение импульса.

В работе [2] те же самые фазовые объемы вычислены с учетом сохранения полного импульса.

В работах [3], [4] дано выражение для фазового объема, когда все частицы – ультрарелятивистские /с учетом сохранения их импульса/.

В работе [4] показано, что фазовый объем /1/ может быть представлен в виде

$$\rho = \frac{4\pi (2\pi^2)^n \prod_{\alpha=1}^{n} M_\alpha^2}{(2\pi)^4} \cdot \int d\lambda \, e^{i\lambda E} \lambda^n \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 d\sigma \, \frac{\prod_{\beta=1}^{n} H_2^{(1)}\left[-M_\beta \sqrt{\lambda^2 - \sigma^2}\right]}{[\sigma^2 - \lambda^2]^n}. \qquad /2/$$

В работе [2] с учетом /2/ получено разложение ρ по степеням, годное в принципе для вычисления любого фазового объема, но неудобное из-за сложности.

В работе [5] с использованием метода перевала получен простой метод вычисления фазовых объемов, годный при всех энергиях E.

Нами дается другой метод вычисления фазовых объемов, более точный и удобный при малом числе n участвующих частиц.

II. Предлагаемый метод

Наш метод заключается в том, чтобы, вычислив функции

$$\rho(E\ M_1\ M_2 \dots M_n)$$

при некоторых значениях масс M_α, воспроизвести затем всю функцию от переменных $M_1\ M_2 \dots M_n$ при помощи своего рода интерполяции.

Именно, мы вычисляем по точным формулам, данным в [2], а также полученным нами /см. приложение/, функции

$$\rho(E, 1, 0, 0, \dots 0) \equiv {}_n\rho_1(E)$$

$$\rho(E, 1/2, 1/2, 0, \dots 0) \equiv {}_n\rho_2(E)$$

$$\rho(E, 1/3, 1/3, 1/3, 0, \dots 0) = {}_n\rho_3(E)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho(E, 1/n, 1/n, \dots 1/n) = {}_n\rho_n(E).$$

Далее, очевидно, возникает необходимость найти функции ${}_nC_K(M_1, M_2, \dots M_n)$ $K = 1, 2, \dots n$, симметричные относительно своих аргументов и такие, что

$${}_nC_K(1, 0, 0, \dots 0) = 0$$

$${}_nC_K(1/2, 1/2, 0, \dots 0,) = 0$$

и т.д.

и только $\quad {}_nC_K(1/K, 1/K, \dots 1/K, 0, 0, \dots 0) = 1$

Простейшими системами функций, удовлетворяющими этим условиям, являются:

$${}_3C_1 = M_1 M_2 M_3 \left(\sum_{\alpha > \beta} 1/M_\alpha M_\beta - 4 \sum 1/M_\alpha + 9 \right)$$

$$
\begin{aligned}
{}_3C_1 &= M_1 M_2 M_3 \left(\sum_{\alpha>\beta} \frac{1}{M_\alpha M_\beta} - 4 \sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha} + 9 \right) \\
{}_2C_2 \, (M_1 M_2) &= 2^2 \cdot M_1 \cdot M_2 \\
{}_2C_1 \, (M_1 M_2) &= 1^1 \cdot M_1 \cdot M_2 \left(\sum_{\alpha=1}^{2} 1/M_\alpha - 4 \right)
\end{aligned}
\qquad /4.1/
$$

$$
\begin{aligned}
{}_3C_3 &= 3^3 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \\
{}_3C_2 &= 2^2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} 1/M_\alpha - 9 \right)
\end{aligned}
\qquad /4.2/
$$

$$
\begin{aligned}
{}_4C_4 &= 4^4 \left(\prod_{\alpha=1}^{4} M_\alpha \right) \\
{}_4C_3 &= 3^3 \left(\prod_{\alpha=1}^{4} M_\alpha \right) \left(\sum_\alpha 1/M_\alpha - 16 \right) \\
{}_4C_2 &= 2^2 \left(\prod M_\alpha \right) \left(\sum_{\alpha>\beta} 1/M_\alpha M_\beta - 9 \sum_\alpha 1/M_\alpha + 48 \right) \\
{}_4C_1 &= \left(\prod M_\alpha \right) \left(\sum_{\alpha>\beta>\gamma} 1/M_\alpha M_\beta M_\gamma - 4 \sum_{\alpha>\beta} 1/M_\alpha M_\beta + \right. \\
&\quad \left. + 9 \sum_\alpha 1/M_\alpha - 16 \right)
\end{aligned}
\qquad /4.3/
$$

$$
\begin{aligned}
{}_5C_5 &= 5^5 \left(\prod_{\alpha=1}^{5} M_\alpha \right) \\
{}_5C_4 &= 4^4 \left(\prod M_\alpha \right) \left(\sum_\alpha 1/M_\alpha - 25 \right) \\
{}_5C_3 &= 3^3 \left(\prod M_\alpha \right) \left(\sum_{\alpha>\beta} 1/M_\alpha M_\beta - 16 \sum_\alpha 1/M_\alpha + 150 \right) \\
{}_5C_2 &= 2^2 \left(\prod M_\alpha \right) \left(\sum_{\alpha>\beta>\gamma} 1/M_\alpha M_\beta M_\gamma - 9 \sum_{\alpha>\beta} 1/M_\alpha M_\beta + \right. \\
&\quad \left. + 48 \sum_\alpha 1/M_\alpha - 200 \right).
\end{aligned}
\qquad /4.4/
$$

$$
{}_5C_1 = \left(\Pi M_\alpha\right)\Big(\sum_{\alpha>\beta>\gamma>\delta} 1/M_\alpha M_\beta M_\gamma M_\delta - 4\sum_{\alpha>\beta>\gamma>} 1/M_\alpha M_\beta M_\gamma +
$$

$$
+ 9\sum_{\alpha>\beta} 1/M_\alpha M_\beta - 16\sum_{\alpha} 1/M_\alpha + 25\Big). \qquad /4.4/
$$

Нетрудно видеть, что выбранные нами функции удовлетворяют соотношениям:

$$
\sum_{K=1}^{n} {}_nC_k \left(M_1, M_2, \dots M_n\right) = 1 . \qquad /5/
$$

Здесь мы считаем $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} M_\alpha = 1$, что означает соответствующий выбор шкалы энергии.

В качестве апроксимации фазового объема $\rho\,(E, M_1, M_2, \dots M_n)$ мы берем функцию $\tilde{\rho}\,(E, M_1, M_2, \dots M_n)$, определенную так:

$$
\tilde{\rho}\left(E, M_1, M_2, \dots M_n\right) = \left\{ \sum_{K=1}^{n} {}_nC_k \left(M_1, M_2, \dots M_n\right) \left[{}_n\rho_K(E)\right]^{2/3} \right\}^{3/2} \qquad /6/
$$

В силу /5/ и того, что все функции ${}_n\rho_K(E)$, $K = 1, 2, \dots n$ при $E \to \infty$ становятся одинаковыми, $\tilde{\rho}$ в ультра-релятивистском случае перестает зависеть от масс, как и полагается фазовому объему. Функции ${}_n\rho_n(E)$ при $E \to 1$ становятся больше всех остальных; поэтому, учитывая /4/, можно видеть, что функция $\tilde{\rho}$ в нерелятивистском случае имеет правильную зависимость от масс частиц $\sim \prod\limits_{\alpha=1}^{n} (M_\alpha)^{3/2}$ [1] . Аналогичным образом обеспечивается правильная зависимость нерелятивистского предела $\tilde{\rho}$ от масс и в том случае, когда массы частиц равны нулю. Таким образом, помимо базисных функций интерполяция подкрепляется у нас подгонкой $\tilde{\rho}$ к известным нерелятивистскому и ультрарелятивистскому пределам.

С помощью разложений, данных в работе [2] и полученных нами, мы подсчитали таблицы функций ${}_nf_K(E)$, которые связаны с ${}_n\rho_K(E)$

соотношением:

$$ {}_n\rho_k(E) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{(4n-4)!\ E^{3n-4}}{(3n-4)!\,(2n-1)!\,(2n-2)!}\ {}_nf_k(E) \qquad /7/ $$

(см. таблицу № 1).

Нашей окончательной формулой является:

$$ \tilde{\rho}(E, m_1, m_2, \dots m_n) \equiv A_n E^{3n-4} \left\{ \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k(M_1, M_2, \dots M_n) [{}_nf_k(X)]^{2/3} \right\}^{3/2} $$

Здесь коэффициенты ${}_nC_k(M_1, M_2, \dots M_n)$ определены формулой /4/, $M_\alpha = m_\alpha / (\Sigma m_i)$, функции $[{}_nf_k(x)]^{2/3}$ находятся из таблицы I, $X = E/(\Sigma m_i)$; A_n - это численный множитель, входящий в формулу /7/.

Для оценки погрешности метода нами проведено сравнение $\tilde{\rho}(E, M_1, M_2, \dots)$, вычисленного по формуле /6/, с точным значением функции $\rho(E, M_1, M_2 \dots)$, найденным по формулам [2] и Приложения для некоторых значений E и M_α для двух, трех и пяти частиц, /см. таблицу II/.

Сравнение дает основания считать, что если массы любых двух из участвующих частиц не различаются более чем в 10 раз, то наш метод, при числе частиц до пяти включительно, дает погрешность не более 5% /при $n = 2$ максимальная обнаруженная нами погрешность метода - 2,2%; она достигается, когда масса одной из частиц m_1 стремится к нулю, а полная энергия стремится к массе покоя m_2 второй частицы так, что $E \sim m_2 \approx 2m_1$) .

III. Пример

В качестве примера применения метода подсчитаем фазовый объем системы нуклон-π- мезон при двух значениях кинетической энергии $T_1 = 100$ Mev и $T_2 = 200$ Mev . Берем следующие значения масс:

$m_\pi = 140$ Mev ; $m_N = 940$ Mev ; $M = m_\pi + m_N = 1080$ Mev

В первом случае $E_1 = T_1 + M = 1180$ Mev; $x_1 = E_1/M = 1{,}0925$

во втором случае $E_2 = 1280$ Mev ; $x_2 = 1{,}185$.

Далее $\log_{10}(x_1-1)=\bar{2},966$; $\log_{10}(x_2-1)=\bar{1},267$.

По значениям $\log_{10}(x-1)$ из таблицы I находим:

$$2/3\,\log_{10}\left[{}_2f_1(x_1)\right]=\bar{1},122 \qquad 2/3\,\log_{10}\left[{}_2f_2(x_1)\right]=\bar{1},736$$

$$2/3\,\log_{10}\left[{}_2f_1(x_2)\right]=\bar{1},435 \qquad 2/3\,\log_{10}\left[{}_2f_2(x_2)\right]=\bar{1},819$$

$$\left[{}_2f_1(x_1)\right]^{2/3}=0,1325 \qquad \left[{}_2f_2(x_1)\right]^{2/3}=0,545$$

$$\left[{}_2f_1(x_2)\right]^{2/3}=0,272 \qquad \left[{}_2f_2(x_2)\right]^{2/3}=0,659 .$$

Теперь подсчитаем коэффициент ${}_2C_2$ по формуле /4.1/ при $M_1=\frac{m_\pi}{M}=$ $=0,130$; $M_2=0,870$; находим ${}_2C_2=0,451$; ${}_2C_1$ проще получить из /5/: ${}_2C_1=1-{}_2C_2=0,549$.

После этого по формулам /6/ и /7/ найдем

$$\tilde{\rho}(E,m_\pi,m_N)=\pi/2\,E^2\left[{}_2C_1\left({}_2f_1\right)^{2/3}+{}_2C_2\left({}_2f_2\right)^{2/3}\right]^{3/2}.$$

Отсюда

$$\tilde{\rho}(E_1,m_\pi,m_N)=3,95\cdot10^{11}\,(Mev)^2\ ?$$

$$\tilde{\rho}(E_2,m_\pi,m_N)=7,8\cdot10^{11}\,(Mev)^2.$$

В заключение выражаю благодарность проф. М.А. Маркову, Л.А.Чудову, В.И.Огиевецкому и Г.И.Копылову за оказанную поддержку и ценную консультацию.

Автор признателен также коллективу расчетного бюро, руководимому Г.И.Копыловым, за выполнение численных расчетов и В.М.Максименко - за предоставленную возможность ознакомиться с работой [2] до ее опубликования.

Приложение

Для вычисления функций ${}_n f_k(E)$ при $E-1 \gtrsim 1$ были использованы разложения, полученные в работе [2]. При $E-1 \lesssim 1$ эти разложения становятся неудобными, в связи с чем нам пришлось получить разложение функций $\rho(E, M_1, M_2 \dots)$ по степеням $E-1$. Для этого, в свою очередь, пришлось получить представление фазового объема ρ в виде однократного контурного интеграла.

А. Преобразование интеграла /2/.

В работе [2] выражение /2/ представлено в виде:

А.1.
$$\rho(E, M_\alpha) = \frac{\pi^{n-3}}{2^{n+2}} \cdot \left(\prod_{\alpha=1}^{n} M_\alpha^2\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-i\varepsilon}^{i\varepsilon} dy \cdot e^{i(x+y)E} \cdot$$
$$\cdot \frac{(x-y)^2}{(xy)^n}\, i^n (x+y)^n \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} \left\{ H_2^{(2)}\left[2M_\alpha \sqrt{xy}\right] \pi/i \right\}.$$

Выражение А.1. можно записать так: /обозначаем $\nu_\alpha = M_\alpha / E$/

$$\rho = \frac{\pi^{n-3}}{2^{n+2}} \left(d/dE\right)^n \cdot E^{4n-4} \prod_\alpha \nu_\alpha^2 \cdot \int dx \int dy \cdot e^{i(x+y)} \cdot$$

А.2.
$$\cdot \frac{(x-y)^2}{(xy)^n} \prod_\alpha \left\{ H_2^{(2)}\left(2\nu_\alpha \sqrt{xy}\right) \cdot \pi/i \right\}.$$

Подставим сюда

$$x = t\cdot\tau$$
$$y = t/\tau.$$

Получаем

$$J \equiv \int dx \int dy \frac{e^{i(x+y)}}{(xy)^n} (x-y)^2 \prod_\alpha \left\{ \pi/i\, H_2^{(2)}\left(2\nu_\alpha \sqrt{xy}\right)\right\} =$$
$$= 2 \cdot \int dt \int d\tau\ t/\tau \cdot \frac{e^{it(\tau+1/\tau)}}{t^{2n}} \cdot t^2 (\tau - 1/\tau)^2 \prod_\alpha \left\{ \pi/i\, H_2^{(2)}(2\nu_\alpha t)\right\};$$

$$\int d\tau \cdot e^{it(\tau+1/\tau)} (\tau - 1/\tau)^2\, 1/\tau = -\int d\alpha\, e^{t(\alpha - 1/\alpha)} \left(\alpha + 2/\alpha + 1/\alpha^3\right) =$$

$$= -2\pi i \cdot 2 \cdot \left[J_2(2t) + J_0(2t) \right] = 2 \cdot {}^{4\pi}/i \; J_1(2t) \cdot {}^1/t \,.$$

Подставив это в /A.2/, получаем окончательную формулу:

$$\rho(E, M_1, M_2, \ldots) = \frac{\pi^{n-3}}{2^{n+2}} \left({}^d/{}_{dE} \right)^n E^{3n-4} \, U \,, \qquad /A.3/$$

где

$$U = {}^{8\pi}/{}_i \int\limits_{-\infty - i\varepsilon}^{+\infty - i\varepsilon} dt \, \frac{J_1(2t)}{t^{2n-2}} \prod_{\alpha=1}^{n} \left\{ {}^{\pi}/{}_i \, H_2^{(2)}(2\nu_\alpha t) \, \nu_\alpha^2 \right\} =$$

$$= {}^{8\pi}/{}_i \; 2^{2n-3} \int dt \, \frac{J_1(t)}{t^{2n-2}} \prod_{\alpha=1}^{n} \left\{ {}^{\pi}/{}_i \, H_2^{(2)}(\nu_\alpha t) \, \nu_\alpha^2 \right\}.$$

B. Разложение функций $\rho(E, M_1, M_2 \ldots)$ по степеням $E-1$.

Подставим в /A.3/

$${}^{\pi}/{}_i \, H_2^{(2)}(\nu t) = \left({}^{2\pi}/{}_{\nu t} \right)^{1/2} e^{\, i \left({}^{3\pi}/{}_4 - \nu t \right)} \, {}_2F_0 \left({}^5/{}_2, -{}^3/{}_2 ; -{}^1/{}_{2i\nu t} \right),$$

где

$${}_2F_0 \left({}^5/{}_2, -{}^3/{}_2 ; X \right) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left({}^5/{}_2 + K \right) \Gamma\left(-{}^3/{}_2 + K \right)}{\Gamma\left({}^5/{}_2 \right) \Gamma\left(-{}^3/{}_2 \right) K!} X^K \quad (\text{см. } [6]). \qquad /B.1/$$

Получаем

$$U = {}^{8\pi}/{}_i \cdot 2^{5n/2 - 3} \, \pi^{n/2} \, e^{\, i \, {}^{3\pi}/{}_4 n} \prod_{\alpha=1}^{n} \nu_\alpha^{3/2} \sum_{K_1, K_2 \ldots K_n = 0}^{\infty} \frac{e^{\, i \frac{\pi K}{2}}}{2^K}$$

$$\frac{a_{K_1} a_{K_2} \ldots a_{K_n}}{\nu_1^{K_1} \nu_2^{K_2} \ldots \nu_n^{K_n}} \int\limits_{-\infty - i\varepsilon}^{+\infty - i\varepsilon} dt \; t^{-\frac{5n}{2} - K + 2} \, e^{-i\nu t} \, J_1(t) \,, \qquad /B.2/$$

здесь $\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \nu_\alpha$; $K = \sum_{\alpha=1}^{n} K_\alpha$

a_K – коэффициент при x^K в /B.1/.

Интеграл в /B.2/ вычисляется аналогично [6] (стр.421); с использованием квадратичных тождеств для гипергеометрических функций [7] его можно привести к виду:

$$\int dt\, \mathcal{I}_1(t) e^{-i\nu t} t^{2-K-5n/2} = 2\pi i \cdot 2^{2-K-5n/2} e^{-i\,\pi/2\,(4-K-5n/2)} \cdot$$

$$\left[2(1-\nu)\right]^{5n/2+K-5/2} \frac{F\left(3/2, -1/2;\ 5n/2+K-3/2;\ 1-\nu/2\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(5n/2+K-3/2\right)} . \qquad /B.3/$$

Таким образом: $\mathcal{U} = 2^{5n/2+1/2}\, \pi^{n+3/2}\, e^{i\,\pi/2\,(4n+4)}$

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{n} \nu_\alpha^{3/2}\right) \sum \frac{a_{K_1} a_{K_2} \ldots a_{K_n} (-)^K}{\nu_1^{K_1} \nu_2^{K_2} \ldots \nu_n^{K_n}\, 2^K} \cdot \frac{(1-\nu)^{5n/2+K-5/2}}{\Gamma\left(5n/2+K-3/2\right)} \qquad /B.4/$$

$$ {}_2F_1\left(3/2, -1/2;\ 5n/2+K-3/2;\ 1-\nu/2\right) .$$

Подставим это в /A.3/, заменив ν на $\left(\sum M_\alpha\right)/E \equiv M/E$

$$\rho = (2\pi)^{\frac{3(n-1)}{2}} \left(\frac{d}{dE}\right)^n \frac{\left(\prod M_\alpha^{3/2}\right)}{E^{3/2}} \frac{(E-M)^{5/2\,(n-1)}}{\Gamma\left(5n/2-3/2\right)}$$

$$\sum \frac{a_{K_1} a_{K_2} \ldots a_{K_n} (-)^K}{\nu_1^{K_1} \cdot \nu_2^{K_2} \ldots \nu_n^{K_n}\, 2^K} \cdot \frac{(E-M)^K}{E^K} \cdot \frac{\Gamma\left(5n/2-3/2\right)}{\Gamma\left(5n/2-3/2+K\right)} \qquad /B.5/$$

$$ {}_2F_1\left(3/2, -1/2;\ 5n/2+K-3/2;\ \frac{E-M}{2E}\right) .$$

В случае, когда ℓ из общего числа имеют нулевую массу покоя, в /A.3/ соответствующие функции $V^2 H_2^{(2)}(Vt)$ следует заменить на $4/t^2$; вместо /B.4/ и /B.5/ будем иметь

$$\mathcal{U} = 2^{\frac{5n-\ell+1}{2}} \pi^{\frac{n+3-\ell}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}(4n-4)} \left(\prod_{\alpha=1}^{m} V_\alpha^{3/2}\right)$$

$$\sum \frac{a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m} (-)^k (1-V)^{\frac{5n+3\ell+2k-5}{2}}}{V_1^{k_1} V_2^{k_2} \dots V_m^{k_m} 2^k \Gamma\left(\frac{5n+3\ell+2k-3}{2}\right)} \cdot \qquad /B.6/$$

$${}_2F_1\left(3/2, -1/2; \frac{5n+3\ell+2k-3}{2}; \frac{1-V}{2}\right).$$

$$\rho(E, M_1, \dots M_m, 0, 0 \dots) = 2^{2\ell} (2\pi)^{\frac{3n-\ell-3}{2}} \left(d/dE\right)^n \frac{\left(\prod_{\alpha=1} M_\alpha^{3/2}\right)(E-M)^{\frac{5n+3\ell-5}{2}}}{E^{3/2}\Gamma\left(\frac{5n+3\ell-3}{2}\right)}$$

$$\sum \frac{a_{k_1} \dots a_{k_m} (-)^k (E-M)^k \Gamma\left(\frac{5n+3\ell-3}{2}\right)}{V_1^{k_1} \dots V_m^{k_m} 2^k E^k \Gamma\left(\frac{5n+3\ell-3+2k}{2}\right)} \cdot \qquad /B.7/$$

$${}_2F_1\left(3/2, -1/2; \frac{5n+3\ell-3+2k}{2}; \frac{E-M}{2E}\right),$$

здесь

$$m = n - \ell, \qquad k = \sum_{\alpha=1}^{m} K_\alpha .$$

Чтобы получить формулы для вычисления интересующих нас функций остается выполнить дифференцирования в /B.7/. Определим числа $\varphi_p^{(n)}$ соотношением

$$\left(d/dE\right)^n \frac{(E-M)^{\gamma-1}}{E^{3/2}} {}_2F_1\left(3/2, -1/2; \gamma; \frac{E-M}{2E}\right) =$$

$$= \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-n)}{(1/2+1)(1/2+2)\dots(1/2+n)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(3/2)_p (-1/2-n)_p (E-M)^{\gamma+p-n}}{(\gamma-n)_p \, p! \, 2^p E^{p+3/2}} \varphi_p^{(n)}, \qquad /B.8/$$

здесь $(\alpha)_p \equiv \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)$.

$\varphi_p^{(n)}$ удовлетворяют очевидному соотношению:

$$2p\,\varphi_{p-1}^{(n)} - \left(p-n-\tfrac{3}{2}\right)\varphi_p^{(n)} = \varphi_p^{(n+1)}$$

и соотношению:

$$\varphi_{p+1}^{(n+1)} - \varphi_p^{(n+1)} = (n+1)\,\varphi_p^{(n)},$$

которое весьма удобно для их вычисления.

Подставив /В.8/ в /В.7/ получаем окончательное выражение:

$$\rho\left(E, M_1, M_2, \dots M_m, 0, 0, \dots\right) = 2^{2e}\,(2\pi)^{\frac{3(n-1)-e}{2}}\,\frac{\left(\Pi M_\alpha^{3/2}\right)}{E^{3/2}}\,\frac{(E-M)^{\frac{3(n+e)-5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3(n+e)-3}{2}\right)} \qquad /В.9/$$

$$\sum \frac{(-)^K a_{K_1}\dots a_{K_m}\,(E-M)^K\,\Gamma\left(\frac{3(n+e)-3}{2}\right)}{2^K M_1^{K_1}\dots M_m^{K_m}\;\Gamma\left(\frac{3(n+e)-3}{2}+K\right)}\;F_{neK}\left(\frac{E-M}{2E}\right).$$

Здесь

$$F_{neK}(x) \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_p \left(-\frac{1}{2}-n\right)_p \varphi_p^{(n)}\,x^p}{\left(\frac{3(n+e)-3}{2}+K\right)_p\;p!\;\left(\frac{3}{2}\right)_K}.$$

Базисные функции ${}_n\rho_m(E)$ получаются, если в формуле /В.9/ взять

$$M_1 = M_2 = \dots M_m = 1/m.$$

Составив таблицы чисел ${}_m b_K = \sum_{K_1+K_2+\dots K_m=K} a_{K_1} a_{K_2}\dots a_{K_m}$ и функций $F_{neK}(x)$, мы затем уже могли использовать формулу /В.9/ для вычисления функций ${}_n\rho_m(E)$ при малых значениях параметра Е−1; при больших значениях этого параметра расчет проводился по формулам работы [2], для контроля на каждой кривой ${}_n\rho_m(E)$ одна точка подсчитывалась обоими способами.

Литература

1. E. Fermi Progr. Theoret. Phys. (Japan) 5, 570, 1950.

2. В.М.Максименко, И.Л.Розенталь, ЖЭТФ, 32, 658 1957.

2. I.V. Lepore, R.N. Stuart Phys. Rev. 94, 1724, 1954.

4. И.Л.Розенталь, ЖЭТФ, 28, 118, 1955.

5. G.E.Fialho Phys.Rev. 105, 328, 1957.

6. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, ГИИЛ, Москва, 1949. часть 1 стр.222.

7. Е.Т.Уиттекер, Г.Н.Ватсон. Курс современного анализа ГТТИ, Ленинград–Москва, 1934, часть 11 стр. 83.

Таблица 1

В крайней левой колонке указаны значения $\lg_{10}(x-1)$, в остальных приведены соответствующие значения функций $\frac{2}{3}\log_{10}\left[{}_n f_k(x)\right]$. Два числа, стоящие над колонкой, дают значения n и k соответственно, например, колонка, над которой стоит 4.3 дает значение функции $\frac{2}{3}\log_{10}\left[{}_4 f_3(x)\right]$. Между строк указаны разности для линейной интерполяции.

$\lg(x-1)$	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3
$\bar{2}$ 70	$\bar{2}$ 813	$\bar{1}$ 658	$\bar{4}$ 413	$\bar{3}$ 663	$\bar{2}$ 556
	61	15	153	107	62
75	874	673	566	770	618
	60	15	153	105	62
80	934	688	719	875	680
	58	15	152	104	62
85	992	703	871	979	742
	57	14	150	104	61
90	$\bar{1}$ 049	717	$\bar{3}$ 021	$\bar{2}$ 083	803
	56	14	148	103	60
95	105	731	169	186	863
	55	14	147	100	59
$\bar{1}$ 00	160	745	316	286	922
	54	15	145	98	58
05	214	760	461	384	980
	53	14	141	96	57
10	267	774	602	480	$\bar{1}$ 037
	52	14	139	95	57
15	319	788	741	575	094
	51	14	137	92	56

	2.I		2.2.		3.I		3.2		3.3	
20	$\bar{1}$ 370	49	$\bar{1}$ 802	I3	$\bar{3}$ 878	I35	$\bar{2}$ 667	90	$\bar{1}$ I50	55
25	4I9	46	8I5	I2	$\bar{2}$ 0I3	I3I	757	87	205	53
30	465	45	827	I2	I44	I26	844	85	258	5I
35	5I0	43	839	I2	270	I23	929	82	309	49
40	553	4I	85I	I2	393	I20	$\bar{1}$ 0II	79	358	50
45	594	38	863	I2	5I3	II6	090	75	408	47
50	632	37	875	II	629	II0	I65	72	455	45
55	669	35	886	II	739	I06	237	68	500	43
60	704	32	897	I0	845	I02	305	65	543	4I
65	736	30	907	9	947	96	370	6I	584	39
70	766	28	9I6	8	$\bar{1}$ 043	9I	43I	58	623	37
75	794	25	924	8	I34	86	489	53	660	35
80	8I9	22	932	8	220	80	542	49	695	32
$\bar{1}$ 85	$\bar{1}$ 84I	2I	$\bar{1}$ 940	7	$\bar{1}$ 300	74	$\bar{1}$ 59I	46	$\bar{1}$ 727	30
90	862	I9	947	6	374	69	637	43	757	28
95	88I	I7	953	6	443	63	680	39	785	26
0 00	898	I4	959	5	507	59	7I9	35	8II	23
05	9I2	I3	964	5	566	53	754	32	834	2I
I0	925	II	969	4	6I9	48	786	29	855	20
I5	936	9	973	4	667	44	8I5	25	875	I7
20	945	8	977		7II	39	840	22	892	I5
25	953	8	980	3	750	35	862	20	907	I3
30	96I	6	983		785	3I	882	I8	920	I2
35	967	6	986		8I6	27	900	I6	933	I0

	2.I	2.2.	3.I	3.2	3.3.
40	$\bar{1}$ 973	$\bar{1}$ 988	$\bar{1}$ 843	$\bar{1}$ 9I6	$\bar{1}$ 943
	4	2	24	I3	9
45	977	990	867	929	952
			2I	II	8
50	980	99I	888	949	960
			I9	9	7
55	983	992	92I	957	967
			I5	8	5
60	986	993	957	972	972
			I3	8	5
65	989	994	934	965	977
			II	6	4
70	990		945	97I	98I
			9	6	
75	99I		954	977	984
			8	5	
80	993		962	982	987
			7		
85	995		969	985	990
			5		
90	996		974	987	992
			5		
95	997	999	979	990	993
			4		
I 00			983	992	994
I0			989	994	
20			992		
130					
140					

	4.I	4.2	4.3	4.4.
$\bar{2}$ 70	$\bar{7}$ 920	$\bar{5}$ 380	$\bar{4}$ 534	$\bar{3}$ 448
	249	200	I53	I09
75	$\bar{6}$ I69	580	687	555
	248	200	I52	I09
80	4I7	780	839	664
	246	I98	I52	I08
85	663	978	99I	772
	245	I95	I48	I07
90	908	$\bar{4}$ I73	$\bar{3}$ I39	879
	242	I93	I47	I06
95	$\bar{5}$ I50	366	286	985
	237	I9I	I45	I04

	4.I		4.2		4.3		4.4	
$\bar{I}$ 00	$\bar{5}$ 387	235	$\bar{4}$ 557	I88	$\bar{3}$.43I	I43	$\bar{2}$ 089	I03
05	622	230	745	I84	574	I4I	I92	I00
I0	852	228	929	I80	7I5	I38	292	I00
I5	$\bar{4}$ 080	223	$\bar{3}$ I09	I75	853	I34	392	97
20	303	2I9	284	I74	987	I3I	489	95
25	522	2I5	458	I70	$\bar{2}$ II8	I28	584	94
30	737	209	628	I65	246	I24	678	9I
35	946	204	793	I59	370	I20	769	88
40	$\bar{3}$ I50	I98	952	I52	490	II6	857	86
45	348	I92	$\bar{2}$ I04	I47	606	III	943	83
50	540	I85	25I	I43	7I7	I07	$\bar{I}$ 026	80
55	725	I78	394	I38	824	I02	I06	77
60	903	I72	532	I3I	926	97	I83	73
65	$\bar{2}$ 075	I65	663	I24	$\bar{I}$ 023	92	256	69
70	240	I55	787	II4	II5	86	325	66
75	395	I45	90I	I09	20I	82	39I	6I
80	540	I38	$\bar{I}$ 0I0	I03	283	76	452	57
85	678	I30	II3	95	359	7I	509	54
90	808	I22	208	89	430	66	563	50
95	930	II4	297	82	496	59	6I3	46
0 00	$\bar{I}$ 044	I06	379	74	555	54	659	42
05	I50	99	453	68	609	50	70I	38
I0	249	89	52I	6I	659	45	739	34

	4.I		4.2		4.3		4.4	
I5	338		582		704		773	
		80		55		40		3I
20	4I8		637		744		804	
		73		49		35		27
25	49I		686		779		83I	
		66		44		3I		24
30	557		730		8I0		855	
		60		39		28		2I
35	6I7		769		838		876	
		53		35		25		I9
40	670		804		863		895	
		47		30		2I		I7
45	7I7		834		884		9I2	
		4I		25		I9		I4
50	758		859		903		926	
		37		23		I6		I2
55	795		882		9I9		938	
		32		I9		I3		I0
60	827		90I		932		948	
		25		I7		II		9
65	852		9I8		943		957	
		24		I4		I0		8
70	876		932		953		965	
		2I		II		8		6
75	897		943		96I		97I	
		I6		I0		7		5
80	9I4		953		968		976	
		I5		7		5		4
85	928		960		973		980	
		I2		7		4		
90	940		967		977		983	
		II		6		3		
95	95I		973		980		986	
		9		5				
I 00	960		978		984		988	
I0	973		985		990		993	
20	982		990		994			
30	988							
40	992							

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
$\bar{2}$ 70		$\bar{8}$ 995	$\bar{6}$ 305	$\bar{5}$ 408	$\bar{4}$ 332
		294	248	202	157
75	$\bar{9}$ 734	$\bar{7}$ 289	553	610	489
	343	293	246	200	156
80	$\bar{8}$ 077	582	799	810	645
	340	290	244	198	154
85	417	872	$\bar{5}$ 043	$\bar{4}$ 008	799
	337	2 287	241	195	152
90	754	$\bar{6}$ 159	284	203	951
	334	284	238	192	151
95	$\bar{7}$ 088	443	522	395	$\bar{3}$ 102
	329	281	234	189	148
$\bar{1}$ 00	417	724	756	584	250
	325	277	230	186	146
05	742	$\bar{5}$ 001	986	770	396
	320	272	226	183	144
10	$\bar{6}$ 062	273	$\bar{4}$ 212	953	540
	315	268	222	180	143
15	377	541	434	$\bar{3}$ 133	683
	310	262	218	177	140
20	687	803	652	310	823
	304	257	213	173	137
25	991	$\bar{4}$ 060	865	483	960
	299	251	208	170	135
30	$\bar{5}$ 290	$\bar{3}$11	$\bar{3}$ 073	653	$\bar{2}$ 095
	292	247	203	165	131
35	582	558	276	818	226
	286	240	196	158	127
40	868	798	472	976	353
	278	232	189	152	124
45	$\bar{4}$ 146	$\bar{3}$ 030	661	$\bar{2}$.128	477
	269	223	182	147	118
50	415	253	843	275	595
	260	215	176	142	113
55	675	468	$\bar{2}$ 019	417	708
	251	207	169	136	109
60	926	675	188	553	817
	242	198	160	129	105
65	$\bar{3}$ 168	873	348	682	923
	232	188	152	123	100
70	400	$\bar{2}$ 061	500	805	$\bar{1}$ 023
	221	179	143	115	95
75	621	240	643	920	117
	209	168	134	108	89
80	830	408	777	$\bar{1}$ 028	206
	197	157	125	101	82

	5.I		5.2		5.3		5.4		5.5	
$\bar{I}$ 85	$\bar{2}$ 027	I86	$\bar{2}$ 565	I48	$\bar{2}$ 902	II7	$\bar{I}$ I29	96	$\bar{I}$ 288	76
90	2I3	I75	7I3	I38	$\bar{I}$ 0I9	I09	225	88	364	7I
95	388	I64	85I	I28	I28	I02	3I3	80	435	66
0 00	552	I52	979	II7	230	93	393	73	50I	6I
05	704	I42	$\bar{I}$ 096	I08	323	84	466	67	562	55
I0	846	I30	204	98	407	75	533	6I	6I7	50
I5	976	II9	302	89	482	68	594	55	667	45
20	$\bar{I}$ 095	I08	39I	80	550	6I	649	49	7I2	40
25	203	99	47I	72	6II	55	698	43	752	35
30	302	90	543	64	666	48	74I	38	787	33
35	392	80	607	57	7I5	42	779	34	820	28
40	472	72	664	50	757	37	8I3	29	848	23
45	544	64	7I4	43	794	33	842	24	87I	20
50	608	57	757	37	827	28	866	2I	89I	I8
55	665	49	794	33	855	24	887	I9	909	I5
60	7I4	42	827	28	879	20	906	I5	924	I3
65	756	37	855	24	899	I7	92I	I4	937	I0
70	793	32	879	20	9I6	I4	935	I2	947	9
75	825	28	899	I7	930	I2	947	9	956	7
80	853	24	9I6	I4	942	I0	956	7	963	7
85	877	20	930	I3	952	8	963	7	970	6
90	897	I8	943	II	960	8	970	6	976	4
95	9I5	I5	954	9	968	5	976	4	980	3

	5.I	5.2	5.3	5.4	5.5
I 00	930	963	973	980	983
I0	953	976	982	987	988
20	968	983	987	990	993
30	977				
40	984				

Т а б л и ц а II

В первом столбце указаны значения параметра $\left[\left(\sum M_\alpha\right)/E\right]^2$, в остальных столбцах приведены соответствующие значения отношения $\tilde{\rho}(E, M_1, M_2, \dots)/\rho(E, M_1, M_2)$ для следующих чисел частиц и соотношений их масс:

	Число частиц	соотношение масс
Б	2	I0:I
А	2	99:I
В	3	3:2:I
Г	3	I0:I:I
Д	3	I0:I:0
Е	5	I0:I:I:I:I
Ж	5	I0:I:0:0:0

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
0,99	0,988						
0,97	0,983						
0,90	0,995	0,990	I,00I	I,005	I,005		I,008
0,80		0,987	I,00I	I,0I0	I,007		
0,70		0,989	I,003	I,0II	I,009		
0,60		0,99I	I,002			I,045	I,0I3
0,50		0,992	I,00I	I,0I0	I,007	I,043	I,0I5
0,40		0,994					I,0I5
0,30							I,0I3

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1959 года.