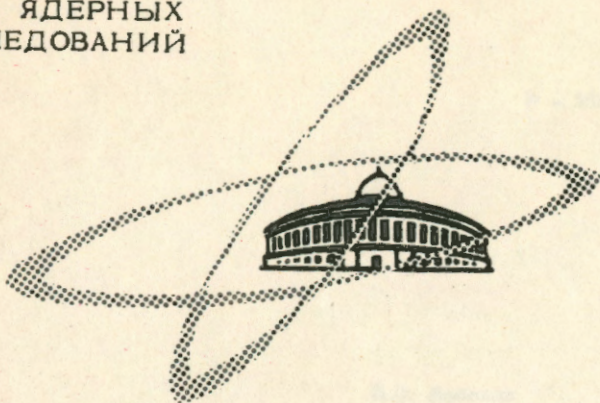


ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2896



В.Л. Любошиц

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА СИСТЕМЕ ДИПОЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

P - 2896

В.Л. Любошиц

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА СИСТЕМЕ ДИПОЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ

Направлено в ЖЭТФ

**Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ**

1. Введение

Известно, что в случае рассеяния S -волн на совокупности неподвижных точечных центров система интегральных уравнений для многократного рассеяния переходит в систему обычных алгебраических уравнений^{/1/}. При этом эффективная амплитуда рассеяния S -волн на системе N центров определяется по формуле^{/1-3/}:

$$A(q) = \sum_{i=1}^N A^{(i)} \exp(-iqR^{(i)}),$$

где

$$A^{(i)} = a^{(i)} + \sum_{k \neq i}^N \frac{a^{(i)} A^{(k)}}{R^{(ik)}} \exp(ikR^{(ik)} + ikR^{(ki)}).$$

Здесь $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ - переданный импульс, \vec{k} - импульс частицы до рассеяния, $a^{(i)}$ - амплитуда S -рассеяния на i -ом изолированном центре, не зависящая от угла, $R^{(ki)} = R^{(k)} - R^{(i)}$, $R^{(ik)} = R^{(ki)} = |R^{(ik)}|$, $k = |\vec{k}|$.

Задача о рассеянии S -волн на двух неподвижных центрах была, по-видимому, впервые рассмотрена в работе Чу и Вика^{/4/} в связи с обсуждением поправок к импульсному приближению. Несколько позже подробное решение задачи было дано Бракнером^{/5/}. Учет конечного числа высших парциальных волн, в частности, p -рассеяния, можно найти в работе^{/6/}. Обобщение системы уравнений (1) на случай бесконечно широкого слоя содержится в работах^{/3,7/}.

Систему уравнений (1) нетрудно обобщить на случай центрального спин-спинового взаимодействия между налетающей частицей и рассеивающими центрами. При этом величины $a^{(i)}$, $A^{(i)}$ следует рассматривать как операторы в спиновом пространстве частицы и системы центров^{/3/}. Необходимо, однако, подчеркнуть, что для частиц с отличным от нуля спином система уравнений (1) в принципе может быть справедливой только в нерелятивистском приближении, когда можно корректно отделить спин от орбитального момента и говорить о рассеянии именно S -волн без примеси других орбитальных моментов. При скоростях, близких к скорости света, учет релятивистских эффектов, связанных с кинематическим поворотом спина, даже в случае потенциала взаимодействия, не

зависящего от спина, приводит к существенному видоизменению системы (1). Следует, однако, отметить, что в случае рассеяния релятивистских частиц с ненулевой массой пока из-за большой отдачи модель неподвижных центров не имеет отношения к реальности и является математической абстракцией.

Иная ситуация имеет место в случае частиц с массой покоя, равной нулю (например, фотонов). Здесь мы не можем перейти к нерелятивистскому пределу, хотя импульсы могут быть сколь угодно малы. Из-за поперечности электромагнитных волн матрица рассеяния в принципе не может быть диагональной по орбитальному моменту, так что говорить о рассеянии S-волн было бы просто бессмысленно. Аналогом S-рассеяния является дипольное рассеяние электромагнитных волн, при котором фотон находится в состоянии с полным моментом 1 и отрицательной четностью (когерентная суперпозиция S- и D-волн, см. [8]).

В настоящей работе мы рассмотрим многократное рассеяние электромагнитных волн на системе дипольных центров и получим систему уравнений, аналогичную (1). Как мы увидим ниже, эта система уравнений существенно отличается от (1). Особенно подробно мы рассмотрим задачу о рассеянии на двух дипольных центрах.

Для простоты мы будем придерживаться классического рассмотрения. Квантовая трактовка (рассеяние фотонов) приводит к тем же результатам, в чем можно убедиться с помощью диаграммной техники.

2. Рассеяние электромагнитных волн на двух дипольных центрах

Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн на двух неподвижно закрепленных точечных дипольных рассеивателях, каждый из которых обладает нулевым зарядом. Пусть амплитуды рассеяния электромагнитных волн на изолированных центрах равны $a_1(\vec{e}^{(1)}\vec{e}^{(2)})$ и $a_2(\vec{e}^{(1)}\vec{e}^{(2)})$. Здесь $\vec{e}^{(1)}$ и $\vec{e}^{(2)}$ — векторы поляризации до и после рассеяния соответственно, a_1 и a_2 не зависят от угла. Найдем амплитуду рассеяния на единой системе, состоящей из точечных дипольных центров 1 и 2, не взаимодействующих друг с другом в отсутствие электромагнитной волны.

Механизм дипольного рассеяния, как известно, следующий. Под действием электрического поля электромагнитной волны у частицы возникает переменный дипольный момент

$$D_{\alpha} = T_{\alpha\beta} \epsilon_{\beta}^{(1)} \exp(i\vec{k}\vec{R}_1 - i\omega t), \quad (2)$$

где $T_{\alpha\beta}$ — тензор поляризуемости. В результате происходит излучение электромагнитных волн и амплитуда рассеяния записывается в виде

$$M = k^2 T_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^{(2)} \epsilon_{\beta}^{(1)}, \quad (3)$$

где $\vec{k} = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор электромагнитной волны. Для одиночного симметричного рассеивателя $T_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$. Очевидно, $a_1 = k^2 T_1$, $a_2 = k^2 T_2$. При наличии двух центров каждый из них находится в суммарном поле, состоящем из поля падающей электромагнитной волны и поля переменного дипольного момента другого центра. Собственное поле излучения, как обычно, учитывается наличием мнимой части у амплитуд рассеяния a_1 и a_2 . Согласно оптической теореме для чисто упругого дипольного рассеяния

$$\text{Im} a_{1(2)} = \frac{k}{4\pi} \sigma_{1(2)} = \frac{2}{3} k |a_{1(2)}|^2. \quad (4)$$

Пусть дипольный момент первого центра

$$\vec{D}_1 = \vec{d}_1 \exp(i\vec{k}\vec{R}_1 - i\omega t) = :_1(\vec{e}^{(1)} + \vec{E}_2) \exp(i\vec{k}\vec{R}_1 - i\omega t), \quad (5a)$$

а дипольный момент второго центра

$$\vec{D}_2 = \vec{d}_2 \exp(i\vec{k}\vec{R}_2 - i\omega t) = :_2(\vec{e}^{(1)} + \vec{E}_1) \exp(i\vec{k}\vec{R}_2 - i\omega t). \quad (5b)$$

Здесь $\vec{e}^{(1)}$ — электрическое поле падающей волны, а \vec{E}_2 (\vec{E}_1) — электрическое поле второго (первого) центра в точке нахождения первого (второго) центра. Пользуясь известной формулой для напряженности электрического поля на расстоянии R от переменного точечного диполя [8], мы можем написать

$$\vec{E}_1 = [d_1 \left(\frac{k^2}{R} + \frac{i\vec{k}}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{d}_1 \vec{n}) \left(-\frac{k^2}{R} - \frac{3i\vec{k}}{R^2} + \frac{3}{R^3} \right)] \exp(i\vec{k}\vec{R} - i\omega t) =$$

$$= [\exp(-i\vec{k}\vec{R})] [d_1 + \vec{V}(\vec{d}_1 \vec{V})] (\exp i\vec{k}\vec{R}) / R, \quad (6a)$$

$$\vec{E}_2 = [d_2 \left(\frac{k^2}{R} + \frac{i\vec{k}}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{d}_2 \vec{n}) \left(-\frac{k^2}{R} - \frac{3i\vec{k}}{R^2} + \frac{3}{R^3} \right)] \exp(i\vec{k}\vec{R} + i\vec{k}\vec{R}_1).$$

Здесь $\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, $R = |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|$ — расстояние между центрами, \vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{R} .

Легко видеть, что с учетом влияния двух дипольных центров друг на друга эффективные тензоры поляризуемости перестают быть изотропными. При этом общая структура d_1 и d_2 имеет вид

$$\vec{d}_{1(2)} = a_{1(2)} \vec{e}^{(1)} + \beta_{1(2)} \vec{n}(\vec{e}^{(1)} \vec{n}), \quad (7)$$

где α и β — константы.

Подставляя выражение (8б) и (5а), с учетом (7) мы получим

$$\alpha_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \beta_1 \vec{n} \cdot (\vec{e}^{(1)} \vec{n}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} [t_1 + t_1 \alpha_2 (\frac{k^2}{R} + \frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3}) \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R})] + \vec{n} \cdot (\vec{e}^{(1)} \vec{n}) [t_1 \alpha_2 (\frac{3}{R^3} - \frac{3ik}{R^2} - \frac{k^2}{R}) + 2t_1 \beta_2 (\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2})] \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R}). \quad (8)$$

Аналогичное соотношение получается после подстановки (8а) в (5б), нужно только в (8) произвести замену:

$$\alpha_1 \rightleftharpoons \alpha_2, \quad \beta_1 \rightleftharpoons \beta_2, \quad t_1 \rightarrow t_2, \quad \vec{k}\vec{R} \rightarrow -\vec{k}\vec{R}.$$

Мы фактически получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Переходя по формуле (3) к амплитуде рассеяния, мы можем написать

$$M = [A_1 (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}) + B_1 (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{n}) (e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \vec{n})] \exp(-i\vec{q}\vec{R}_1) + [A_2 (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}) + B_2 (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{n}) (e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \vec{n})] \exp(-i\vec{q}\vec{R}_2), \quad (9)$$

где

$$A_{1(2)} = a_{1(2)} + \frac{a_{1(2)} A_{2(1)}}{R} (1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}) \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R}_{21(12)}) \\ B_{1(2)} = [2 a_{1(2)} B_{2(1)} (\frac{1}{kR} - i) \frac{1}{kR^2} - \frac{a_{1(2)} A_{2(1)}}{R} (1 + \frac{3i}{kR} - \frac{3}{k^2 R^2})] \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R}_{21(12)}) \\ (\vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12} = \vec{R}). \quad (10)$$

Отсюда

$$A_1 = [a_1 + \frac{a_1 a_2}{R} (1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}) \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R})] \times \\ \times [1 - \frac{a_1 a_2}{R^2} (1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2})^2 \exp 2ikR]^{-1}, \\ A_2 = [a_2 + \frac{a_1 a_2}{R} (1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}) \exp(ikR - i\vec{k}\vec{R})] \times \\ \times [1 - \frac{a_1 a_2}{R^2} (1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2})^2 \exp 2ikR]^{-1}. \quad (11)$$

Для B_1 и B_2 мы получим равенства:

$$B_{1(2)} = -[\frac{2 a_2 a_1}{kR^3} A_{1(2)} (\frac{1}{kR} - i) (1 + \frac{3i}{kR} - \frac{3}{k^2 R^2}) \exp 2ikR +$$

$$+ \frac{a_{1(2)} A_{2(1)}}{R} (1 + \frac{3i}{kR} - \frac{3}{k^2 R^2}) \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R}_{21(12)})] \times \\ \times [1 - \frac{4 a_1 a_2}{k^2 R^4} (\frac{1}{kR} - i) \exp 2ikR]^{-1}, \quad (12)$$

где A_1 и A_2 определяются по формуле (11).

3. Предельные формулы

Рассмотрим сначала случай $kR \gg 1$. Пренебрегая членами порядка $(kR)^{-1}$, мы получим

$$A_1 = \frac{a_1 + \frac{a_1 a_2}{R} \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R})}{1 - \frac{a_1 a_2}{R} \exp 2ikR}, \\ A_2 = \frac{a_2 + \frac{a_1 a_2}{R} \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R})}{1 - \frac{a_1 a_2}{R} \exp 2ikR}, \quad (13)$$

$$B_1 = A_1 \frac{2 a_1 a_2}{kR^3} i \exp 2ikR - \frac{a_1 A_2}{R} \exp(ikR + i\vec{k}\vec{R}) \\ B_2 = A_2 \frac{2 a_1 a_2}{kR^3} i \exp 2ikR - \frac{a_2 A_1}{R} \exp(ik - i\vec{k}\vec{R}). \quad (14)$$

Так как из условия унитарности для дипольного рассеяния следует, что $a \leq \frac{\lambda}{2\pi}$ ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$), в предельном случае, который мы рассматриваем, $a \ll R$. Отсюда ясно, что $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$. Очевидно, что при расчете сечения величинами B_1 и B_2 можно пренебречь. После усреднения по R (или по разбросу частот при строго закрепленных центрах) мы приходим к известному результату о некогерентном сложении сечений:

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{8\pi}{3} (|a_1|^2 + |a_2|^2).$$

Перейдем теперь к более интересному случаю — $kR \ll 1$. С квантовой точки зрения при этом имеет место многократное рассеяние виртуальных фотонов с отличной от нуля продольной компонентой поляризации.

С точностью до членов, которые в абсолютную величину A и B вносят вклад порядка $kR \ll 1$, мы можем написать

Правильный учет вклада многократного рассеяния в действительную и мнимую части амплитуд A и B мы проанализируем ниже.

$$A_{1(2)} = \frac{k^2 R^3 a_{1(2)} - a_1 a_2 k^2 R^3}{k^4 R^6 - 4 a_1 a_2}, \quad (15)$$

$$B_{1(2)} = 3 \frac{2 a_1 a_2 A_{1(2)} + a_{1(2)} A_{2(1)} k^2 R^3}{k^4 R^6 - 4 a_1 a_2}. \quad (16)$$

В предельном случае $a_{1(2)} \gg k^2 R^3$,

$$A_1 = A_2 = k^2 R^3, \quad B_1 = B_2 = -\frac{3}{2} k^2 R^3. \quad (17)$$

При $a_{1(2)} \ll k^2 R^3$

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad B_1 = B_2 = \frac{3 a_1 a_2}{k^2 R^3}. \quad (18)$$

Мы видим, что если в случае S -рассеяния ^{/2/} параметром многократного рассеяния является величина a/R , для электромагнитных волн при $R \ll \lambda$ параметром многократного рассеяния является величина $\frac{a \lambda^3}{R^3}$. При $R \gg \lambda$ параметром многократного рассеяния снова является величина $\frac{a}{R}$. В этом случае каждый из центров находится в поле свободного излучения (волновой зоне) другого центра. Заметим, что при стремлении длины волны к бесконечности сечение рассеяния на двух центрах стремится к нулю пропорционально $\frac{1}{\lambda^4}$. Этот результат находится в полном соответствии с формулой Рэлея для случая рассеяния электромагнитных волн на нейтральной системе зарядов в длинноволновом пределе.

4. Оптическая теорема и полное сечение

Рассмотрим полное сечение упругого рассеяния электромагнитных волн на системе двух дипольных центров в длинноволновом приближении ($kR \ll 1$). Будем считать, что неупругие процессы отсутствуют.

Для простоты предположим, что $a_1 = a_2 = a$. Тогда при $kR \ll 1$ (см. 15,16)

$$M = 2A(\vec{e}^{(1)} \vec{e}^{*(2)}) + 2B(\vec{e}^{(1)} \vec{n})(\vec{e}^{*(2)} \vec{n}),$$

где

$$A = \frac{k^2 R^3 a}{a + k^2 R^3}, \quad B = \frac{3 a^2 k^2 R^3}{(k^2 R^3 - 2a)(k^2 R^3 + a)}. \quad (19)$$

Для полного сечения упругого рассеяния нетрудно получить формулу:

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{3} \{ 8|A|^2 + (4|B|^2 + 8 \operatorname{Re} AB^*) \sin^2 \psi \}, \quad (20)$$

где ψ - угол между векторами \vec{k} и \vec{n} .

Решение системы (10), очевидно, должно быть самосогласованным, т.е. если для каждого из дипольных центров справедлива оптическая теорема, она должна быть справедлива и в случае рассеяния на двух центрах.

С точки зрения оптической теоремы для неполяризованной электромагнитной волны

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{k} \overline{\operatorname{Im} M}. \quad (21)$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{k} [\operatorname{Im}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(B_1 + B_2) \sin^2 \psi]. \quad (22)$$

или, при $kR \ll 1$

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{k} (2 \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B \sin^2 \psi). \quad (22a)$$

Сравнивая (20) и (22a), получаем:

$$\operatorname{Im} A = \frac{4}{3} k |A|^2, \quad (23a)$$

$$\operatorname{Im} B = \frac{4}{3} k |B|^2 + \frac{8}{3} k \operatorname{Re}(A^* B). \quad (23b)$$

При проверке соотношений (23) необходимо учесть, что формулы (19) справедливы с точностью до членов, вносящих в $|A|$ и $|B|$ вклад порядка $kR \ll 1$. Однако при вычислении мнимой части амплитуды необходимо пользоваться общими формулами (11-12), в которых следует произвести корректный переход к пределу $kR \rightarrow 0$. Это связано с тем, что члены, которые вносят малый вклад в $|A|$ и $|B|$ могут вносить основной вклад в мнимые части амплитуд A и B (ср. ^{/2/}).

Путем сравнительно громоздких, но простых вычислений можно показать, что соотношения (23) непосредственно следуют из общего решения (11-12).

Рассмотрим частный случай.

Согласно (18) $|A| = |a|$, $B = 0$. Поскольку при этом

$$\operatorname{Im} a = \frac{2}{3} k |a|^2 \ll \operatorname{Re} a,$$

$$\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} a. \quad (24)$$

В то же время

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \lim_{kR \rightarrow 0} \frac{a}{1 - \frac{a}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}\right) \exp i k R} =$$

$$\approx \operatorname{Im} a + |a|^2 \lim_{kR \rightarrow 0} \left[\frac{\sin kR}{R} \left(1 - \frac{1}{k^2 R^2}\right) + \frac{\cos kR}{k R^2} \right] = 2 \operatorname{Im} a. \quad (25)$$

Соотношения (24) и (25) имеют место также в случае S-рассеяния на двух одинаковых центрах в длинноволновом пределе, когда параметр многократного рассеяния $a/R \ll 1$.

5. Рассеяние электромагнитных волн на произвольном числе

дипольных центров.

Бесконечно широкий слой

Систему алгебраических уравнений для амплитуды рассеяния электромагнитных волн на совокупности N неподвижных дипольных центров нетрудно получить тем же методом, что и систему (10) для рассеяния на двух дипольных центрах.

Результирующая амплитуда рассеяния на N дипольных центрах может быть записана в виде:

$$M = \sum_{i=1}^N L_{\alpha\beta}^{(i)} e^{*i(2)} e_{\beta}^{(i)} \exp(-i q R^{(i)}), \quad (26)$$

где тензоры $L_{\alpha\beta}^{(i)}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$L_{\alpha\beta}^{(i)} = a^{(i)} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k \neq i} \frac{a^{(i)} L_{\alpha\beta}^{(k)}}{R^{(ik)}} \exp(i k R^{(ki)} + i k R^{(ki)}) +$$

$$+ \frac{1}{k^2} \sum_{k \neq i} (\exp i k R^{(ki)}) (L_{\alpha\gamma}^{(k)} \vec{V}_{\gamma}^{(i)}) \vec{V}_{\beta}^{(i)} \frac{\exp i k R^{(ki)}}{R^{(ik)}}, \quad (27)$$

где $\vec{V}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial R^{(i)}}$, $R^{(ki)} = R^{(k)} - R^{(i)}$, $R^{(ik)} = |R^{(ki)}|$.

Тензоры $L_{\alpha\beta}^{(k)}$ можно представить в виде:

$$L_{\alpha\beta}^{(k)} = A^{(k)} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\ell \neq k} \sum_{m, n} \frac{b^{(\ell)} a^{(m)}}{R^{(k\ell)}} \frac{b^{(\ell)} a^{(m)}}{R^{(k\ell)}} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), мы можем в принципе все коэффициенты $A^{(k)}$, $b^{(\ell)}$ выразить через величины:

$$a^{(i)} (i=1 \dots N) \quad \text{и} \quad R^{(ki)} (i \neq k; i=1 \dots N, k=1 \dots N).$$

Рассмотрим теперь прохождение электромагнитных волн через бесконечно широкий слой, состоящий из дипольных центров, хаотически распределенных с плотностью ρ . Будем считать, что поверхность слоя перпендикулярна волновому вектору \vec{k} . В силу симметрии эффективная амплитуда рассеяния i -ого центра зависит только от его расстояния от переднего края z . Таким образом, мы можем написать:

$$L_{\alpha\beta}^{(i)} = A(z^{(i)}) \delta_{\alpha\beta},$$

где $z \parallel \vec{k}$.

Применяя формулу (27) к бесконечно широкому слою (практически ширина слоя должна быть во много раз больше длины волны) и, учитывая поперечность электромагнитных волн, мы получим:

$$A(z) = a + \rho a \iint_V \frac{A(z')}{R'} \exp(i k R' + i k R') dv' +$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{\rho a}{k^2} \iint_V \vec{V}^2 [A(z') \frac{\exp(i k R' + i k R')}{R'}] dv', \quad (29)$$

где $R' = (x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2)^{1/2}$, a - амплитуда рассеяния на изолированном центре.

Выполняя интегрирование (ср. /3/), мы приходим к интегральному уравнению

$$A(z) = a + \frac{2\pi\rho a}{k} i \int_0^b A(y) dy +$$

$$+ \frac{2\pi\rho a}{k} i [\exp(-2ikz)] \int_a^b A(y) (\exp 2iky) dy + K, \quad (30)$$

где b - толщина слоя,

$$K = \frac{1}{3} \frac{\rho a}{k} \iint_V \vec{V}^2 [A(z') \frac{\exp(i k R' + i k R')}{R'}] dv'. \quad (31)$$

Простое вычисление после усреднения осциллирующих членов по малому разбросу частот дает:

$$K = \frac{4\pi}{3} A(z) \frac{\rho a}{k^2} \quad (32)$$

С учетом этого мы можем в уравнении (30) опустить член K , заменив a на величину

$$a' = a \left(1 - \frac{4\pi}{3} \frac{\rho a}{k^2}\right)^{-1} \quad (33)$$

При этом решение уравнения (30) может быть записано в виде:

$$A(z) = C_1 (\exp i(n-1)z) + C_2 [\exp(-ik(n+1)z)],$$

где

$$C_1 = \frac{2a'}{(n+1) - \frac{(n-1)^2}{n+1} \exp 2iknb}, \quad C_2 = \frac{n-1}{n+1} \frac{2a' \exp 2iknb}{(n+1) - \frac{(n-1)^2}{n+1} \exp 2iknb},$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{4\pi\rho a'}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{4\pi\rho a}{k^2} \left(1 - \frac{4\pi}{3} \frac{\rho a}{k^2}\right)^{-1}} \quad (34)$$

Легко видеть, что величина n имеет смысл показателя преломления среды. При этом

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho a}{k^2} \quad (35)$$

т.е. имеет место формула Лоренц-Лоренца^{/10/}.

Для пространственной решетки необходим специальный анализ, который впрочем, аналогичен соответствующему рассмотрению для S -волн (см. ^{/3/}, ^{/7/}). Можно показать, что в случае кубического кристалла (при условии, что колебаниями ядер в решетке можно пренебречь) показатель преломления можно представить в виде:

$$n = \sqrt{1 + \frac{4\pi a^2}{k d^3}} \quad (34a)$$

где

$$a'' = a \left(1 - \frac{4\pi a}{3k^2 d^3} + \xi \frac{a}{d} + \frac{2}{3} ika\right)^{-1} \quad (36)$$

^{x/} Анализ показывает, что формула типа (30) справедлива не только при $\lambda \gg d$ (d - среднее расстояние между центрами), когда законность перехода от суммирования к интегрированию очевидна, но при $\lambda \lesssim d$.

Здесь d - длина ребра ячейки, ξ - вещественная величина порядка 1, явного вида, которой мы здесь не будем приводить^{x/}. Величина a''/a равна отношению среднего поля в кристалле к истинному полю в узлах кристаллической решетки (см. в связи с этим работу Лакса^{/11/}).

Из соотношения (36) следует, что

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3k^2 d^3} \frac{a}{1 + \xi a/d + \frac{2}{3} ika} \quad (37)$$

Легко видеть, что если имеет место чисто упругое рассеяние ($\text{Im} a = \frac{2}{3} k|a|^2$), показатель преломления n - действительное число, т.е. в кристалле распространяется незатухающая электромагнитная волна. Затухание проходящей электромагнитной волны в кристалле обусловлено неупругими (некогерентными) процессами (см. ^{/3/}).

6. Резонансное рассеяние на системе дипольных центров

Рассмотрим резонансное рассеяние электромагнитных волн на двух одинаковых изотропных осцилляторах. Чтобы исследовать характер такого рассеяния, достаточно в общие формулы (11-12) подставить

$$a_1 = a_2 = \frac{r_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3} i r_0 \frac{\omega^3}{c}} \quad (38)$$

Здесь $\omega = kc$ - частота падающего излучения, ω_0 - резонансная частота осциллятора, r_0 - электромагнитный радиус. Вблизи резонанса

$$a = \frac{3}{4k} \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega - i\gamma/2} \quad (38a)$$

где $\gamma = \frac{2}{3} r_0 \frac{\omega_0^3}{c}$ - ширина резонанса. Будем считать, что при $a_1 = a_2 = a$ величины $A_1 + A_2$ и $B_1 + B_2$ можно представить в виде:

$$A_1 + A_2 = 2 \left[\frac{a \cos \frac{2kR}{2}}{1 - \frac{a}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}\right) \exp ikR} + \frac{a \sin \frac{2kR}{2}}{1 + \frac{a}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2}\right) \exp ikR} \right],$$

^{x/} В работе ^{/3/} было показано, что в случае рассеяния S -волн на кубической решетке $a'' = a \left(1 + \xi \frac{a}{d} + ika\right)^{-1}$, где ξ - та же величина, что и в формуле (36). Формула для ξ непосредственно следует из результатов работы ^{/7/}.

$$B_1 + B_2 = 2 \cos^2 \frac{kR}{2} \left[\frac{a}{1 - \frac{2a}{kR^2} \left(\frac{1}{kR} - i \right) \exp ikR} - \frac{a}{1 - \frac{a}{R} \left(1 + \frac{1}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2} \right) \exp ikR} \right] +$$

$$+ 2 \sin^2 \frac{kR}{2} \left[\frac{a}{1 + \frac{2a}{kR^2} \left(\frac{1}{kR} - i \right) \exp ikR} - \frac{a}{1 + \frac{a}{R} \left(1 + \frac{1}{kR} - \frac{1}{k^2 R^2} \right) \exp ikR} \right]. \quad (39)$$

Легко видеть, что каждый член в формулах (39) имеет резонансный характер. При $kR \ll 1$ мы можем написать (вблизи резонансных частот):

$$A_1 + A_2 = \frac{3}{4k} \left[\frac{\gamma_1}{\omega_0^{(1)} - \omega - i\gamma_1/2} + \frac{5}{2} \frac{\bar{\gamma}_1 \cos^2 \psi}{\bar{\omega}_0^{(1)} - \omega - i\bar{\gamma}_1/2} \right], \quad (40)$$

$$B_1 + B_2 = \frac{3}{4k} \left[\frac{\gamma_2}{\omega_0^{(2)} - \omega - i\gamma_2/2} - \frac{\gamma_1}{\omega_0^{(1)} - \omega - i\bar{\gamma}_1/2} \right] +$$

$$+ \frac{15}{8k} \cos^2 \psi \left[\frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\omega}_0^{(2)} - \omega - i\bar{\gamma}_2/2} - \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}_0^{(1)} - \omega - i\bar{\gamma}_1/2} \right]. \quad (41)$$

При этом, с точностью до членов, много меньших ширины γ ,

$$\omega_0^{(1)} = \left[\omega_0^2 + \frac{3}{2} \omega_0 \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3 - \frac{3}{4} \gamma \frac{c}{R} \right]^{1/2},$$

$$\omega_0^{(2)} = \left[\omega_0^2 - 3 \omega_0 \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3 - \frac{3}{2} \gamma \frac{c}{R} \right]^{1/2}, \quad (42)$$

$$\bar{\omega}_0^{(1)} = \left[\omega_0^2 - \frac{3}{2} \omega_0 \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3 + \frac{3}{4} \gamma \frac{c}{R} \right]^{1/2},$$

$$\bar{\omega}_0^{(2)} = \left[\omega_0^2 + 3 \omega_0 \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3 + \frac{3}{2} \gamma \frac{c}{R} \right]^{1/2}.$$

Соответствующие резонансные ширины связаны с шириной резонанса γ для изолированного осциллятора

$$\gamma_1 = 2\gamma \left(\frac{\omega_0^{(1)}}{\omega_0} \right)^2, \quad \gamma_2 = 2\gamma \left(\frac{\omega_0^{(2)}}{\omega_0} \right)^2, \quad (43)$$

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{5} \gamma \left(\frac{\bar{\omega}_0^{(1)}}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2, \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{1}{20} \gamma \left(\frac{\bar{\omega}_0^{(2)}}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2.$$

Из соотношений (42) сразу видно, что, хотя смещение резонансных частот может быть мало по сравнению с ω_0 , в длинноволновом пределе это смещение всегда существенно больше ширины γ .

Действительно, при $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$

$$\Delta\omega_0^{(1)} = \omega_0^{(1)} - \omega_0 = \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3, \quad \Delta\omega_0^{(2)} = \omega_0^{(2)} - \omega_0 = -\frac{3}{2} \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3, \quad (44)$$

$$\bar{\Delta}\omega_0^{(1)} = \bar{\omega}_0^{(1)} - \omega_0 = -\frac{3}{4} \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3, \quad \bar{\Delta}\omega_0^{(2)} = \bar{\omega}_0^{(2)} - \omega_0 = \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3.$$

Следовательно, при $\frac{c}{\omega_0 R} \gg 1$, $\frac{\Delta\omega_0}{\gamma} = \left(\frac{c}{\omega_0 R} \right)^3 \gg 1$.

При этом

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\gamma, \quad \bar{\gamma}_1 = 4\bar{\gamma}_2 = \frac{1}{5} \gamma \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2. \quad (45)$$

Если на систему, состоящую из двух осцилляторов, падает электромагнитное излучение с частотой ω_0 ($a = \frac{3}{2} i \frac{c}{\omega_0}$), то, как легко видеть, в результате смещения резонанса

$$A_1 = A_2 = R^3 \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2,$$

$$B_1 = B_2 = -\frac{3}{2} R^3 \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \quad (46)$$

в полном соответствии с результатами (17).

С помощью формулы (22) перейдем теперь к полному сечению рассеяния. В окрестности резонансных частот $\omega_0^{(1)}$, $\omega_0^{(2)}$, $\bar{\omega}_0^{(1)}$ и $\bar{\omega}_0^{(2)}$ мы можем написать

$$\sigma_1 = \frac{3\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(\omega_0^{(1)} - \omega)^2 + \gamma^2} (1 + \cos^2 \psi),$$

$$\sigma_2 = \frac{3\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(\omega_0^{(2)} - \omega)^2 + \gamma^2} \sin^2 \psi, \quad (47)$$

$\lambda \gg R$ В случае резонансного S-рассеяния на 2 центрах нетрудно показать, что при

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2k} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_0^{(1)} - \omega - i\gamma_1/2} + \frac{\bar{\gamma}_1 \cos^2 \psi}{\bar{\omega}_0^{(1)} - \omega - i\bar{\gamma}_1/2} \right),$$

где ψ - угол между \vec{k} и \vec{R}

$$\omega_0^{(1)} = \omega_0 - \gamma \frac{c}{2\omega_0 R}, \quad \bar{\omega}_0^{(1)} = \omega_0 + \frac{1}{2} \gamma \frac{c}{\omega_0 R},$$

$$\gamma_1 = 2\gamma, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{6} \gamma \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2.$$

Первый резонанс с удвоенной шириной соответствует S-рассеянию. Второго, очень узкий резонанс, связан с R-волной. Его вклад в сечение рассеяния чрезвычайно мал вне узкой полосы частот (энергий) вблизи $\bar{\omega}_0$.

$$\sigma_3 = \frac{15}{8k^2} \pi \frac{\bar{\gamma}_1^2}{(\bar{\omega}_0^{(1)} - \omega)^2 + \frac{1}{4} \bar{\gamma}_1^2} \cos^2 \psi (1 + \cos^2 \psi),$$

$$\sigma_4 = \frac{15}{32k^2} \pi \frac{\bar{\gamma}_2^2}{(\bar{\omega}_0^{(2)} - \omega)^2 + \frac{1}{4} \bar{\gamma}_2^2} \sin^2 2\psi. \quad (47)$$

Заметим, что первые два резонанса с частотами $\omega_0^{(1)}$ и $\omega_0^{(2)}$ соответствуют чисто дипольному рассеянию. Каждый из остальных резонансов (частоты $\bar{\omega}_0^{(1)}$ и $\bar{\omega}_0^{(2)}$), как нетрудно показать, соответствует электрическому и магнитному дипольному рассеянию (на сферически несимметричной системе). Поскольку ширины $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ в длинноволновом пределе исчезающе малы, вкладом этих резонансов в полное сечение рассеяния при $\lambda \gg R$ можно пренебречь, если исключить из рассмотрения узкие полосы частот ($= \gamma (\frac{\omega_0 R}{c})^2$) в окрестности $\bar{\omega}_0^{(1)}$ и $\bar{\omega}_0^{(2)}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если $\psi = 0 (K \parallel R)$, величины V_1 и V_2 не дают вклада в амплитуду рассеяния. В этом случае остаются два резонанса с частотами $\omega_0^{(1)}$ и $\bar{\omega}_0^{(1)}$. Соответствующие угловые распределения имеют вид $(1 + \cos^2 \theta)$ для резонанса с частотой $\omega_0^{(1)}$ и $\cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)$ для резонанса с частотой $\bar{\omega}_0^{(1)}$. Если $\psi = \frac{\pi}{2}$, вклад узких резонансов в сечение рассеяния тождественно равен нулю. Интересно отметить, что в этом случае для волны с поляризацией по вектору \vec{n} резонансное рассеяние с частотой $\omega_0^{(1)}$ отсутствует. Оно имеет место только при $\omega = \omega_0^{(2)}$. Наоборот, для волны, поляризованной в направлении вектора $[\vec{k}, \vec{n}]$, резонансное рассеяние происходит только при частоте $\omega_0^{(1)}$. В связи с этим следует заметить, что совокупность одинаково ориентированных пар осцилляторов может служить хорошей моделью двоякопреломляющей среды.

До сих пор речь шла о чисто упругом рассеянии. При наличии поглощения соотношения (42-45) остаются в силе; при этом $\gamma \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ имеют смысл парциальных ширин, соответствующих упругому рассеянию. Что касается ширин, связанной с поглощением, то она остается такой же, как и для изолированного осциллятора. В частности, при $kR \ll 1$, $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$

^{x/} Следует отметить, что при $\frac{c}{\omega_0} = R$ все четыре ширины имеют порядок величины γ . При этом смещение резонансных частот того же порядка, что и ширина γ . При $\frac{\omega_0 R}{c} \gg 1$: $\Delta\omega = \gamma \frac{c}{\omega_0 R} \ll \gamma$.

$$\gamma_{\text{полн.}}^{(1)} = \gamma_{\text{полн.}}^{(2)} = 2\gamma + \gamma_{\text{погл.}}$$

$$\gamma^{(3)} = \gamma_{\text{погл.}} + \bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_{\text{полн.}}^{(4)} = \gamma_{\text{погл.}} + \bar{\gamma}_2. \quad (48)$$

где $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ определяются согласно (45).

Перейдем теперь к макроскопической среде. Мы уже показали, что в случае аморфного тела эффективная амплитуда рассеяния, входящая в показатель преломления, определяется по формуле (33). Подставляя в (33) выражение (38), мы получим резонансный член вида

$$a' = \frac{3}{4k} \frac{\gamma}{\omega_0' - \omega - i \frac{\gamma}{2}}$$

где γ - ширина резонансного рассеяния для изолированного осциллятора,

$$\omega_0' = \omega_0 - \pi \gamma \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^3 \rho \quad (49)$$

(мы считаем, что $\frac{\pi \gamma}{\omega_0} \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^3 \rho \ll 1$).

Заметим, что ширина резонанса при этом не меняется по сравнению со случаем изолированного осциллятора. Подчеркнем, что при рассеянии электромагнитных волн смещение резонанса отлично от нуля даже в аморфном теле, в то время как при рассеянии обычных частиц (например, нейтронов) такое смещение может иметь место только в кристаллических телах^{/7/}.

При резонансном рассеянии электромагнитного излучения на пространственной решетке, помимо смещения типа (49), возникает дополнительное смещение резонансной частоты, имеющее ту же природу, что и в случае S-волн. При этом ширина, соответствующая чисто упругому рассеянию, полностью исчезает (ср. ^{/7/}). Действительно, с учетом формул (36) и (38) для полного сечения резонансного рассеяния электромагнитных волн в кубическом кристалле (в расчете на один дипольный центр) мы получим следующее выражение:

$$\sigma'' = \frac{4\pi}{k} \text{Im} a' = \frac{3\pi}{2k^2} \frac{\gamma(\gamma_{\text{полн.}} - \gamma)}{(\omega_0'' - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_{\text{полн.}} - \gamma}{2}\right)^2}, \quad (50)$$

где $\gamma_{\text{полн.}}$ - полная ширина резонанса на изолированном центре, γ - ширина, соот-

ветствующая упругому рассеянию, ω_0'' -резонансная частота, связанная с частотой ω_0 для изолированного центра соотношением

$$\omega_0'' = \omega_0 - \frac{\pi}{d^3} \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^3 \gamma + \frac{3}{4} \xi \gamma \left(\frac{c}{\omega_0 d}\right). \quad (51)$$

Следует отметить, что если вклад неупругих процессов в полное сечение рассеяния не слишком велик, в длинноволновом пределе смещение резонансной частоты может быть гораздо больше ширины резонанса. При $\lambda \ll d$ ($\lambda \ll \rho^{1/3}$) смещение резонанса во много раз меньше ширины и, по-видимому, им можно пренебречь.

7. Заключительные замечания

Совершенно аналогичным методом может быть исследован вопрос о дипольном излучении в коллективе, состоящем из 2 и более излучателей. В частности, в соответствии с результатами настоящей работы, ясно, что при излучении электромагнитных волн молекулой (ядром, атомом), окруженной совокупностью невозбужденных молекул (ядер, атомов) того же вида, будет иметь место изменение ширины линии по сравнению со случаем изолированного излучателя, а также сдвиг частоты излучения^{xx/}. С квантовой точки зрения за счет взаимодействия с полем излучения соседних центров у данного центра происходит смещение энергетических уровней. При отсутствии сферической симметрии (например, два центра с координатами \vec{R}_1 и \vec{R}_2) возникает к тому же расщепление энергетических уровней. Более детальный анализ этих и других проблем, связанных с излучением электромагнитных волн системой дипольных центров, мы предполагаем провести в отдельной работе.

Следует отметить, что применение результатов, следующих из модели неподвижных центров, к конкретным реальным системам (молекулам, кристаллам и т.д.) требует специального рассмотрения. Это относится как к дипольному рассеянию электромагнитных волн, так и к случаю S-рассеяния обычных частиц. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы^{xxx/}.

^{x/} При резонансном рассеянии S-волн в кубическом кристалле $\omega_0'' = \omega_0 + \frac{1}{4} \xi \gamma \frac{c}{\omega_0 d}$. Зависимость смещения резонанса от параметров пространственной решетки (и тем самым выражение для ξ) была найдена в работе^{7/}.

^{xx/} В радиодиапазоне эти эффекты известны и неоднократно отмечались в литературе (квантовый расчет см. в книге Файна^{12/}, см. также работу^{13/}).

^{xxx/} Применение модели 2 центров к рассеянию нейтронов на двухатомной молекуле частично рассмотрено в работе^{2/}.

В заключение необходимо подчеркнуть, что мы ограничивались исследованием рассеяния электромагнитных волн на нейтральных дипольных центрах, которые при отсутствии внешнего поля между собой не взаимодействуют. Если центры заряжены, в исходных уравнениях типа (8) необходимо учитывать наличие кулоновского взаимодействия между ними. В результате член, пропорциональный $\frac{1}{R^3}$, из уравнений выпадает, и параметром многократного рассеяния при $\lambda \gg R$ является уже величина порядка $\frac{a}{R}$; а не $\frac{a\lambda^2}{R^2}$, как в случае нейтральных центров. Для системы связанных зарядов, удерживаемых внутренними бесконечно жесткими силами неэлектромагнитного происхождения, последовательное рассмотрение в рамках метода, изложенного в настоящей работе, как и следовало ожидать, в длинноволновом пределе приводит к томсоновской формуле:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\sum e^{(i)}}{mc^2},$$

где

$$m = \sum_i m^{(i)} + \frac{1}{4} \sum_{i \neq k} \frac{e^{(i)} e^{(k)}}{R^{(ik)}} \frac{1}{c^2}.$$

Здесь $e^{(i)}$ и $m^{(i)}$ - величина и масса i -ого заряда, m - полная масса системы с учетом энергии взаимодействия зарядов. При $m \rightarrow \infty$ (неподвижные центры) сечение σ_T стремится к нулю.

Автор выражает глубокую благодарность М.И. Подгорецкому за интерес к работе, обсуждение результатов и ценные советы.

Л и т е р а т у р а

1. M. Goldberger and K. Watson. Theory of Collision, New York, 1964.
2. В.Г. Барышевский, В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ, Р-2111, Дубна, 1965.
3. В.Г. Барышевский, В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ, Р-2230, Дубна, 1965.
4. G.F. Chew and G.C. Wick. Phys. Rev., 85, 636 (1952).
5. K.A. Brueckner. Phys. Rev., 89, 834 (1953).
6. И. Амирханов, В.Ф. Демин, Б.Н. Захарьев, И.И. Кузьмин. Препринт ОИЯИ, Р-2564, Дубна, 1965.
7. Ю. Каган, А.М. Афанасьев. ЖЭТФ, 50, 271 (1966).
8. А.И. Ахизер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, гл. 1, § 4. ГИФМЛ, 1959.
9. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля, § 72, ГИТТЛ, 1960.
10. Г.С. Ландсберг. Оптика, § 149, ГИТТЛ, 1952.
11. В.М. Файн и Я.И. Ханин. Квантовая радиофизика, "Советское радио", 1965.
12. M. Lax. Rev. Mod. Phys., 23, 287 (1951).
13. А.М. Афанасьев, Ю.Каган. ЖЭТФ, письма, 2, 130 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел 17 августа 1966 г.