ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-308

В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов

О ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ С НУЛЕВОЙ И НЕНУЛЕВОЙ МАССОЙ ПОКОЯ

ЖЭТФ, 1959, т37, в 2, с 470-476.

Дубна, 1959 год

P - 308

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

О ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ С НУЛЕВОЙ И НЕНУЛЕВОЙ МАССОЙ ПОКОЯ

А н н о т а ц и я

Доказано, что волновые уравнения с ненулевой массой покоя инвариантны относительно 15-параметрической группы преобразований, являющейся представлением конформной группы.

Введение

Уравнения Клейна-Гордона и Дирака инвариантны относительно 10-параметрической группы преобразований, являющейся представлением неоднородной группы Лорентца L_{10}.

В работах Каннингхама [1], Бейтмена [2], Дирака [3], Баба [4], Паули [5], Мак Леннана [6] и других было установлено, что в случае нулевой массы покоя волновые уравнения инвариатны относительно более широкой, 15-параметрической, группы преобразований, которая образует представление конформной группы C_4, включающей L_{10}. Уравнение Дирака для нейтрино, кроме того, инвариантно относительно 4-параметрической группы Паули.

Принято считать, что эти свойства инвариантности присущи только волновым уравнениям с нулевой массой покоя.

Однако, ниже будет показано, что и уравнения Клейна-Гордона и Дирака с ненулевой массой покоя также инвариантны относительно 15-параметрической группы преобразований G_{15}, являющейся представлением конформной группы C_4. Для уравнения Дирака имеется также аналог группы Паули. Операторы всех этих преобразований содержат в качестве параметра массу m и в пределе $m=0$ переходят в известные операторы.

В группе G_{15} для некоторых операторов представления группы Лорентца L_{10} приходится принять отличный от обычного вид. Это приводит к трудности: при лорентцевых вращениях импульс частицы не будет преобразовываться как 4-вектор.

Вывод преобразований для $m \neq 0$, будет существенно опираться на преобразования при $m=0$.

В этой связи в § 1 рассматриваются представления конформной группы для нулевой массы покоя.

В § 3 устанавливается способ вывода соответствующих преобразований для $m \neq 0$.

В следующем параграфе даются инфинитезимальные операторы группы G_{15} для волновых уравнений с $m \neq 0$ и аналог группы Паули.

2. Конформная группа и волновые уравнения с нулевой массой покоя

Как указывалось в введении, доказательству конформной инвариантности волновых уравнений с нулевой массой покоя было посвящено большое количество работ [1 - 6]. В этом параграфе будет дана сводка основных результатов, относящихся к конформной группе и к инвариантности уравнений Клейна-Гордона и Дирака с нулевой массой покоя, частично содержащихся в работах [3 - 8]. 15-параметрическая конформная группа C_4 состоит из группы Лоренца L_{10} /сдвиги и вращения/, преобразования сжатия и 4-х собственно-конформных преобразований /см.первую строку табл. 1 /. Собственно-конформные преобразования представляют собой произведение инверсии в единичном гипершаре $x'_\mu = x_\mu / x^2$, затем сдвига и снова инверсии. Три из них /пространственные/ связаны с переходом в равноускоренную систему отсчета [9-13].

В 3 и 4 строках таблицы 1 приведены законы преобразования для решений уравнений Клейна-Гордона и Дирака с нулевой массой покоя

$$\Box^2 \varphi_0(x) = 0 \qquad /1/$$

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_0(x) = 0 . \qquad /2/$$

Как видно из таблицы 1 даже решение уравнения Клейна-Гордона не является скаляром относительно преобразований сжатия и собственной-конформных.

Функции, преобразующиеся по каким-либо представлениям конформной группы при инфинитезимальных преобразованиях, изменяются по законам [x/]

$$\psi'(x) = (1 + i a_\mu P_\mu)\psi(x) \qquad /3/$$

$$\psi'(x) = (1 + i\omega_{\mu\nu} M_{\mu\nu})\psi(x) \qquad /4/$$

$$\psi'(x) = (1 + \varepsilon I)\psi(x) \qquad /5/$$

$$\psi'(x) = (1 + \alpha_\mu I_\mu)\psi(x), \qquad /6/$$

где P_μ , $M_{\mu\nu}$, I и I_μ - инфинитезимальные операторы преобразований сдвига, вращения, сжатия и собственно-конформных, а a_μ, $\omega_{\mu\nu}$, ε и α_μ соответствующие бесконечно малые параметры преобразований.

Инфинитезимальные операторы конформной группы и ее представлений удовлетворяют следующим соотношениям структуры

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \qquad /7/$$

$$[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = -i(\delta_{\mu\nu} P_\lambda - \delta_{\mu\lambda} P_\nu) \qquad /8/$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = i(\delta_{\mu\lambda} M_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho}) \qquad /9/$$

$$[I_\mu, M_{\nu\lambda}] = -i(\delta_{\mu\nu} I_\lambda - \delta_{\mu\lambda} I_\nu) \qquad /10/$$

$$[I_\mu, I_\nu] = 0 \qquad /11/$$

$$[P_\mu, I] = P_\mu \qquad /12/$$

$$[M_{\mu\nu}, I] = 0 \qquad /13/$$

[x/] В качестве P_μ и $M_{\mu\nu}$ взяты физические операторы импульса и момента, из-за чего появилась мнимая единица i .

Таблица I. Конечные преобразования

	Сдвиги (4 параметр.)	Вращения (6 параметр.)	Сжатие (I параметр)	Собственно конформные преобразов.(4 параметр)[x)]
Преобразование координат	$x'_\mu = x_\mu - a_\mu$	$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$ $(a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda})$	$x'_\mu = \frac{x_\mu}{a}$	$x'_\mu = \frac{x_\mu - \alpha_\mu x^2}{1 - 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2}$
Преобразование скалярной функции	$f'(x_\mu) = f(x_\mu + a_\mu)$	$f'(x_\mu) = f(a^{-1}_{\mu\nu} x_\nu)$	$f'(x_\mu) = f(a x_\mu)$	$f'(x_\mu) = f\left(\frac{x_\mu + \alpha_\mu x^2}{1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2}\right)$
Преобразование решений уравнения Клейна-Гордона с $m = 0$	$\varphi'_0(x_\mu) = \varphi_0(x_\mu + a_\mu)$	$\varphi'_0(x_\mu) = \varphi_0(a^{-1}_{\mu\nu} x_\nu)$	$\varphi'_0(x_\mu) = a\,\varphi_0(a x_\mu)$ [xxx)]	$\varphi'_0(x_\mu) = [1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2]^{-1} \varphi_0\left(\frac{x_\mu + \alpha_\mu x^2}{1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2}\right)$
Преобразование решений уравнения Дирака с $m = 0$	$\psi'_0(x_\mu) = \psi_0(x_\mu + a_\mu)$	$\psi'_0(x_\mu) = S\psi_0(a^{-1}_{\mu\nu} x_\nu)$ [xx)]	$\psi'_0(x_\mu) = a^{3/2} \psi_0(a x_\mu)$	$\psi'_0(x_\mu) = \frac{1 + 2(\alpha x) - (\alpha\gamma)(\gamma x)}{[1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2]^2} \psi_0\left(\frac{x_\mu + \alpha_\mu x^2}{1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2}\right)$

x) $x^2 = x_\mu x_\mu$, $\alpha^2 = \alpha_\mu \alpha_\mu$, $(\alpha x) = \alpha_\mu x_\mu$, $\mu = 1,2,3,4$

xx) S – оператор преобразования дираковского спинора при вращениях.

xxx) Численное значение показателя степени у a при $\varphi_0(ax)$ и $\psi_0(ax)$ диктуется требованием, чтобы φ_0 и ψ_0 преобразовывались по представлению группы C_4 в целом и может быть найдено из соотношения структуры (15).

$$[I_\mu, I] = -I_\mu \qquad /14/$$

$$[P_\mu, I_\nu] = 2(M_{\mu\nu} + i\delta_{\mu\nu} I). \qquad /15/$$

В таблице 2 приведены инфинитезимальные операторы для решений уравнения Клейна-Гордона и Дирака с $m=0$ в x- и p- представлениях $/\psi(p) = (2\pi)^{-2}\int exp(-ipx)\psi(x)\,dx/$.

В то время как операторы $P_\mu, M_{\mu\nu}$ коммутируют с операторами волновых уравнений, соответствующие коммутаторы для операторов I и I_μ равны / в p- представлении/: для уравнения Клейна-Гордона

$$[I, p^2] = -2p^2 \qquad /16/$$

$$[I_\mu, p^2] = 4i\frac{\partial}{\partial p_\mu}p^2, \qquad /17/$$

для уравнения Дирака

$$[I, i\gamma p] = -i\gamma p \qquad /18/$$

$$[I_\mu, i\gamma p] = 2i\frac{\partial}{\partial p_\mu} i\gamma p \quad . \qquad /19/$$

Таким образом, в применении к решениям волновых уравнений эти коммутаторы равны нулю, и поэтому преобразованные функции также будут решениями этих уравнений.

Если ввести вместо I_μ, P_μ и I, операторы

$$M_{\mu 5} = \frac{1}{2}(I_\mu + iP_\mu)\,;\; M_{\mu 6} = \frac{1}{2}(P_\mu + iI_\mu)\,;\; M_{56} = -I \qquad /\mu \neq 5,6/, \qquad /20/$$

то соотношения /7/ - /15/ можно записать в виде соотношений структуры группы вращений в 6-мерном пространстве, т.е. в виде /9/ с μ, ν, λ, ρ = 1,2,3,4,5,6. Конформная группа и инвариантность относительно нее волновых уравнений с массой нуль путем перехода в 6-мерное пространство изучались

Таблица 2. Инфинитезимальные операторы в x - и p - представлениях

Инфинитезимальные операторы / Для преобразования	Сдвигов P_μ	Вращений $M_{\mu\nu}$	Сжатий I	Собственно конформных преобразований I_μ
Скалярной функции	$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$	$\frac{1}{i}\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$	$x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x_\mu}-2x_\mu x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}$
	p_μ	$\frac{1}{i}\left(p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}-p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)$	$-p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}-4$	$-i\left\{p_\mu\frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2}-2\left[4+p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right\}$
Решения уравнения Клейна-Гордона с $m=0$	$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$	$\frac{1}{i}\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$	$x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+1$	$x^2\frac{\partial}{\partial x_\mu}-2x_\mu x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-2x_\mu$
	p_μ	$\frac{1}{i}\left(p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}-p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)$	$-p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}-3$	$-i\left\{p_\mu\frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2}-2\left[3+p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right\}$
Решения уравнения Дирака с $m=0$	$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$	$\frac{1}{i}\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)+\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ x)	$x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{3}{2}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x_\mu}-2x_\mu x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-2x_\mu-\gamma_\mu(\gamma x)$
	p_μ	$\frac{1}{i}\left(p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}-p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)+\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ x)	$-p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}-\frac{5}{2}$	$-i\left\{p_\mu\frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2}-2\left[3+p_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial}{\partial p_\mu}+\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right\}$

x/ $\sigma_{\mu\nu}=-i(\gamma_\mu\gamma_\nu-\delta_{\mu\nu})$

рядом авторов [3,4,14].

3. Связь между волновыми уравнениями с $m \neq 0$ и $m = 0$.

Доказательство инвариантности уравнений Клейна-Гордона и Дирака с массой относительно 15-параметрической группы будет осуществлено путем установления связи между уравнениями с массой и без массы. Все рассмотрения будут проводиться в импульсном пространстве.

Если в уравнении Клейна-Гордона

$$\left[\vec{p}^{\,2} - p_0^2 + m^2\right] \varphi(\vec{p}, p_0) = 0 \tag{21}$$

сделать замену

$$\vec{q} = \vec{p}\ , \quad q_0 = \varepsilon(p_0)\sqrt{p_0^2 - m^2} \tag{22}$$

$$\varphi_0(\vec{q}, q_0) = \varphi(\vec{p}, p_0), \tag{23}$$

то уравнение /21/ примет вид уравнения Клейна-Гордона без массы

$$(\vec{q}^{\,2} - q_0^2)\, \varphi_0(\vec{q}, q_0) = 0. \tag{24}$$

Аналогично уравнение Дирака

$$(i\gamma p + m)\, \psi(\vec{p}, p_0) \tag{25}$$

с помощью замены /22/ и преобразования функции

$$\psi_0(\vec{q}, q_0) = S\, \psi(\vec{p}, p_0), \tag{26}$$

где

$$S = \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} - \gamma_4\, \mathrm{sh}\frac{\chi}{2}\ , \quad \chi = \mathrm{arth}\frac{m}{p_0}\ , \tag{27}$$

приводится к виду уравнения Дирака без массы

$$i\gamma q\, \psi_0(\vec{q}, q_0) = 0\ , \tag{28}$$

так как

$$S^{-1}(i\gamma p+m)S^{-1}=i\gamma q \qquad /29/$$

Можно указать целый класс такого рода преобразований уравнений Клейна-Гордона и Дирака к массе $m=0$. Все они нековариантны. Одно из них, с унитарным S, использовано в работе [15].

Уравнения /25/ и /28/ инвариантны относительно 15-параметрической конформной группы. Законы преобразования решений этих уравнений приведены в § 2. 15-параметрическая группа преобразований G_{15}, оставляющая инвариантным уравнение с ненулевой массой может быть получена следующим образом:

1/ при помощи /22/, /23/ для уравнения Клейна-Гордона и /22/, /26/ для уравнения Дирака совершаем переход к массе нуль.

2/ производим какое-либо из преобразований 15-параметрической группы для $m=0$.

3/ совершив переходы, обратные /22/, /23/ и /22/, /26/, находим операторы 15-параметрической группы для ненулевой массы.

4. Инфинитезимальные операторы 15-параметрической группы для уравнений Клейна-Гордона и Дирака с $m\neq 0$.

Конечные преобразования 15-параметрической группы G_{15} при $m\neq 0$ чрезвычайно громоздки. Но так как они полностью определяются своими инфинитезимальными операторами, то будут приведены только последние, вычисленные выше указанным способом.

Инфинитезимальные операторы имеют следующий вид:[x/]

а/ В случае уравнения Клейна-Гордона:

$$P_r^K=p_r \quad /r=1,2,3/ \quad P_0^K=\sqrt{p_0^2-m^2} \qquad /30/$$

---

x/ Для простоты ниже рассматривается только случай положительных частот $p_0\geq m$.

$$\left.\begin{aligned} M^K_{rn} &= \frac{1}{i}\left(p_r\frac{\partial}{\partial p_n} - p_n\frac{\partial}{\partial p_r}\right) \\ M^K_{r4} &= \frac{1}{i}\,\frac{\sqrt{p_0^2-m^2}}{p_0}\left(p_r\frac{\partial}{\partial p_4} - p_4\frac{\partial}{\partial p_r}\right) \qquad /p_4 = ip_0/ \end{aligned}\right\} \qquad /31/$$

$$I^K = -\left[3 + p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{m^2}{p_0}\frac{\partial}{\partial p_0}\right] \qquad /32/$$

$$\left.\begin{aligned} I^K_r &= -ip_r\left[\frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} + \frac{m^2}{p_0^2}\frac{\partial^2}{\partial p_0^2} - \frac{m^2}{p_0^3}\frac{\partial}{\partial p_0}\right] - 2iI^K\frac{\partial}{\partial p_r} \\ I^K_0 &= -i\frac{\sqrt{p_0^2-m^2}}{p_0}\left\{p_0\left[\frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} + \frac{m^2}{p_0^2}\frac{\partial^2}{\partial p_0^2} + \frac{m^2}{p_0^3}\frac{\partial}{\partial p_0}\right] - 2I^K\frac{\partial}{\partial p_0}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad /33/$$

В случае уравнения Дирака

$$P^D_r = p_r \quad /r = 1,2,3/\,, \quad P^D_0 = \sqrt{p_0^2-m^2} \qquad /34/$$

$$\left.\begin{aligned} M^D_{rn} &= M^K_{rn} + \frac{1}{2}\sigma_{rn} \\ M^D_{r4} &= M^K_{r4} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p_0^2-m^2}}{p_0}\sigma_{r4} + \frac{m}{2p_0\sqrt{p_0^2-m^2}}\left(\gamma_r p_4 - \gamma_4 p_r + m\sigma_{r4}\right) \end{aligned}\right\} \qquad /35/$$

$$I^D = -\left[\frac{5}{2} + p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{m^2}{p_0}\frac{\partial}{\partial p_0} + \gamma_4\frac{m}{2p_0}\right] \qquad /36/$$

$$
\left.
\begin{aligned}
I_r^D = I_r^K &+ \frac{im}{4p_0^3(p_0^2-m^2)}\left[mp_0p_r - 2p_r\gamma_4(2p_0^2-m^2) + 2i\gamma_r p_0^2(p_0-\gamma_4 m)\right] - \\
&- i\gamma_r\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu} + \frac{im}{p_0}\frac{\partial}{\partial p_0}\right) + \frac{im\gamma_4}{p_0^2}\left(p_r\frac{\partial}{\partial p_0} + p_0\frac{\partial}{\partial p_r}\right) \\
I_0^D = I_0^K &+ \frac{im}{4p_0^3\sqrt{p_0^2-m^2}}\left[2\gamma_4(2p_0^2-m^2) + mp_0\right] + \\
&+ \frac{im\gamma_4}{p_0\sqrt{p_0^2-m^2}} I^D - \frac{m+\gamma_4 p_0}{\sqrt{p_0^2-m^2}}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu} + \frac{im}{p_0}\frac{\partial}{\partial p_0}\right)
\end{aligned}
\right\}
\qquad /37/
$$

Инфинитезимальные операторы /30/ - /33/ и /34/ - /37/ удовлетворяют соотношениям структуры /7 - 15/. Следовательно, определяемые ими преобразования образуют представление конформной группы C_4 . В пределе $m = 0$ они переходят в соответствующие операторы для уравнений без массы, выписанные в таблице 2.

Все приведенные инфинитезимальные операторы либо вообще коммутируют со своими волновыми уравнениями, либо коммутируют в применении к решениям этих уравнений, подобно случаю $m = 0$ /см.формулы /16/ - /19//, например,

$$
\left[I^D, i\gamma p + m\right] = -\left(1 + \gamma_4\frac{m}{p_0}\right)(i\gamma p + m) \quad . \qquad /38/
$$

Отметим, что все коммутаторы, равные нулю для $m = 0$, равны нулю и при $m \neq 0$, за исключением

$$
\left[M_{r4}^D, i\gamma p + m\right] = \frac{m}{p_0\sqrt{p_0^2-m^2}}\left(p_r\gamma_4 - p_4\gamma_r\right)(i\gamma p + m) \quad . \qquad /39/
$$

Итак, уравнения Клейна-Гордона и Дирака с массой инвариантны относительно 15-параметрической группы G_{15} .

Однако для того, чтобы получить представление конформной группы C_4 в целом пришлось изменить представление неоднородной группы Лорентца L_{10}

/изменились операторы P_0 и $M_{\tau 4}$ /. Ввиду этого закон преобразования для 4-импульса частицы p_μ, /несовпадающего, вообще говоря, с оператором бесконечно малого сдвига P_μ / будет отличен от закона преобразования 4-вектора[x/]. Это трудность. Аналогичные трудности могут иметь место и для других физических величин.

В заключение отметим, что способом, указанным в § 2, можно найти аналог группы Паули для уравнения Дирака с ненулевой массой. Например, однопараметрическая группа такова:

$$\psi'(p) = \exp(i\alpha\Gamma_5)\psi(p) , \tag{40}$$

где

$$\Gamma_5 = \varepsilon(p_0)\frac{p_0 + \gamma_4 m}{\sqrt{p_0^2 - m^2}}\gamma_5 \quad , \quad \Gamma_5^2 = 1 . \tag{41}$$

Γ_5 является лорентцевым псевдоскаляром в рассмотренном выше представлении группы C_4.

Авторы благодарны проф. М.А. Маркову за интерес к работе и Л.Г.Заставенко за полезные обсуждения.

---

x/ Как 4-вектор преобразуется P_μ.

Литература

1. E. Cunningham, Proc.Lond.Math.Soc. 8, 77, 1910.
2. H. Bateman, Proc.Lond.Math.Soc. 8, 223, 19510.
3. P.A.M. Dirac, Annals of Math. 37, 429, 1936.
4. H. Bhaba, Proc. Cambr. Phil.Soc. 32 622, 1936.
5. W. Pauli, Helv.Phys.Acta, 13, 204, 1940.
6. A. McLennan Nuovo Cim. 3, 1360, 1956.
7. R.L. Ingraham, Nuovo Cim. 9, 886, 1952; 12, 825, 1954.
8. S. Bludmen, Phys.Rev. 107, 1163, 1957.
9. L. Page, Phys.Rev. 49, 254, 1936.
10. H. Robertson, Phys.Rev. 49, 755, 1936.
11. H. T.E. Engström, M. Zorn, Phys.Rev. 49, 701, 1936.
12. J. Haantjes, Proc.Ned.Akad.Wet. 43, 1288, 1940.
13. E.L. Hill, Phys.Rev. 67, 358, 1945; 72, 143, 1947; 84, 1165, 1951.
14. J. Murai, Prog. Theor. Phys. 9, 147, 1953; 11, 441, 1954.
15. M. Cini, B. Touschek, Nuovo Cim. 7, 422, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел 23 февраля 1959 года.