ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков

Р.295

МЕТОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дубна, 1959 год

Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков

МЕТОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

I.

В недавней работе Редмонда[I] (см. также[2]) был получен интересный результат, заключающийся в том, что путем привлечения требования аналитичности можно получить выражения для пропагаторов, не содержащие известных логарифмических полюсов.

На этом пути по нашему мнению можно придти к некоторым общим выводам относительно метода теории возмущений и, возможно, относительно некоторых общих свойств современной квантовой теории поля.

Наиболее естественным путем изучения аналитических свойств пропагаторов является метод дисперсионных соотношений. Этот метод в настоящее время представляет собой единственный подход к задачам квантовой теории поля, свободный, повидимому, от внутренних трудностей. Поэтому представляется вполне естественным, что дальнейший прогресс в квантовой теории поля должен быть связан с методом дисперсионных соотношений.

Этот метод, основанный на самых общих принципах ковариантности, причинности, унитарности и спектральности[x)], позволяет получать выражения для величин типа функций Грина и матричных элементов переходов в виде спектральных разложений. Тем самым задача сводится к изучению свойств соответствующих спектральных функций. Эти спектральные функции путем разложения по полной системе физических состояний могут быть выражены через функции Грина для более сложных процессов. Здесь появляется принципиальная возможность получения системы уравнений для определения функций Грина. Следует отметить, что в отличие, например, от системы уравнений Швингера, на этом пути не возникает ультрафиолетовых расходимостей.

Однако, последовательное развитие такой программы наталкивается на ряд препятствий, поскольку, например, в настоящее время спектральные представления для высших функций Грина еще не получены.

2.

Здесь возникает паллиативная возможность получения недостающей информации о спектральных функциях с помощью данных теории возмущений. Именно на этот путь встал Симанзик в работе[3]. Рассматривая n - ый член теории возмущений для некоторого вертекса, он показал, что этот член может быть представлен в определенной спектральной форме. Затем, используя гипотезу о возможности суммирования ряда для спектральной функции, Симанзик сделал заключение о представимости

---

x) Под принципом спектральности мы имеем в виду условие существования полной системы физических состояний с положительной энергией.

всего рассматриваемого вертекса в целом в данной спектральной форме.

Этот прием Симанзик использовал для получения общих теоретических выводов, ведущих к доказательству дисперсионных соотношений. По нашему мнению представляло бы большой интерес исследовать на основе такого приема различные возможности для аппроксимаций. В качестве простейшего примера рассмотрим этим путем спектральную формулу Челлена-Лемана, а вместо суммирования всего ряда теории возмущений в целом, ограничимся суммированием только того класса диаграмм, изучение которого по мнению ряда авторов/4/ приводит к доказательству существования логарифмического полюса.

Спектральное представление бозонного пропагатора согласно теореме Челлена-Лемана имеет вид

$$\Delta_c(p^2) = \frac{1}{m^2-p^2} + \int_{m_0^2}^{\infty} \frac{I(z)\,dz}{z-p^2-i\varepsilon} \tag{I}$$

Правая часть этой формулы представляет функцию f, аналитическую во всей комплексной плоскости переменной p^2 за исключением полюса в точке $p^2=m^2$ и разреза по действительной оси от $p^2=m_0^2$ до $p^2\to\infty$. Функция $\Delta_c(p^2)$ для действительных $p^2\geq m_0^2$ равна предельному значению f на верхнем берегу разреза, т.е.

$$\Delta_c(p^2)\Big|_{p^2\geq m_0^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} f(p^2+i\varepsilon) = f_+(p^2)$$

Спектральная функция $I(z)$ вещественна и определяется скачком функции f

$$2\pi i\, I(z) = f_+(z) - f_-(z) = \Delta_c(z) - \Delta_c^*(z) \tag{2}$$

где $f_-(z)$ - значение функции f на нижнем берегу разреза.

Переходя к случаю электродинамики, рассмотрим класс тех диаграмм для фотонной функции Грина D_c, которые представляются в виде фотонной линии с произвольным числом простейших вставок - электронно-позитронных петель 2-го порядка. Эти диаграммы для краткости мы будем именовать, как это принято, главными логарифмическими диаграммами. Вклад n-го члена этого класса в D_c имеет вид

$$-\frac{1}{K^2}\left(e^2F(K^2,m^2)\right)^n \tag{3}$$

где $F(K^2,m^2)$ соответствует петле второго порядка. Явное выражение для F приведено, например, в § 32.I работы/5/.

В области $|K^2|\gg m^2$ функция F принимает вид

$$F(K^2,m^2) = \frac{1}{3\pi}\ln\frac{4m^2-K^2}{4m^2} \tag{4}$$

Мы ввели под знак логарифма член $4m^2$ для того, чтобы правильно передать мнимую составляющую функции F

$$\operatorname{Im} F(\kappa^2, m^2) = -\frac{1}{3}\theta(\kappa^2 - 4m^2) \quad ; \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

сохранив при этом ее нормировку

$$F(0, m^2) = 0$$

Заметим, что непосредственное суммирование членов (4), впервые выполненное в работе[6], приводит к выражению

$$-\frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - \kappa^2}{4m^2}} \tag{5}$$

на основании которого и было сделано заключение[4] о существовании логарифмического полюса и, следовательно, о внутреннем противоречии в теории.

Нетрудно убедиться, что n-ый член (3) может быть представлен в спектральной форме Челлена-Лемана. Ограничиваясь аппроксимацией (4), получим

$$D_n = -\frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - \kappa^2}{4m^2}\right)^n = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{I_n(z)}{z - \kappa^2}\, dz$$

где функция $I_n(z)$ определяется скачком функции D_n по формуле (2). Выполняя суммирование под знаком спектрального представления для функции

$$I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z)$$

убеждаемся, что $I(z)$ в целом представляется скачком выражения (5). Подставляя (5) в (2), находим

$$I(z) = \begin{cases} \dfrac{e^2}{3\pi z}\left[\left(1 - \dfrac{e^2}{3\pi} \ln \dfrac{z - 4m^2}{4m^2}\right)^2 + \dfrac{e^4}{9}\right]^{-1} & , \ z \geq 4m^2 \\ 0 & , \ z < 4m^2 \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, для функции Грина фотона получаем выражение:

$$D_c(\kappa^2) = -\frac{1}{\kappa^2} + \frac{e^2}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz}{z(z - \kappa^2 - i\varepsilon)\left[\left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{z - 4m^2}{4m^2}\right)^2 + \frac{e^4}{9}\right]} \tag{7}$$

Формулы такого типа как раз и обсуждаются в работах[1,2].

Как нетрудно убедиться, выражение (7) представляет собой функцию

$$D_c(k^2) = -\frac{1}{k^2\left[1-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{4m^2-k^2}{4m^2}\right]} - \frac{3\pi/e^2}{(1-e^{-3\pi/e^2})(k^2-4m^2+4m^2e^{3\pi/e^2})}$$

которая с учетом малости e^2 для $|k^2|$, много больших m^2, может быть записана в виде

$$D_c(k^2) = -\frac{1}{k^2\left[1-\frac{e^2}{3\pi}\ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)\right]} - \frac{3\pi/e^2}{k^2+4m^2e^{3\pi/e^2}} \tag{8}$$

Функция (8) обладает следующими замечательными свойствами, эта функция: I) не имеет логарифмического полюса; 2) в окрестности точки $e^2 = 0$ как функция e^2 имеет особенность "сверхпроводящего" типа $\exp(-3\pi/e^2)$; 3) в окрестности точки $e^2 = 0$ допускает асимптотическое разложение, совпадающее с разложением обычной теории возмущений и представимое в форме (5). Ясно также, что второй член в правой части (8) не может быть принципиально получен в теории возмущений из-за экспоненциального порядка малости, ввиду чего он не соответствует каким-либо диаграммам Фейнмана.

Отметим еще факт согласованного окончательного выражения (8) с исходной аппроксимацией (5). В той области, в которой мы использовали формулу (5) для вычисления спектральной функции, она отличается от окончательного выражения (8) на пренебрежимо малые члены порядка $\exp(-3\pi/e^2)$.

Таким образом, именно формула (8), а не (5), представляет собой результат последовательного суммирования главных логарифмических членов, не содержащий каких-либо парадоксов вроде "трудности нуль-заряда"/4/.

Выражение (6) для спектральной функции было получено нами из формулы (5), представляющей собой результат суммирования главных логарифмических членов теории возмущений. Мы могли бы, однако, исходить не из формулы (5), а из выражения (§ 43.I из/5/):

$$-\frac{1}{k^2\left[1-e^2F(k^2,m^2)\right]}$$

соответствующего суммированию главных логарифмических диаграмм, и в пределе $|k^2| \gg m^2$ переходящего в (5).

Соответствующая спектральная функция имеет по сравнению с формулой (6) более громоздкий вид, сохраняя при этом все ее существенные свойства.

3.

Подобное исправление формул логарифмического суммирования может быть выполнено и для других пропагаторов. Рассмотрим, например, мезонный пропагатор в симметричной псевдоскалярной теории мезон-нуклонного взаимодействия. Выражение для этого пропагатора, полученное путем улучшения теории возмущений, имеет вид/5,7/

$$\Delta_c(p^2) = \frac{1}{(m^2-p^2)\left[1-\frac{5g^2}{4\pi}\ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)\right]^{\alpha}}$$

где $\alpha = 4/5$. Соответствующая спектральная функция I_α, полученная путем суммирования под знаком спектрального представления, будет:

$$I_\alpha(z) = \frac{1}{m^2-z}\cdot\frac{\sin\left(\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{5g^2/4}{1-t}\right)}{\pi\left[(1-t)^2+\frac{25g^4}{16}\right]^{\alpha/2}} \tag{9}$$

где
$$t = \frac{5g^2}{4\pi}\ln\frac{z}{m^2}$$

Общей особенностью спектральных функций (6) и (9) является их резонансный характер. Как указывалось, эти формулы получены на основе суммирования главных логарифмических членов. Представляет поэтому интерес выяснить, сохранится ли резонансный характер в спектральных функциях, полученных путем суммирования логарифмических членов более высокого порядка малости. С этой целью возьмем в качестве исходного выражения для фотонного пропагатора формулу (§ 43.2 из /5/), полученную суммированием членов вида $(e^2\ln z)^n$ и $e^2(e^2\ln z)^m$:

$$D_c^{T.B.}(z) = -\frac{1}{z}\left\{1-t+\frac{ie^2}{3}\theta(z-4m^2)+\frac{3e^2}{4\pi}\ln\left[1-t+\frac{ie^2}{3}\theta(z-4m^2)\right]\right\}^{-1}$$

где
$$t = \frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{z-4m^2}{4m^2}$$

Из этого выражения получим вместо (6) (при $z \geq 4m^2$):

$$I(z) = \frac{e^2}{3\pi z}\cdot\frac{1+\frac{9}{4\pi}\operatorname{arctg}\frac{e^2/3\pi}{1-t}}{\left\{1-t+\frac{3e^2}{2\pi}\ln\left[(1-t)^2+\frac{e^4}{9}\right]\right\}^2+\frac{e^4}{9}\left\{1+\frac{9}{4\pi}\operatorname{arctg}\frac{e^2/3\pi}{1-t}\right\}^2} \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что резонансный характер спектральной функции при учете высших логарифмических членов сохраняется. Однако, влияние этих высших членов на поведение спектральной функции в районе резонанса при $1-t\sim 0$ не является малым. Из сравнения выражений (6) и (10) видно, что они отличаются множителями (1 + 9/8), не зависящим от степени малости параметра e^2.

Следует подчеркнуть, что улучшение теории возмущений, проводимое путем суммирования логарифмических членов различного порядка малости не является последовательной операцией. Как известно (см. § 42.4 из /5/), полученным таким образом формулам можно верить лишь в области, где величина

$$e^2 d(\kappa^2) = -e^2\kappa^2 D_c(\kappa^2)$$

мала по сравнению с единицей.

Отсюда вытекает, что полученным выражениям для спектральных функций можно верить только в области до "резонанса". В районе резонанса и выше этим формулам верить нельзя, поскольку здесь мы пользуемся исходной аппроксимацией вне области ее применимости, выходя фактически за рамки слабой связи. Поэтому можно сделать лишь гипотезу о резонансном характере спектральных функций.

Неприменимость полученных выражений для спектральных функций в области очень больших вида также из сравнения с общим выражением для спектральных функций, полученным в работе/8/. Это и не удивительно, так как задача определения истинной асимптотики даже одного фотонного пропагатора требует одновременного рассмотрения асимптотик других высших вертексов.

4.

Не составляет труда убедиться, что полученные выше выражения для функций Грина не являются ренормализационно инвариантными. В этом разделе на примере фотонного пропагатора мы покажем, каким образом они могут быть приведены к инвариантному виду.

В качестве исходной рассмотрим формулу (8), записав ее в виде

$$\frac{e^2 d}{3\pi} = -\frac{e^2\kappa^2 D_c(\kappa^2)}{3\pi} = \frac{1}{\frac{3\pi}{e^2} - \ln\frac{\kappa^2}{m^2}} + \frac{1}{1-\exp\left[\frac{3\pi}{e^2} - \ln\frac{\kappa^2}{m^2}\right]} \tag{II}$$

Функция $e^2 d$, именуемая инвариантным зарядом, должна быть инвариантом ренормализационного группового преобразования (см. § 42 в/5/). Однако, выражение (II) этому требованию явным образом не удовлетворяет.

Обычная техника приведения выражений к ренормализационно-инвариантному виду использует аппарат дифференциальных уравнений Ли с привлечением соображений соответствия с обычной теорией возмущений. Ввиду того, что выражения типа (II) не могут быть разложены по степеням e^2, нам будет технически удобнее исходить не из дифференциальных уравнений Ли, а из функциональных уравнений ренормализационной группы.

С этой целью аналог обычной функции d, нормированной на единицу при $\kappa^2=\lambda^2$, будем искать в виде:

$$\frac{e_\lambda^2 d\left(\frac{\kappa^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right)}{3\pi} = \frac{1}{\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}} + \frac{1}{1-\exp\left[\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right]} \tag{I2}$$

руководствуясь тем, что, как это впервые было показано Гелл-Манном и Лоу[9] на основе групповых соображений, инвариантная функция может зависеть от e_λ^2 и λ^2 только через аргумент

$$\varphi(e_\lambda^2) + \ln \lambda^2$$

Требование инвариантности функции $e^2 d$ имеет вид:

$$e_\lambda^2 d\left(\frac{K^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right) = e_0^2 d\left(\frac{K^2}{m_0^2}, e_0^2\right) = e_{\lambda_1}^2 d\left(\frac{K^2}{\lambda_1^2}, e_{\lambda_1}^2\right) \tag{I3}$$

где m_0 - величина порядка массы электрона, а e_0 - соответствующее ей значение заряда. Это требование определяет связь между законами преобразования заряда и импульса нормировки через функцию ϕ

$$\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{K^2}{\lambda^2} = \phi\left(\frac{e_0^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{K^2}{m_0^2} = \phi\left(\frac{e_{\lambda_1}^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{K^2}{\lambda_1^2}$$

откуда, в частности, следует

$$\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right) - \phi\left(\frac{e_0^2}{3\pi}\right) = -\ln\frac{\lambda^2}{m_0^2} \tag{I4}$$

Из формулы (I4) вытекает качественное ограничение на функцию ϕ. При $\lambda^2 \to \infty$ функция $\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right)$ должна монотонно стремиться к $-\infty$. Явный вид этой функции может быть теперь определен из условия нормировки d. Полагая в (I2) $K^2 = \lambda^2$, получаем:

$$\frac{e_\lambda^2}{3\pi} = \frac{1}{\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right)} + \frac{1}{1 - \exp\left[\phi\left(\frac{e_\lambda^2}{3\pi}\right)\right]}$$

т.е.

$$x = \frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{e^{\phi(x)} - 1}$$

Из этого уравнения видно, что ϕ действительно есть монотонная убывающая функция своего аргумента, При малых х $\phi(x) \sim 1/x$ и формула (I2) переходят в формулу (II). При $x = 1/2$ функция ϕ проходит через нуль, меняя знак с положительного на отрицательный. При $x \to 1$ функция ϕ стремится к $-\infty$.

Из условия нормировки функции d и формул (I3) и (I4) следует

$$\phi\left(\frac{e_0^2}{3\pi} d\left(\frac{\lambda^2}{m_0^2}, e_0^2\right)\right) = \phi\left(\frac{e_0^2}{3\pi}\right) - \ln\frac{\lambda^2}{m_0^2}$$

откуда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{e_0^2}{3\pi} d\left(\frac{\lambda^2}{m_0^2}, e_0^2\right) = 1 \tag{I5}$$

Если теперь в соответствии с общепринятыми правилами (см., например[9]) определить из (I5) постоянную перенормировки фотонного пропагатора Z_3, то мы получим для нее конечное значение

$$Z_3 = \frac{e_0^2}{3\pi} \tag{16}$$

Разумеется, никакого окончательного смысла значению (16) придавать не следует. Мы провели здесь эти рассуждения с целью показать, каким образом можно приводить выражения к ренормализационному инвариантному виду без использования уравнений Ли.

5.

Подведем теперь некоторые итоги. Как было продемонстрировано, даже весьма предварительная попытка синтеза метода дисперсионных соотношений и теории возмущений позволяет получать для функций Грина выражения, не содержащие логарифмических полюсов. Следует, конечно, отметить, что новые формулы практически не отличаются от старых при не "сверхбольших" значениях переменной K^2 и что область применимости новых формул не отличается от области применимости старых формул, будучи ограничена соображениями о выходе за рамки слабой связи. Поэтому получение формул такого типа не является в настоящее время важной задачей.

Однако, более глубокий синтез аппроксимационных методов и дисперсионных соотношений, инициированный работами Редмонда и Симанзика, может иметь большое принципиальное значение.

Поясним эту мысль на примере модели Ли. Как известно, точное решение модели Ли содержит трудность логарифмического полюса. С другой стороны, нерелятивистская модель Ли обладает причинностью по времени и, следовательно, на основании принципа спектральности для нее имеет место одномерный аналог теоремы Челлена-Лемана по переменной Е. Поскольку точное выражение для пропагатора не удовлетворяет теореме Челлена-Лемана, то это означает, что исходный гамильтониан противоречит условию спектральности, т.е. что (как было известно) система собственных функций этого гамильтониана включает состояния с отрицательной энергией. Так как такие состояния являются физически бессмысленными, то это означает, что исходный гамильтониан выбран неудачно.

Проводя описанное выше исправление пропагатора модели Ли, мы получим для него выражение без логарифмического полюса, что будет эквивалентно вычитанию из гамильтониана членов, соответствующих состояниям с отрицательной энергией, т.е. приведению его к физически разумному виду.

В электродинамике можно сделать два предположения о причине появления логарифмического полюса:

1) исходный лагранжиан является нефизическим, т.е. его полная система функций не удовлетворяет требованию спектральности;

2) причина появления логарифмического полюса лежит в неудачном выборе используемого аппроксимационного метода.

С точки зрения первой возможности, эквивалентной положению в модели Ли, описанное исправление фотонного пропагатора соответствует исправлению лагранжиана. Во втором варианте этот прием сводится к автоматическому исключению паразитных особенностей, не соответствующих физическому содержанию теории. Разумеется, в настоящее время сделать выбор между этими двумя возможностями нельзя.

Видно теперь, что прием суммирования внутри спектральных представлений выступает как некоторая новая "сверхвычитательная" процедура, устраняющая нефизические особенности независимо от причины их возникновения. Следует подчеркнуть, что эта процедура "второго вычитания" является вполне естественной, поскольку она представляет собой математическую формулировку требования соответствия получаемых результатов с исходными физическими принципами теории.

Авторы выражают благодарность проф. Д.И.Блохинцеву, Б.В.Медведеву и М.К.Поливанову за обсуждения результатов.

Цитированная литература

I. P.J.Redmond, Phys.Rev.Lett., 1, 398 (1958) - Abstract.
2. P.J.Redmond, J.L.Uretsky, Phys.Rev.Lett., 1, 147 (1958).
3. K.Symanzik, Prog.Theor.Phys., 20, 690 (1958).
4. Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук, ДАН СССР I02, 489 (1955); см. также Л.Д.Ландау в сборнике "Niels Bohr and the Development of Physics", London, 1955.
5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков "Введение в теорию квантованных полей", Москва, Гостехиздат, I957.
6. Л.Д.Ландау, А.А.Абрикосов, И.М.Халатников, ДАН СССР 95, 773, II77; 96, 26I (1954), а также Suppl.Nuovo Cimento 3, n.1. 80 (1956).
7. А.Д.Галанин, Б.Л.Иоффе, И.Я.Померанчук, ЖЭТФ 29, 5I (I955).
8. H.Lehmann, K.Symanzik, W.Zimmermann, Nuovo Cimento 2, 425 (1955).
9. M.Gell-Mann, F.Low, Phys.Rev., 95, 1300 (1954).

Работа поступила в издательский отдел 31 января 1959 года.