ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р-290

Н.А. Черников

ВОЗМОЖНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦ ИЗ ОПЫТОВ ПО РАССЕЯНИЮ

Дубна, 1959 год

P - 290

Н.А. Черников

ВОЗМОЖНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦ ИЗ ОПЫТОВ ПО РАССЕЯНИЮ

Плотность распределения вероятностей импульса нуклона в ядре можно найти из опытов по рассеянию частиц на ядрах. Эта задача имеет простое решение, если столкновение частицы с одним из нуклонов происходит независимо от остальных нуклонов и если кратные столкновения частицы в ядре маловероятны. При этих предположениях П.А. Вольф /1/ учитывал влияние внутриядерного движения нуклонов на вероятность рассеяния частицы на ядре. В отличие от указанной работы Вольфа, здесь рассматриваются релятивистские частицы. Кроме того, здесь устанавливается интегральное уравнение для плотности распределения вероятностей импульса нуклона, что позволяет найти эту плотность, не задаваясь a priori определенным видом ее зависимости от импульса. Для вывода этого уравнения рассмотрим следующую задачу.

§ 1. Связь эффективного сечения рассеяния на частице, импульс которой является случайной величиной, с плотностью распределения вероятностей этого импульса

Пусть известно сечение $\sigma < P,Q >$ взаимодействия некоторых частиц α и β, где P и Q – их четырехмерные импульсы, $< P,Q$ – площадь параллелограмма, построенного на этих импульсах:

$$< P, Q > = c\sqrt{(P,Q)^2 - m_\alpha^2 m_\beta^2}, \qquad /1/$$

$m_\alpha \geq 0$ и $m_\beta \geq 0$ – массы покоя частиц α и β, c – скорость света

$$(P,Q) = p_4 q_4 - \frac{\vec{p}\vec{q}}{c^2}, \qquad p_4 = \sqrt{m_\alpha^2 + p^2/c^2}, \quad q_4 = \sqrt{m_\beta^2 + q^2/c^2}. \qquad /2/$$

Четырехмерные импульсы обозначены большими буквами, а их компоненты – соответствующими малыми буквами.

Аргумент $< P,Q >$, от которого зависит сечение, характеризует относительное движение частиц α и β. Он равен произведению массы покоя частиц α и β, как целого, на импульс какой-либо из этих частиц в системе их центра инерции. Если масса покоя хотя бы одной из частиц отлична от нуля, то аргумент $< P,Q >$ равен также произведению этой массы на импульс другой частицы в системе отсчета, где покоится первая. В последнем легко убедиться, если в /1/ и /2/ положить $m_\beta > 0$, $q = 0$. В первом также просто убедиться, если в /1/ и /2/ положить $\vec{q} = \vec{x}$, $\vec{p} = -\vec{x}$.

Пусть, далее, задана вероятность $f(q_4)dq_1\,dq_2\,dq_3$ того, что импульс частицы β заключен в пределах q_i, q_i+dq_i, $i = 1, 2, 3$.

Требуется найти эффективное сечение взаимодействия частицы α с частицей β, импульс которой не фиксирован, а распределен по заданному закону.

Нетрудно проверить, что если плотность распределения вероятностей положения частицы α с заданным импульсом P равна N_{p_4}, то отнесенная к единице времени вероятность взаимодействия частицы α с частицей β при условии, что импульс Q последней фиксирован, равна

$$W(Q) = N\sigma(\langle P,Q\rangle)\frac{\langle P,Q\rangle}{q_4}. \qquad /3/$$

Следовательно, отнесенная к единице времени безусловная вероятность взаимодействия частицы α с частицей β равна

$$W = N\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle P,Q\rangle\,\sigma(\langle P,Q\rangle)\,f(q_4)\frac{dq_1\,dq_2\,dq_3}{q_4}, \qquad /4/$$

а значит, эффективное сечение взаимодействия частицы α с частицей β, импульс которой распределен по заданному закону, равно

$$\sigma_{эф}(p) = \frac{W}{NP} = \frac{1}{P}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle P,Q\rangle\,\sigma(\langle P,Q\rangle)\,f q_4\,\frac{dq_1\,dq_2\,dq_3}{q_4}. \qquad /5/$$

Поставленная задача, таким образом, решена.

Пусть теперь задано дифференциальное сечение $d\sigma$ рассеяния частицы α с импульсом P на частице β с импульсом Q:

$$d\sigma = H(\langle P,Q\rangle, \langle P',Q\rangle, \langle P',P\rangle)\frac{dp_1'\,dp_2'\,dp_3'}{p_4'} \qquad /6/$$

и требуется найти эффективное дифференциальное сечение $d\sigma_{эф}$ рассеяния частицы α на частице β, импульс которой распределен по заданному выше закону. Решение этой задачи получаем из решения предыдущей заменой σ на $d\sigma$:

$$d\sigma_{эф} = G(p_4, p_4', \cos\theta)\frac{dp_1'\,dp_2'\,dp_3'}{p_4'}, \quad \cos\theta = \frac{\vec{p}\,\vec{p}'}{pp'}, \qquad /7/$$

где

$$G(p_4,p_4',\cos\theta) = \frac{1}{p}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle P,Q\rangle H(\langle P,Q\rangle,\langle P',Q\rangle,\langle P',P\rangle)f(q_4)\frac{dq_1\,dq_2\,dq_3}{q_4} \qquad /8/$$

В интеграле /8/ от переменных интегрирования q_1, q_2, q_3 перейдем к радиальной переменной q_4 и угловым переменным ϑ и φ, направив ось z' по вектору $\vec{p}\,' - \vec{p}$, а ось x' – по вектору $\vec{p} \times \vec{p}\,'$. Получаем

$$G(p_4, p_4', \cos\theta) = \int_{m_\beta}^{\infty} h(p_4, p_4', \cos\theta; q_4) f(q_4) dq_4 , \qquad /9/$$

где

$$h(p_4, p_4', \cos\theta; q_4) = \frac{c^2 q}{p} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \langle P,Q\rangle H(\langle P,Q\rangle, \langle P',Q\rangle, \langle P',P\rangle) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi . \qquad /10/$$

Формулы /5/ и /9/, разумеется, применимы к рассеянию частицы на мишени, размер которой вдоль начальной скорости этой частицы много меньше длины свободного пробега, так как в этом случае кратные столкновения маловероятны, а рассеяние на каждой частице мишени происходит независимо от остальных частиц. Подчеркнем, что $f(q_4)$ представляет не локальную плотность распределения вероятностей импульса частицы β, входящей в состав мишени, а интегральную по всему пространству, занимаемому мишенью.

§ 2. Упругое столкновение с частицей, импульс которой является случайной величиной

Рассеяние на покоящейся частице складывается из неупругого и из упругого рассеяния: $H = K + L$. Если дифференциальное сечение упругого рассеяния в системе центра инерции сталкивающихся частиц α и β равно[x]

$$\frac{F((P,P'),(P+P',Q))}{m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2(P,Q)} d\Omega_u , \qquad /11/$$

то в системе отсчета, где до столкновения частица β покоилась /при $m_\beta \neq 0$/, это сечение равно[x]

$$\frac{F((P,P'),(P+P',Q))}{m_\beta^2 \langle P,Q\rangle} \cdot \frac{\langle P',Q\rangle^3 \, d\Omega_\lambda}{\langle P',Q\rangle^2 + c^2[(P',Q)(PP') - m_\alpha^2 (P,Q)]} . \qquad /12/$$

Функция L при $P \neq P'$ выражается через F и δ – функцию следующим образом:

$$\langle P,Q\rangle L(\langle P',Q\rangle, \langle P',Q\rangle, \langle P',P\rangle) = c^{-2} F((P,P'),(P+P',Q)) \delta((P-P',Q-P')) . \qquad /13/$$

Обозначим $\ell(p, p', \cos\theta; q_4)$ интеграл /10/, в котором функция H замещена функцией L. Наличие δ-функции в /13/ позволяет выполнить интегрирование по ϑ, так как ее аргумент равен

---

[x] $d\Omega_u$ и $d\Omega_\lambda$ – элементы телесных углов в системе центра инерции и в лабораторной системе, соответственно.

$$(P-P',\ Q-P')=(P_4-P_4')q_4+\frac{q\,|\vec{p}-\vec{p}'|}{c^2}\cos\vartheta-(P,P')+m_\alpha^2 . \qquad /14/$$

Этот аргумент обращается в нуль при

$$\cos\vartheta=\mu\equiv\frac{(P,P')-m_\alpha^2+(P_4'-P_4)q_4}{q|\vec{p}-\vec{p}'|}c^2 . \qquad /15/$$

Можно показать, что значения μ принадлежат сегменту $[-1,1]$ при $q_4\geq x$, где

$$x=\frac{P_4'-P_4}{2}-\frac{|\vec{p}'-\vec{p}|}{2c\sqrt{(P,P')-m_\alpha^2}}\sqrt{(P,P')-m_\alpha^2+2m_\beta^2}\ , \qquad /16/$$

и не принадлежат ему при $q_4<x$. Нетрудно показать, что $x\geq m_\beta$. Таким образом, $\ell(p,p',\cos\theta;\ q_4)=0$, если $q_4<x$ и $\ell(p,p',\cos\theta;q_4)=\ell_0(p,p',\cos\theta;q_4)$, если $q_4\geq x$, где

$$\ell_0(p,p',\cos\theta;q_4)=\frac{c^2}{p|\vec{p}-\vec{p}'|}\int_0^{2\pi}F\big((P,P'),\Lambda\big)d\varphi\ , \qquad /17/$$

$$\Lambda=(2q_4+P_4-P_4')\big[(P,P')-m_\alpha^2\big]\frac{P_4+P_4'}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2}\cdot c^2- \qquad /18/$$

$$-2\sqrt{2}\ \frac{|\vec{p}\times\vec{p}'|}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2}\sqrt{(P,P')-m_\alpha^2}\ \sqrt{(q_4-x)(q_4+x+P_4-P_4')}\cdot\sin\varphi .$$

Обозначив $k(p,p',\cos\theta;\ q_4)$ интеграл /10/, в котором функция H замещена функцией K, представляющей неупругое рассеяние, запишем формулу /9/ в виде[x/]

$$G(p,p',\cos\theta)=\int_x^\infty \ell_0(p,p',\cos\theta;q_4)f(q_4)dq_4+\int_{m_\beta}^\infty k(p,p',\cos\theta;q_4)f(q_4)dq_4 . \qquad /19/$$

Заметим, что частица α при упругом столкновении с частицей β, энергия которой не больше заданной ($f(q_4)=0$, если $q_4>x_0$) не может иметь такие импульсы до и после столкновения, при которых выполняется неравенство $x>x_0$, ибо в этом случае первое слагаемое в правой части равенства /19/ равно нулю.

---

x/ В частном случае, когда $m_\alpha=m_\beta>0$, $k=0$, формула /19/ получена также Р.М.Рындиным /частное сообщение/.

Выразим это иначе. При заданных x и $\vec{p}$ уравнение /16/ определяет некоторую поверхность вращения $\Gamma(x,\vec{p})$ в пространстве импульсов. Обозначим $\Omega(x_0,\vec{p})$ область в пространстве импульсов, каждая точка которой принадлежит хотя бы одной из поверхностей $\Gamma(x,\vec{p})$, $m_\beta \le x \le x_0$, и, наоборот, которой принадлежит любая точка каждой такой поверхности. После упругого столкновения с частицей β, масса движения которой не больше x_0, импульс частицы α может представляться лишь точкой области $\Omega(x_0,\vec{p})$, где $\vec{p}$ – импульс частицы α до столкновения.

Разрешив уравнение /16/ относительно $\cos\theta$, нетрудно заметить, что поверхность $\Gamma(x,\vec{p})$, а следовательно и область $\Omega(x,\vec{p})$, не имеют ни одной точки вне сферы $p_4' = x - m_\beta + p_4$, что вполне понятно с точки зрения закона сохранения энергии.

При $m_\alpha = 0$ уравнение /16/ приводится к квадратному уравнению относительно p_4'. Его решения имеют следующий вид:

$$p_4' = p_4 \frac{m_\beta^2 + 2\left[x^2 - m_\beta^2 + x p_4\right]\sin^2\frac{\theta}{2} \pm 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{x^2 - m_\beta^2}\sqrt{m_\beta^2\cos\frac{\theta}{2} + (x+p_4)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{m_\beta^2 + 4p_4^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 4xp_4\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad /20/$$

При $m_\alpha > 0$ уравнение /16/ приводится к уравнению четвертой степени относительно p_4', и каждому x при заданных m_α, m_β, p_4 и θ таким образом соответствуют, вообще говоря, четыре значения p_4'.. Перейдем к системе отсчета, относительно которой частица α до столкновения покоится, введя следующие подстановки:

$$\omega = \sqrt{\frac{(p,p') - m_\alpha^2}{(p,p') + m_\alpha^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{p_4\,(p,p') - m_\alpha^2\, p_4'}{p\sqrt{(p,p') - m_\alpha^4}} \cdot c \qquad /21/$$

λ есть угол между вектором скорости старой системы отсчета и вектором скорости частицы α после рассеяния, взятых в новой системе отсчета. ω есть поделенное на скорость света отношение кинетической энергии частицы α после рассеяния к ее импульсу /также взятых в новой системе отсчета/. Уравнение /16/ приводится к уравнению четвертой степени относительно ω, имеющему двукратный корень $\omega = 0$ и два корня

$$\omega = \frac{\frac{p}{c}\cos\lambda\left[m_\beta^2 p_4 + x m_\alpha^2\right] \pm m_\alpha\sqrt{x^2 - m_\beta^2}\sqrt{m_\alpha^2 (x+p_4)^2 + (m_\beta^2 - m_\alpha^2)\frac{p^2}{c^2}\sin^2\lambda}}{m_\alpha^2 (x+p_4)^2 + (m_\beta^2 - m_\alpha^2)\frac{p^2}{c^2}}. \qquad /22/$$

Пусть некоторая точка a пространства скоростей [2] представляет скорость частицы α до столкновения, а точка 0 – скорость лабораторной системы отсчета /скорость ядра как целого/. Уравнение /22/ задает в пространстве скоростей поверхность вращения вокруг оси $0a$. Пересечение этой поверхности с меридианной плоскостью образует кривую, аналогичную улитке Паскаля [3]. Особая точка этой кривой помещается в точке

α. При $x < p_4 \dfrac{m_\beta}{m_\alpha}$ кривая самопересекается, образуя петлю.

§ 3. Интегральное уравнение для плотности распределения вероятностей импульса рассеивающей частицы

Уравнение /16/ при $x = m_\beta$ определяет "эллипсоид" упругого столкновения частицы α, начальный импульс которой равен $\vec{p}$, с покоящейся частицей β. Запишем уравнение этого "эллипсоида" в виде, разрешенном относительно p_4' :

$$p_4' = \frac{(p_4+m_\beta)(m_\beta p_4 + m_\alpha^2) + \varepsilon\,(p_4^2 - m_\alpha^2)\cos\theta\sqrt{m_\beta^2 - m_\alpha^2 \sin^2\theta}}{(p_4+m_\beta)^2 - (p_4^2 - m_\alpha^2)\cos^2\theta}, \qquad /23/$$

где $0 \le \theta \le \theta_0$, $\theta_0 = \pi$, $\varepsilon = 1$, если $m_\alpha < m_\beta$, $\theta_0 = \arcsin\dfrac{m_\beta}{m_\alpha}$, $\varepsilon = \pm 1$, если $m_\alpha \ge m_\beta$.

Обозначим $\mathcal{P}(p_4, \theta)$ функцию /23/ при $\varepsilon = 1$, как в случае $m_\alpha < m_\beta$, так и в случае $m_\alpha \ge m_\beta$.

Имеет место следующая лемма.

При $x > m_\beta > 0$, $p_4 > m_\alpha$, $0 < \theta \le \theta_0$, $p_4' > \mathcal{P}(p_4, \theta)$ уравнение /16/ относительно p_4' имеет единственное решение $p_4' = \mathcal{P}(x; p_4, \theta)$.

Для доказательства достаточно показать, что производная $\dfrac{\partial x}{\partial p_4'}$ положительна во всех случаях, предусмотренных условиями леммы. Ввиду громоздкости мы не будем приводить этого доказательства.

Полезно отметить, что в соответствии с замечанием предыдущего параграфа функция $\mathcal{P}(x; p_4, \theta)$ не больше, чем $x - m_\beta + p_4$.

Выберем некоторый угол θ, больший нуля и меньший или равный θ_0, и подставим в /19/ значение $p_4' = \mathcal{P}(x; p_4, \theta)$. Введя обозначения

$$G(x) = G(p_4, \mathcal{P}(x; p_4, \theta), \cos\theta), \quad y = q_4,$$

$$\ell(x,y) = \ell_0(p_4, \mathcal{P}(x; p_4, \theta), \cos\theta; y), \; k(x,y) = k(p_4, \mathcal{P}(x; p_4, \theta), \cos\theta; y), \qquad /24/$$

получим в результате:

$$G(x) = \int_x^{\infty} \ell(x,y) f(y)\, dy + \int_{m_\beta}^{\infty} k(x,y) f(y)\, dy \, . \qquad /25/$$

Найдя $G(x)$, $\ell(x,y)$ и $k(x,y)$ из опытов по рассеянию, получим интегральное уравнение /25/ для функции $f(q_4)$. Дифференцирование по x приводит его к интегральному уравнению второго рода.

Если частица α рассеивается на частице β только упругим образом, а функция $F((P,P'),(P+P',Q))$, определяющая дифференциальное сечение упругого рассеяния, зависит лишь от (P,P'), то $k(x,y)=0$, а $\ell(x,y)=\ell(x)$ не зависит от y. В этом случае решение уравнения /25/ имеет следующий вид:

$$f(x) = -\frac{d}{dx}\,\frac{G(x)}{\ell(x)} \, . \qquad /26/$$

Такому условию функция F удовлетворяет в нерелятивистском случае, если рассеяние кулоновское /формула Резерфорда/ или если потенциальная энергия взаимодействия частиц α и β зависит только от расстояния между ними и сечение может быть рассчитано в борновском приближении.

§ 4. Кинематика упругого столкновения частиц α и β в образах пространства скоростей

Мы будем предполагать здесь, что $m_\alpha > 0$ и $m_\beta > 0$. Пусть снова точка 0 пространства скоростей представляет скорость ядра как целого, а точка a –скорость частицы α до столкновения /см.чертеж/. Выберем какую-нибудь скорость a' частицы α после столкновения и определим, какие скорости частицы β до столкновения возможны при фиксированных a и a'. Скорость частиц α и β как целого обозначим g. Тогда g равноудалена от точек a и a'. Поэтому геометрическим местом возможных положений точки g является плоскость G, перпендикулярная к отрезку aa' и проходящая через его середину f. Точка b может представлять скорость частицы β до столкновения в том и только в том случае, если $ab \ni g$ и

$$\operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{bg}}{c} : \operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{ag}}{c} = m_\alpha : m_\beta \, . \qquad /27/$$

Из точки b опустим перпендикуляр bh на плоскость G. В силу того, что треугольники bgh и agf прямоугольны,

$$\operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{bh}}{c} = \operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{bg}}{c}\sin\gamma,\ \operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{af}}{c} = \operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{ag}}{c}\sin\gamma,\ \gamma = \angle bgh = \angle agf. \qquad /28/$$

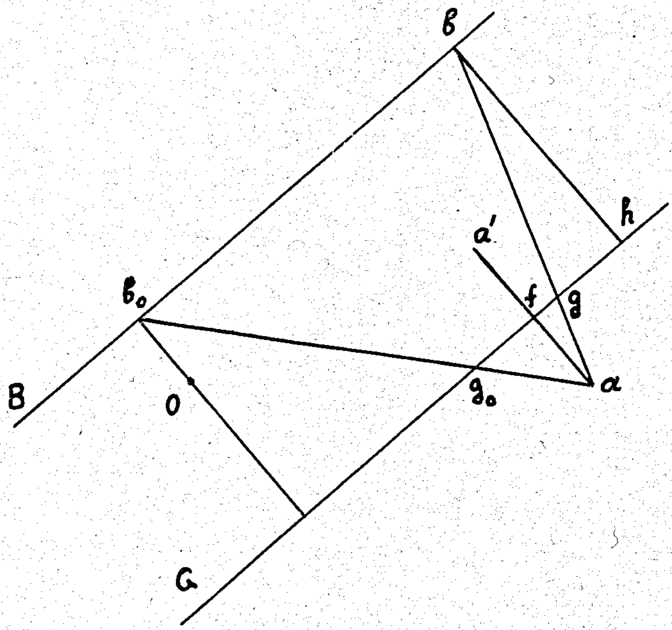
Следовательно, независимо от выбора точки g

$$\operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{bh}}{c} = \frac{m_\alpha}{m_\beta}\operatorname{sh}\frac{\overset{\frown}{aa'}}{2c}, \qquad /29/$$

так что геометрическим местом скоростей частицы β до столкновения является эквидистантная поверхность B с базой G. Величина x, определенная формулой /16/, есть $m_\beta \operatorname{ch}\frac{y}{c}$, где y – расстояние точки O до этой поверхности.

Обозначим b_0 проекцию точки O на поверхность B. Таким образом каждой точке поверхности /22/ соответствует единственная точка сферы с центром O и с радиусом y. Верно и обратное. Действительно, соединяем отрезком прямой произвольную точку b_0 этой сферы с точкой a. Находим точку g_0, делящую этот отрезок в отношении /27/. Проводим плоскость, ортогональную к прямой Ob_0 и проходящую через точку g_0. Зеркальное отражение точки a в этой плоскости и есть точка поверхности /22/.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Р.М.Суляеву и Ю.А.Щербакову за полезное обсуждение результатов работы.



Возможный способ определения плотности распределения вероятностей импульса частицы из опытов по рассеянию.

Работа поступила в издательский отдел
21 января 1959 года.

<u>Литература</u>

1. P.A. Wolff, Phys.Rev. 87, 434-438 (1952).

2. Н.А.Черников. Научные доклады высшей школы. Серия физ.-мат. № 2 /1958/.

3. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1, ГИТТЛ, М-Л, 1947 год.