ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2890

В.Н. Ефимов

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ НУКЛОНОВ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1966

4536/3 нр.

Р - 2890

В.Н. Ефимов

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ НУКЛОНОВ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

§ 1. Введение

Решение квантовомеханической задачи трех взаимодействующих частиц связано с большими математическими трудностями и требует привлечения приближенных методов. В случае нуклонов короткодействующий характер ядерных сил позволяет получить для волновой функции приближения, учитывающие малость радиуса взаимодействия r_0 относительно линейных размеров системы. В предельном случае нулевого радиуса сил Скорняковым и Тер-Мартиросяном[1] были получены одномерные интегральные уравнения для парциальных амплитуд $n-d$ -рассеяния. Для связанного состояния трех нуклонов приближение $r_0 = 0$ неприменимо, так как при этом происходит стягивание частиц в центр, и для этого случая Скорняков[2], предложил итерационный метод, учитывающий конечность радиуса взаимодействия r_0. Уравнения в следующем, линейном приближении по r_0 для волновой функции системы трех частиц при наличии между ними короткодействующих резонансных сил были получены Даниловым[3].

При выводе уравнений в нулевом[1] и линейном[3] приближениях по r_0, а также уравнений работы[2], существенным образом используется тот факт, что при малых энергиях поведение волновой функции системы трех частиц в области действия ядерных сил определяется в основном наличием двухчастичного уровня (реального или виртуального) с небольшой энергией. В таком случае волновая функция в пределах потенциала меняется достаточно плавно (по крайней мере сильно не осциллирует), и для ее определения удобно воспользоваться хорошо известным методом решения интегральных уравнений – методом моментов[4] или более общим методом Бубнова-Галеркина (БГ)[5]. Ниже будет рассмотрено применение метода БГ к задаче трех нуклонов, взаимодействие которых характеризуется парными локальными потенциалами, имеющими центральный характер. В этом случае метод БГ заключается в разложении волновой функции в области действия потенциала, по полной ортонормированной системе функций, радиальные части которых можно выбрать в виде полиномов, ортогональных с весом, определяемым радиальной зависимостью потенциала[6,7]. При таком выборе базисных функций нулевое приближение метода БГ соответствует замене волновой функции в области действия потенциала ее средним значением по этой области. Решение в нулевом приближении метода БГ оказывается справедливым с точностью включительно до членов, линейных по радиусу взаимодействия r_0, причем оно совпадает с точным решением уравнения Шредингера для системы трех нуклонов, взаимодействие которых описывается нелокальным факторизующимся потенциалом Ямагучи /8/. При соответствующем предельном переходе нулевое приближение метода БГ приводит к уравнениям в нулевом /1/ и линейном /3/ приближениях по r_0.

В общем случае решение методом БГ уравнения Шредингера для трех нуклонов сводится к решению системы одномерных интегральных уравнений, структура которых такова, что с их помощью легко исключить потенциалы из исходного уравнения и получить для волновой функции уравнения Фаддеева /11/, содержащие вместо потенциалов парные t -матрицы.

§ 2. Три бесспиновых тождественных частицы

1. Рассмотрим сначала систему трех бесспиновых тождественных частиц с массами m, взаимодействие которых определяется парными короткодействующими потенциалами. В системе центра масс волновая функция зависит только от внутренних координат, в качестве которых можно выбрать следующие координаты Якоби:

$$\vec{s}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \qquad \vec{\rho}_1 = -\vec{r}_1 + \tfrac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3), \tag{1}$$

где $\vec{r}_i$ -радиус-вектор i -ой частицы. Координатам $\vec{s}_1, \vec{\rho}_1$ соответствуют импульсы $\vec{k}_1$, $\vec{q}_1$, связанные с импульсами $\vec{p}_i$ индивидуальных частиц соотношениями:

$$\vec{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{p}_3 - \vec{p}_2), \quad \vec{q}_1 = -\frac{2}{3}\vec{p}_1 + \frac{1}{3}(\vec{p}_2 + \vec{p}_3). \tag{2}$$

В дальнейшем будут использоваться также координаты и импульсы, которые получаются из (1) и (2) путем перестановки P_{1i} частицы 1 и частицы $i(i=2,3)$:

$$\begin{aligned} \vec{s}_i &= P_{1i}\vec{s}_1, & \vec{\rho}_i &= P_{1i}\vec{\rho}_1, \\ \vec{k}_i &= P_{1i}\vec{k}_1, & \vec{q}_i &= P_{1i}\vec{q}_1. \end{aligned} \tag{3}$$

При перестановках P_{ik} частиц i и k координаты (1) и импульсы (2) преобразуются согласно следующему ортогональному представлению /9/:

$$(P_{23}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (P_{12}) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (P_{13}) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Это обстоятельство приводит к тому, что при переходе от координат (1) и импульсов (2) к координатам и импульсам (3) будут инвариантными выражения k^2+q^2 и $\vec{k}\vec{s}+\vec{q}\vec{\rho}$, а также элементы объемов $d\vec{s}d\vec{\rho}$ и $d\vec{k}d\vec{q}$.

2. Волновая функция $\Psi(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)$ системы трех тождественных частиц должна быть симметричной относительно любых перестановок частиц:

$$\Psi(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)=\Psi(-\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)=\Psi(\vec{s}_2,\vec{\rho}_2)=\Psi(\vec{s}_3,\vec{\rho}_3). \quad (5)$$

Перейдем далее от $\Psi(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)$ к ее фурье - компоненте по переменной $\vec{\rho}_1$:

$$\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)=\int d\vec{\rho}_1\,\Psi(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)e^{-i\vec{q}_1\vec{\rho}_1}.$$

Принимая во внимание условие симметрии (5), для $\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ легко получить следующее интегральное уравнение:

$$\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{s}_1-\vec{s})}}{k^2+q_1^2-Z}\,f(s)\Psi(\vec{s},\vec{q}_1)+$$
$$+\frac{2V}{(2\pi)^3\sqrt{3}}\int d\vec{q}\,d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{s}_1\vec{p}-i\vec{s}\vec{p}_1}+e^{-i\vec{s}_1\vec{p}+i\vec{s}\vec{p}_1}}{q_1^2+q^2+\vec{q}_1\vec{q}-\frac{3}{4}Z}\,f(s)\Psi(\vec{s},\vec{q}), \quad (6)$$

где $-\frac{3}{4}Vf(s)$ – потенциал взаимодействия между частицами, $Z=E+i0$, $E=\frac{4}{3}E_0$,

E_0 – энергия в системе центра масс, причем используется система единиц, в которой $m=\hbar=1$. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{p}_1$ определены следующим образом:

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}_1+\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}, \quad \vec{p}_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}. \quad (7)$$

Строго говоря, уравнение (6) пригодно для конкретного решения только для связанного состояния, так как оно не содержит граничных условий и, следовательно, его решение однозначно не определено. Чтобы учесть вполне определенным образом граничные условия, будем искать, следуя /1/, волновую функцию $\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ в виде:

$$\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)=(2\pi)^3\phi_d(s_1)\delta(\vec{q}_1-\vec{q}_d)+\frac{F(\vec{s}_1,\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0}, \quad (8)$$

где $\phi_d(s_1)$ – волновая функция связанного S-состояния частиц 1 и 3, которая удовлетворяет уравнению:

$$\phi_d(\vec{s}_1) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{s}_1-\vec{s})}}{k^2+\alpha^2}\,f(s)\phi_d(s). \tag{9}$$

Представление $\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ в виде (8) соответствует случаю рассеяния частицы 1 с начальным импульсом $\vec{q}_0$ на связанном состоянии двух других, при этом $E = q_0^2 - \alpha^2$, где $\frac{3}{4}\alpha^2$ – энергия связи частиц 2 и 3. Уравнение для $F(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ вытекает из (6), (8) и (9):

$$\frac{F(\vec{s}_1,\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0} = \Phi(\vec{s}_1,\vec{q}_1,\vec{q}_0) + \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{s}_1-\vec{s})}}{k^2+q_1^2-Z}\,f(s)\,\frac{F(\vec{s},\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0} +$$

$$+\frac{2V}{(2\pi)^3\sqrt{3}}\int d\vec{q}\,d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{s}_1\vec{p}-i\vec{s}\vec{p}_1}+e^{-i\vec{s}_1\vec{p}+i\vec{s}\vec{p}_1}}{q_1^2+q^2+\vec{q}_1\vec{q}-\frac{3}{4}Z}\,f(s)\,\frac{F(\vec{s},\vec{q})}{q^2-q_0^2-i0}, \tag{10}$$

где

$$\Phi(\vec{s}_1,\vec{q}_1,\vec{q}_0) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\left(e^{i\vec{s}_1\vec{p}_0}+e^{-i\vec{s}_1\vec{p}_0}\right)\phi_d(p_{10}),$$

$$\phi_d(p) = \int d\vec{s}\,\phi_d(s)\,e^{-i\vec{s}\vec{p}}, \tag{11}$$

$$\vec{p}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}_0, \quad \vec{p}_{10} = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}_0. \tag{12}$$

Предположим теперь, что $f(s)$ является знакопостоянной функцией. Тогда, как и в случае двух нуклонов /10/x/, можно определить полную систему ортогональных функций ϕ_n, удовлетворяющих условию (I , 2), и представить $F(\vec{s},\vec{q})$ в виде ряда:

$$F(\vec{s},\vec{q}) = \sum_n \phi_n(\vec{s})F_n(\vec{q}), \tag{13}$$

где

$$F_n(\vec{q}) = \int d\vec{s}\,f(s)\,\phi_n^*(\vec{s})F(\vec{s},\vec{q}). \tag{13^1}$$

По аналогии с (I , 7) из (10) легко получить систему уравнений для коэффициентов разложения (13^1), которая в данном случае будет системой интегральных уравнений для функций $F_n(\vec{q})$

$$\frac{F_n(\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0} - \frac{V}{(2\pi)^3}\sum_m\int d\vec{k}\,\frac{M_n(\vec{k})M_m^*(\vec{k})}{k^2+q_1^2-Z}\,\frac{F_m(\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0} =$$

---

x/ Далее ссылки на формулы работы /10/ будут указываться как (I , ...).

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 [M_n(\vec{p}_0) + M_n(-\vec{p}_0)]\phi_d(p_{10}) +$$

$$+ \frac{2V}{(2\pi)^3\sqrt{3}} \sum_m \int d\vec{q} \, \frac{M_n(\vec{p}) M_m^*(\vec{p}_1) + M_n(-\vec{p}) M_m^*(-\vec{p}_1)}{q_1^2 + q^2 + \vec{q}_1\vec{q} - \frac{3}{4}Z} \, \frac{F_m(\vec{q})}{q^2 - q_0^2 - i0}, \tag{14}$$

где $M_n(\vec{p})$ определяется выражением (I , 8). Эту систему можно преобразовать, рассматривая правые части как неоднородности и разрешая ее алгебраически относительно $F_n(\vec{q}_1)$:

$$\frac{F_n(\vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 [c_n(\vec{p}_0, Z - q_1^2) + c_n(-\vec{p}_0, Z - q_1^2)]\phi_d(p_{10}) +$$

$$+ \frac{2V}{(2\pi)^3\sqrt{3}} \sum_m \int d\vec{q} \, [(q_1^2 + q^2 + \vec{q}_1\vec{q} - \frac{3}{4}Z)(q^2 - q_0^2 - i0)]^{-1} \times \tag{15}$$

$$\times [c_n(\vec{p}, Z - q_1^2) M_m^*(\vec{p}_1) + c_n(-\vec{p}, Z - q_1^2) M_m^*(-\vec{p}_1)] F_m(\vec{q}),$$

где $c_n(\vec{p}, Z)$ удовлетворяют системе уравнений (I ,7).

3. Волновая функция в импульсном представлении $\Psi(\vec{k}_1, \vec{q}_1)$ согласно (8) имеет следующий вид:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{q}_1) = (2\pi)^3 \phi_d(k_1)\delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_0) + \frac{F(\vec{k}_1, \vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0}. \tag{16}$$

Из выражений (10) и (13) легко видеть, что

$$\frac{F(\vec{k}_1, \vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} = (2\pi)^3 \phi_d(k_2)\delta(\vec{q}_2 - \vec{q}_0) + (2\pi)^3 \phi_d(k_3)\delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_0) +$$

$$+ \frac{V}{k_1^2 + q_1^2 - Z} \sum_n \left[\frac{M_n^*(\vec{k}_1) F_n(\vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} + \right. \tag{17}$$

$$\left. + \frac{M_n^*(\vec{k}_2) F_n(\vec{q}_2)}{q_2^2 - q_0^2 - i0} + \frac{M^*(k\ ) F\ (q\ )}{q_3^2 - q_0^2 - i0}\right],$$

где $\vec{k}_1, \vec{q}_1$ определяются выражениями (3). Соотношения (16) и (17) позволяют выразить волновую функцию $\Psi(\vec{k}_1, \vec{q}_1)$ в виде суммы трех слагаемых, отличающихся только перестановками координат:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{q}_1) = \psi(\vec{k}_1, \vec{q}_1) + \psi(\vec{k}_2, \vec{q}_2) + \psi(\vec{k}_3, \vec{q}_3), \tag{18}$$

где функция $\psi(\vec{k}, \vec{q})$ определяется следующим образом:

$$\psi(\vec{k}, \vec{q}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}_0)\phi_d(k) + \frac{V}{k^2 + q^2 - z} \sum \frac{M_n^*(\vec{k}) F_n(\vec{q})}{q^2 - q_0^2 - i0} . \tag{19}$$

Заметим, что в уравнение (15) входят те же самые суммы $\sum_n M_n^*(\vec{k}) F_n(\vec{q})$, что и в выражение (19). Это обстоятельство приводит к тому, что для $\psi(\vec{k}, \vec{q})$ из (15) и (19) можно получить следующее уравнение:

$$\psi(\vec{k}, \vec{q}) = (2\pi)^3 \phi_d(k) \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{1}{2\pi^2 (k^2 + q^2 - Z)} \times$$
$$\times \int d\vec{q}\,' \Big[t\Big(\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}\,', Z - q^2\Big) \psi\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}\,', \vec{q}\,'\Big) + \tag{20}$$
$$+ t\Big(\vec{k}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}\,' - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}\,', Z - q^2\Big) \psi\Big(-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}\,', \vec{q}\,'\Big)\Big],$$

при выводе которого было использовано выражение (I , 12) для t -матрицы. Полученное уравнение (20) с учетом соотношения (18) представляет собой известное уравнение Фаддеева /11/ для системы трех тождественных бесспиновых частиц.

4. В случае центральных сил полный орбитальный момент L является хорошим квантовым числом и функцию $F(\vec{s}, \vec{q})$ в (8) можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра P_L :

$$F(\vec{s}, \vec{q}) = \sum_L (2L+1) F_L(\vec{s}, \vec{q}) P_L\Big(\frac{\vec{q}\vec{q}_0}{qq_0}\Big), \tag{21}$$

причем для компонент $F_L(\vec{s}, \vec{q})$, в свою очередь, имеет место разложение:

$$F_L(\vec{s}, \vec{q}) = \sum_\ell F_{L\ell}(s, q) P_\ell\Big(\frac{\vec{s}\vec{q}}{sq}\Big). \tag{22}$$

Если в качестве базисных функций $\phi_n(\vec{s})$ выбрать функции (I , 3):

$$\phi_n(\vec{s}) = \phi_{\ell m\lambda}(\vec{s}) = s^\ell L_{\ell\lambda}(s) Y_{\ell m}\Big(\frac{\vec{s}}{s}\Big), \tag{23}$$

где $L_{\ell\lambda}(s)$ – ортогональные полиномы (I , 4), то в уравнении (15) можно отделить угловые переменные. Для этого заметим, что из (13^1) и (21)–(23) вытекает, что $F_n(\vec{q})$ имеет следующий вид:

$$F_n(\vec{q}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \sum_L (2L+1) F^{(L)}_{\ell\lambda}(q) P_L\left(\frac{\vec{q}\vec{q}_0}{qq_0}\right), \tag{24}$$

где

$$F^{(L)}_{\ell\lambda}(q) = \int_0^\infty s^2 ds f(s) s^\ell L_{\ell\lambda}(s) F_{L\ell}(s,q).$$

Далее из выражений (I ,7) и (I ,8) следует, что

$$M_n(\vec{p}) = M_{\ell m\lambda}(\vec{p}) = 4\pi i^\ell Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) M_{\ell\lambda}(p), \tag{25}$$

$$c_n(\vec{p},Z) = c_{\ell m\lambda}(\vec{p},Z) = 4\pi i^\ell Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) c_{\ell\lambda}(p,Z), \tag{26}$$

где

$$M_{\ell\lambda}(p) = \int_0^\infty s^2 ds f(s) s^\ell L_{\ell\lambda}(s) j_\ell(ps);$$

$j_\ell(ps)$ –сферическая функция Бесселя, а величины $c_{\ell\lambda}(p,Z)$ удовлетворяют системе уравнений (I , 16). Если теперь выражения (24)–(26) подставить в (15), то можно легко получить для функций $F^{(L)}_{\ell\lambda}(q)$ систему одномерных интегральных уравнений:

$$\frac{F^{(L)}_{\ell\lambda}(q_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 i^\ell (2\ell+1)[1+(-1)^\ell]\Phi^{(L)}_{\ell\lambda}(q_1,q_0) +$$

$$+ \frac{4V}{\pi\sqrt{3}} \sum_{\ell'\lambda'} i^{\ell-\ell'} (2\ell+1)[1+(-1)^{\ell+\ell'}] \int_0^\infty q^2 dq K^{(L)}_{\ell\lambda,\ell'\lambda'}(q_1,q) \frac{F^{(L)}_{\ell'\lambda'}(q)}{q^2 - q_0^2 - i0}, \tag{27}$$

где

$$\Phi^{(L)}_{\ell\lambda}(q_1,q_0) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{q}_0} c_{\ell\lambda}(p_0, Z-q_1^2)\phi_d(p_{10}) P_\ell\left(\frac{\vec{p}_0\vec{q}_1}{p_0 q_1}\right) P_L\left(\frac{\vec{q}_1\vec{q}_0}{q_1 q_0}\right),$$

$$K^{(L)}_{\ell\lambda,\ell\lambda'}(q_1,q) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{q}} \frac{C_{\ell\lambda}(p, Z-q_1^2) M_{\ell'\lambda'}(p_1)}{q_1^2 + q^2 + \vec{q}_1\vec{q} - \frac{3}{4}Z} \times$$

$$\times P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{q}_1}{pq_1}\right) P_{\ell'}\left(\frac{\vec{p}_1\vec{q}}{p_1 q}\right) P_L\left(\frac{\vec{q}\vec{q}_1}{qq_1}\right).$$

Амплитуду упругого рассеяния $A(\theta)$ частицы 1 с начальным импульсом $\vec{q}_0$ на связанном состоянии частиц 2 и 3 можно выразить следующим образом:

$$A(\theta) = A\left(\frac{\vec{q}_1\vec{q}_0}{q_1 q_0}\right) = \lim_{q_1\to q_0}\left\{\frac{q_1^2-q_0^2}{4\pi}\int d\vec{s}_1\,\phi^*_d(s_1)\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)\right\} . \tag{28}$$

Если использовать для $\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ выражение (8), то с помощью уравнения (10) соотношение (28) можно преобразовать к виду:

$$A(\theta) = \frac{V}{4\pi(2\pi)^3}\sum_n\int d\vec{k}\,\frac{\phi^*_d(k)M^*_n(\vec{k})}{k^2+a^2}\,[F_n(\vec{q})]_{q=q_0} , \tag{29}$$

причем при выводе этого соотношения были использованы разложение (13) и выражение (I ,8). Для парциальных компонент A_L амплитуды рассеяния, связанных с $A(\theta)$ соотношением

$$A(\theta) = \sum_L(2L+1)A_L P_L(\cos\theta),$$

легко получить, используя (24), (25) и (29), следующее выражение:

$$A_L(q_0) = \frac{V}{2\pi^2}\sum_\lambda\int_0^\infty k^2dk\,\frac{\phi_d(k)M_{0\lambda}(k)}{k^2+a^2}\,F^{(L)}_{0\lambda}(q_0) . \tag{30}$$

5. Рассмотрим подробнее S -рассеяние в нулевом приближении метода Бубнова-Галеркина ($\ell = \lambda = 0$). В этом случае из (I ,16) следует, что

$$C_{00}(p,Z) = \frac{M_{00}(p)}{1-B_{0,00}(Z)} ,$$

а система уравнений (27) сводится к одному уравнению для $F^{(0)}_{00}$:

$$\frac{F^{(0)}_{00}(q_1)}{q_1^2-q_0^2-i0} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{1}{2\pi}\int d\Omega_{\vec{q}_0}\,\frac{M_{00}(p_0)\phi_d(p_{10})}{1-B_{0,00}(Z-q_1^2)} +$$
$$+\frac{2V}{\pi^2\sqrt{3}}\int d\vec{q}\,\frac{M_{00}(p)M_{00}(p_1)}{[1-B_{0,00}(Z-q_1^2)](q_1^2+q^2+\vec{q}_1\vec{q}-\frac{3}{4}Z)}\,\frac{F^{(0)}_{00}(q)}{q^2-q_0^2-i0} . \tag{31}$$

Амплитуда S - рассеяния, согласно (30), (I , 28) и (I ,30), выражается следующим образом:

$$A_0(q_0) = \frac{V}{N}F^{(0)}_{00}(q_0) . \tag{32}$$

Уравнение (31) совпадает с точным уравнением для системы трех тождественных частиц, взаимодействие которых описывается нелокальным факторизующимся потенциалом Ямагучи [8]. Как указывалось в (I), нулевое приближение метода Бубнова-Галеркина справедливо с точностью включительно до членов, линейных по радиусу взаимодействия r_0 . Поэтому из уравнения (31) при соответствующем предельном переходе можно получить известные уравнения в нулевом [1] и линейном [3] приближениях по r_0 . Для этого в (31) для $\phi_d(p)$ следует использовать выражение (I ,37), а $M_{00}(p)$ всюду заменить на $1/L_{00}$. Ограничимся далее предельным случаем рассеяния при нулевой энергии: $q_0 = 0$, $Z = -a^2$. В этом случае из выражений (I ,33) и (I ,35) и из разложения (I ,35^1) легко получить следующие соотношения, справедливые с точностью до $(ar_0)^2$:

$$1 - B_{0,00}(-a^2 - q_1^2) = \frac{V}{L_{00}^2} q_1^2 \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 + q_1^2}} - \tfrac{1}{2} r_0 \right), \tag{33}$$

$$\frac{V}{L_{00}^2} = \frac{V - V_0}{a V_0} \left(1 + \tfrac{1}{2} a r_0\right), \tag{34}$$

где V_0 –глубина потенциала, соответствующего нулевой энергии связи двух частиц. Если теперь ввести новую функцию $a(q)$, связанную с $F_{00}^{(0)}(q)$ соотношением

$$a(q) = \frac{(V - V_0) L_{00}}{2 a V_0 \sqrt{2\pi a}} F_{00}^{(0)}(q),$$

то для этой функции из (31) легко получить с помощью (33) и (34) уравнение, справедливое с точностью до $(ar_0)^2$:

$$\left(\frac{1 + \tfrac{1}{2} a r_0}{a + \sqrt{a^2 + q_1^2}} - \tfrac{1}{2} r_0 \right) a(q) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1 + \tfrac{1}{2} a r_0}{q_1^2 + \frac{3}{4} a^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 \sqrt{3}} \left(1 + \tfrac{1}{2} a r_0\right) \int \frac{d\vec{q}}{q^2} \frac{a(q)}{q^2 + q_1^2 + \vec{q}_1 \vec{q} + \frac{3}{4} a^2}, \tag{35}$$

причем длина рассеяния A_0 согласно (32), будет связана с $a(q)$ следующим образом:

$$A_0 = a(0).$$

При $r_0 \to 0$ (35) переходит в уравнение в нулевом приближении по r_0 [1] для $a_0(q)$, а если положить $a(q) = a_0(q) + a_1(q)$, где $a_1(q)$ порядка r_0, то из (35) для $a_1(q)$ легко получить известное уравнение в линейном приближении по r_0 [3].

§ 3. Система трех нуклонов

1. Рассмотрим задачу о рассеянии нейтрона на дейтроне. Будем считать, что массы нуклонов равны m, а их взаимодействие характеризуется парными центральными потенциалами. Предположим, что потенциал взаимодействия $V(ik)$ между нуклонами i и k имеет следующий вид:

$$V(ik) = V_{11}(ik)\, P_{\sigma}^{(+)}(ik) P_{\tau}^{(+)}(ik) + V_{10}(ik) P_{\sigma}^{(+)}(ik) P_{\tau}^{(-)}(ik) + V_{01}(ik) P_{\sigma}^{(-)}(ik) P_{\tau}^{(+)}(ik) + V_{00}(ik) P_{\sigma}^{(-)}(ik) P_{\tau}^{(-)}(ik), \tag{36}$$

где $V_{st}(ik)$ –потенциал взаимодействия двух нуклонов в состоянии с полным спином s и полным изотопическим спином t, $P^{(\pm)}_{\sigma,\tau}(ik)$ – проекционные операторы, связанные соответственно с операторами $P^{(\sigma,\tau)}_{ik}$ перестановок спиновых и изотопических переменных нуклонов i и k соотношениями:

$$P_{\sigma}^{(\pm)}(ik) = ½(1 \pm P_{ik}^{(\sigma)}), \quad P_{\tau}^{(\pm)}(ik) = ½(1 + P_{ik}^{(\tau)}).$$

В случае рассеяния нейтрона на дейтроне полный изотопический спин системы $T = ½$, а полный спин S может принимать два значения: $S = 3/2$ и $S = 1/2$. Полная волновая функция, зависящая от пространственных, спиновых и изоспиновых переменных, должна быть антисимметричной по отношению к перестановкам любых пар нуклонов и может быть представлена следующим образом [9]:

$$S = 3/2, \quad \Psi = (\psi'\zeta'' - \psi''\zeta')\psi\chi^{s}, \tag{37}$$

$$S = ½, \quad \Psi = \psi^{a}\xi^{s} - \psi^{s}\xi^{a} + \psi'\xi'' - \psi''\xi', \tag{38}$$

где функции ψ зависят только от координат Якоби (1). При этом функции ψ обладают следующими свойствами симметрии по отношению к перестановкам координат двух нуклонов: ψ^{a} –полностью антисимметрична, ψ^{s} – полностью симметрична, а пара функций ψ', ψ'' преобразуется согласно представлению (4). В (37) χ^{s} представляет собой полностью симметричную функцию спиновых переменных, а ζ', ζ'' – функции изотопического спина, преобразующиеся согласно (4). Аналогично в (38) функции ξ являются комбинированными функциями спина и изотопического спина, причем ξ^{s} и ξ^{a} соответственно симметрична и антисимметрична, а ξ' и ξ'' имеют симметрию, определяемую представлением (4).

2. Для дальнейшего в случае $S = 1/2$ удобно ввести следующие функции:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{a} - \psi''), \qquad \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{a} + \psi''),$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{a} - \psi'), \qquad \Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{a} + \psi'), \tag{39}$$

а для $S = 3/2$ ввести обозначения:

$$\psi'' = -\Psi_1 , \qquad \psi' = \Psi_3 , \tag{40}$$

и перейти к Фурье – компоненте по $\vec{\rho}_1$:

$$\Psi_i(\vec{s}_i, \vec{q}_i) = \int d\vec{\rho}_i \Psi_i(\vec{s}_i, \vec{\rho}_i) e^{-i\vec{q}_i\vec{\rho}_i} .$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (36)-(40), а также свойства симметрии функций ψ , для $\Psi_i(\vec{s}_i, \vec{q}_i)$ можно получить следующие интегральные уравнения (в системе единиц, где $m = \hbar = 1$):

$$\Psi_i(\vec{s}_i, \vec{q}_i) - \frac{V_i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} d\vec{s} \, \frac{e^{i\vec{k}(\vec{s}_i - \vec{s})}}{k^2 + q_i^2 - Z} f_i(s) \Psi_i(\vec{s}, \vec{q}_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \frac{V_j}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} d\vec{s} \, \frac{e^{i\vec{s}_i\vec{p} - i\vec{s}\vec{p}_i} + (-1)^{\epsilon_{ij}} e^{-i\vec{s}_i\vec{p} + i\vec{s}\vec{p}_i}}{q_i^2 + q^2 + \vec{q}_i\vec{q} - \frac{3}{4} Z} f_j(s) \Psi_j(s, q), \tag{41}$$

где $Z = E + i0$, $E = \frac{4}{3} E_0$, E_0 – энергия в системе центра масс, векторы $\vec{p}$ и $\vec{p}_i$ определяются выражением (7), $-\frac{3}{4} V_i f_i(s)$ – потенциал взаимодействия между двумя нуклонами в состоянии, определяемом индексом i : $i = 1$, $i = 2$ означают соответственно триплетное и синглетное четные состояния, а $i = 3$, $i = 4$ соответствуют триплетному и синглетному нечетным состояниям. В (41) для $S = 3/2$ индекс i пробегает значения 1 и 3, а для $S = 1/2$ $i = 1,2,3,4$, причем константы a_{ij} и ϵ_{ij} определяются следующими выражениями:

$$S = 3/2 , \; (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , (\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{42}$$

$$S=\frac{1}{2},(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1/2\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 & -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} (\epsilon_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (42^1)$$

Уравнение (41) не содержит явным образом граничных условий. Чтобы их учесть, необходимо, по аналогии с (8), конкретизировать вид волновой функции. Для этого рассмотрим рассеяние на дейтроне нейтрона с начальным импульсом $\vec{q}_0$, причем падающему нейтрону припишем индекс 1, а нуклонам, образующим дейтрон, - индексы 2 и 3. Тогда асимптотические функции спина и изоспина будут иметь следующие значения: $\chi^{s}\zeta'$ для $S = 3/2$ и $\chi''\zeta'$ для $S = 1/2$, а амплитуды упругого рассеяния $A_S(\theta)$ будут выражаться следующим образом:

$$A_{3/2}(\theta) = \lim_{q_1 \to q_0} \{\frac{q_1^2-q_0^2}{4\pi}\int d\vec{s}_1\, d\sigma\, dr\, \chi^{s*}\zeta'^{*}\phi_d^*(s_1)\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1,\sigma,r)\},$$

$$A_{1/2}(\theta) = \lim_{q_1 \to q_0} \{\frac{q_1^2-q_0^2}{4\pi}\int d\vec{s}_1\, d\sigma\, dr\, \chi''^{*}\zeta'^{*}\phi_d^*(s_1)\Psi(\vec{s}_1,\vec{q}_1,\sigma,r)\}, \qquad (43)$$

где $\phi_d(s_1)$ –волновая функция дейтрона, σ, r –соответственно спиновые и изоспиновые переменные. Если теперь ввести новые функции $F^{(i)}(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ согласно следующему определению:

$$\Psi_i(\vec{s}_1,\vec{q}_1) = (2\pi)^3\phi_d(s_1)\delta(\vec{q}_1-\vec{q}_0)\delta_{1i}+\frac{F^{(i)}(\vec{s}_1,\vec{q}_1)}{q_1^2-q_0^2-i0}, \qquad (44)$$

то, учитывая соотношения (37)-(40), можно выражение (43) для амплитуд рассеяния привести к виду:

$$A_S(\theta) = A_S(\frac{\vec{q}_1\vec{q}_0}{q_1q_0}) = \frac{1}{4\pi}\{\int d\vec{s}_1\phi_d^*(s_1)F^{(1)}(\vec{s}_1,\vec{q}_1)\}_{q_1=q_0}, \qquad (45)$$

а из (41), принимая во внимание уравнение (9) для $\phi_d(s_1)$, легко получить для $F^{(i)}(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ систему интегральных уравнений, аналогичную (10):

$$\frac{F^{(i)}(\vec{s}_i,\vec{q}_i)}{q_i^2-q_0^2-i0}-\frac{V_i}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{s}_i-\vec{s})}}{k^2+q_i^2-Z}\,f_i(s)\,\frac{F^{(i)}(\vec{s},\vec{q}_i)}{q_i^2-q_0^2-i0}=$$

$$=\gamma_i\left[e^{i\vec{s}_i\vec{p}_0}+(-1)^{\delta_i}e^{-i\vec{s}_i\vec{p}_0}\right]\phi_d(p_{10})+ \tag{46}$$

$$+\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\frac{V_j}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}d\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{s}_i\vec{p}-i\vec{s}\vec{p}_i}+(-1)^{\epsilon_{ij}}e^{-i\vec{s}_i\vec{p}+i\vec{s}\vec{p}_i}}{q_i^2+q^2+\vec{q}_i\vec{q}-\frac{3}{4}Z}\,f_j(s)\,\frac{F^{(j)}(\vec{s},\vec{q})}{q^2-q_0^2-i0},$$

где $Z=q_0^2-\alpha^2+i0$, $-\frac{3}{4}\alpha^2$ – энергия связи дейтрона, $\phi_d(p)$ и векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_{10}$ определяются соответственно выражениями (11) и (12), а величины γ_i и δ_i определены следующим образом:

$$S=3/2,\quad (\gamma_i)=\begin{pmatrix}-4/3\sqrt{3}\\0\\-4/3\\0\end{pmatrix},\qquad (\delta_i)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$S=1/2,\quad (\gamma_i)=\begin{pmatrix}2/3\sqrt{3}\\2/\sqrt{3}\\2/3\\-2/3\end{pmatrix},\qquad (\delta_i)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{47^1}$$

Заметим, что в правые части уравнений (46) функции $F^{(j)}(\vec{s},\vec{q})$ входят умноженными на соответствующие потенциалы $f_j(s)$. Это позволяет для каждого потенциала $f_i(s)$ ввести свою систему ортогональных функций $\phi_n^{(i)}(\vec{s})$, удовлетворяющих условию (I, 2), и представить $F^{(i)}(\vec{s},\vec{q})$ в области действия потенциала в виде ряда

$$F^{(i)}(\vec{s},\vec{q})=\sum_n\phi_n^{(i)}(\vec{s})F_n^{(i)}(\vec{q}), \tag{48}$$

где

$$F_n^{(i)}(\vec{q})=\int d\vec{s}f_i(s)\,\phi_n^{(i)*}(\vec{s})F^{(i)}(\vec{s},\vec{q}).$$

Для функций $F_n^{(1)}(\vec{q})$ из (46) и (48) легко получить систему интегральных уравнений, которая отличается от (15) лишь некоторыми алгебраическими усложнениями:

$$\frac{F_n^{(1)}(\vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} = \gamma_i\,[c_n^{(1)}(\vec{p}_0, Z - q_1^2) + (-1)^{\delta_i} c_n^{(1)}(-\vec{p}_0, Z-q_1^2)]\phi_d(p_{10}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\sum_m a_{ij}\frac{V_j}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,[(q_1^2+q^2+\vec{q}_1\vec{q} - \frac{3}{4}Z)(q^2-q_0^2-i0)]^{-1}\times \tag{49}$$

$$\times[c_n^{(1)}(\vec{p}, Z-q_1^2)M_m^{(1)*}(\vec{p}_1) + (-1)^{\epsilon_{ij}} c_n^{(1)}(-\vec{p}, Z-q_1^2)M_m^{(1)*}(-\vec{p}_1)]F_m^{(1)}(\vec{q}), \tag{49^1}$$

где
$$M_n^{(1)}(\vec{p}) = \int d\vec{s} f_i(s)\phi_n^{(1)*}(\vec{s})e^{i\vec{s}\vec{p}} .$$

В (49) величины $c_n^{(1)}(\vec{p},Z)$ удовлетворяют системе алгебраических линейных уравнений:

$$\sum_{n'}[\delta_{nn'} - B_{nn'}^{(1)}(Z)]c_{n'}^{(1)}(\vec{p},Z) = M_n^{(1)}(\vec{p}), \tag{49^2}$$

где

$$B_{nn'}^{(1)}(Z) = \frac{V_i}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\frac{M_n^{(1)}(\vec{p})M_{n'}^{(1)*}(\vec{p})}{p^2 - Z} ,$$

а константы a_{ij}, ϵ_{ij}, γ_i, δ_i определяются соответственно выражениями (42),(42^1) и (47), (47^1). Так как предполагается, что разложение (48) справедливо только в области действия потенциала, то для того, чтобы выразить амплитуду рассеяния через $F_n^{(1)}(\vec{q})$, необходимо воспользоваться уравнением (46). Выражая в (45) $F^{(1)}(\vec{s},\vec{q})$ с помощью уравнения (46), легко получить для амплитуд упругого рассеяния следующее соотношение:

$$A_s(\theta) = \frac{V_1}{4\pi(2\pi)^3}\sum_n\int d\vec{k}\,\frac{\phi_d^*(k)M_n^{(1)}(\vec{k})}{k^2+\alpha^2}[F_n^{(1)}(\vec{q})]_{q=q_0} . \tag{50}$$

3. Рассмотрим структуру волновых функций системы нейтрон-дейтрон. Для этого заметим, что согласно (44) волновые функции $\Psi_i(\vec{s}_1,\vec{q}_1)$ в импульсном представлении имеют вид:

$$\Psi_i(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = (2\pi)^3\phi_d(k_1)\delta(\vec{q}_1-\vec{q}_0)\delta_{i1} + \frac{F^{(1)}(\vec{k}_1,\vec{q}_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} . \tag{51}$$

Введем далее следующие функции:

$$\psi_i(\vec{k},\vec{q}) = (2\pi)^3\phi_d(k)\delta(\vec{q}-\vec{q}_0)\delta_{1i} + \\ + \frac{V_i}{k^2+q^2-Z}\int d\vec{s}\, e^{-i\vec{k}\vec{s}} f_i(s)\frac{F^{(i)}(\vec{s},\vec{q})}{q^2-q_0^2-i0}\ . \tag{52}$$

Функции $\psi_i(\vec{k},\vec{q})$, согласно выражениям (39), (40) и (44), обладают следующими свойствами:

$$\psi_i(\vec{k},\vec{q}) = \psi_i(-\vec{k},\vec{q}),\quad i=1,2;$$

$$\psi_i(\vec{k},\vec{q}) = -\psi_i(-\vec{k},\vec{q}),\quad i=3,4. \tag{53}$$

Если определить в (51) $F^{(i)}(\vec{k}_1,\vec{q}_1)$ из уравнения (46) и воспользоваться соотношениями (39), (40) и (52), то можно получить следующие выражения для пространственных функций ψ, входящих в полные волновые функции (37) и (38):

для $S = 3/2$:

$$\psi'(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_1(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_1(\vec{k}_3,\vec{q}_3)] + \\ + \psi_3(\vec{k}_1,\vec{q}_1) + \tfrac{1}{2}\psi_3(\vec{k}_2,\vec{q}_2) + \tfrac{1}{2}\psi_3(\vec{k}_3,\vec{q}_3);$$

$$\psi''(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = -\psi_1(\vec{k}_1,\vec{q}_1) + \tfrac{1}{2}\psi_1(\vec{k}_2,\vec{q}_2) + \tfrac{1}{2}\psi_1(\vec{k}_3,\vec{q}_3) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_3(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_3(\vec{k}_3,\vec{q}_3)]; \tag{54}$$

для $S = 1/2$:

$$\sqrt{2}\psi^{s}(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = \psi_1(\vec{k}_1,\vec{q}_1) + \psi_1(\vec{k}_2,\vec{q}_2) + \psi_1(\vec{k}_3,\vec{q}_3) + \\ + \psi_2(\vec{k}_1,\vec{q}_1) + \psi_2(\vec{k}_2,\vec{q}_2) + \psi_2(\vec{k}_3,\vec{q}_3);$$

$$\sqrt{2}\psi^{a}(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = \psi_3(\vec{k}_1,\vec{q}_1) - \psi_3(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_3(\vec{k}_3,\vec{q}_3) + \\ + \psi_4(\vec{k}_1,\vec{q}_1) - \psi_4(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_4(\vec{k}_3,\vec{q}_3); \tag{55}$$

$$\sqrt{2}\psi'(\vec{k}_1,\vec{q}_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_1(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_1(\vec{k}_3,\vec{q}_3)] + \frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_2(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \psi_2(\vec{k}_3,\vec{q}_3)] - \\ - \psi_3(\vec{k}_1,\vec{q}_1) - \frac{1}{2}\psi_3(\vec{k}_2,\vec{q}_2) - \tfrac{1}{2}\psi_3(\vec{k}_3,\vec{q}_3) +$$

$$+\ \psi_4(\vec{k}_1,\vec{q}_1)+½\psi_4(\vec{k}_2,\vec{q}_2)+½\psi_4(\vec{k}_3,\vec{q}_3)\,;$$

$$\sqrt{2}\psi''(\vec{k}_1,\vec{q}_1)=-\psi_1(\vec{k}_1,\vec{q}_1)+½\psi_1(\vec{k}_2,\vec{q}_2)+½\psi_1(\vec{k}_3,\vec{q}_3)+$$

$$+\psi_2(\vec{k}_1,\vec{q}_1)-½\psi_2(\vec{k}_2,\vec{q}_2)-½\psi_2(\vec{k}_3,\vec{q}_3)-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_3''(\vec{k}_2,\vec{q}_2)-\psi_3(\vec{k}_3,\vec{q}_3)]+\frac{\sqrt{3}}{2}[\psi_4(\vec{k}_2,\vec{q}_2)-\psi_4(\vec{k}_3,\vec{q}_3)]\,, \qquad (56)$$

где импульсы $\vec{k}_i, \vec{q}_i$ определяются соответственно выражениями (2) и (3). Легко убедиться, что ψ' и ψ'', определяемые выражениями (54) и (56), при перестановках координат преобразуются друг через друга согласно представлению (4). Соответственно из (55) следует, что ψ^s полностью симметрична, а ψ^a полностью антисимметрична.

В выражение (52) для функций ψ_i можно подставить разложение (48). Тогда получим:

$$\psi_i(\vec{k},\vec{q})=(2\pi)^3\phi_d(k)\delta(\vec{q}-\vec{q}_0)\delta_{1i}+$$

$$+\frac{V_i}{k^2+q^2-Z}\sum_n\frac{M_n^{(i)*}(\vec{k})F_n^{(i)}(\vec{q})}{q^2-q_0^2-i0}\,. \qquad (57)$$

Учитывая, что в (57) и (49) входят одинаковые суммы произведений M_n и F_n, можно получить для ψ_i систему интегральных уравнений, которая является обобщением уравнения (20) на случай реальных нуклонов:

$$\psi_i(\vec{k},\vec{q})=(2\pi)^3\phi_d(k)\delta(\vec{q}-\vec{q}_0)\delta_{1i}+$$

$$+\frac{1}{k^2+q^2-Z}\frac{2}{3\pi^2}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\int d\vec{q}\,'[t^{(i)}(\vec{k},\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}+\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}\,',Z-q^2)+ \qquad (58)$$

$$+(-1)^{\delta_i}t^{(i)}(\vec{k},-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}\,',Z-q^2)]\psi_j(\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{q}\,',\vec{q}\,')\,,$$

причем при выводе этого уравнения было использовано свойство (53) функций ψ_i. В (58) $t^{(i)}(\vec{k},\vec{p},\vec{Z})$ представляют собой парные t-матрицы для соответствующих состояний двух нуклонов, а константы a_{ij} и δ_i определяются соответственно выражениями (42), (42[1]) и (47), (47[1]).

4. Если в разложении (48) базисные функции $\phi_n^{(i)}(\vec{s})$ выбраны в виде (23), то как и в случае бесспиновых частиц, в (49) можно отделить угловые переменные и получить систему одномерных уравнений для парциальных компонент волновых функций, соответствующих определенному значению полного орбитального момента L. Для функций $F^{(i)}(\vec{s},\vec{q})$ в (44) будут иметь место разложения (21) и (22), а функции $F_n^{(i)}(\vec{q})$, согласно (24), будут иметь следующий вид:

$$F_n^{(i)}(\vec{q}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \sum_L (2L+1) F^{(i)}_{L,\ell\lambda}(q) P_L\left(\frac{\vec{q}\vec{q}_0}{qq_0}\right), \tag{59}$$

где

$$F^{(i)}_{L,\ell\lambda}(q) = \int_0^\infty s^2\, ds\, f_i(s)\, s^\ell\, L^{(i)}_{\ell\lambda}(s)\, F^{(i)}_{L\ell}(s,q).$$

Из (49) и (59) легко получить, используя (25) и (26), уравнения для парциальных компонент $F_{L,\ell\lambda}(q)$:

$$\frac{F^{(i)}_{L,\ell\lambda}(q_1)}{q_1^2 - q_0^2 - i0} = \gamma_i (2\ell+1) i^\ell [1 + (-1)^{\delta_i+\ell}]\, \Phi^{(i)}_{L,\ell\lambda}(q_1, q_0) +$$

$$+ \sum_{j\ell'\lambda'} a_{ij} (2\ell+1) i^{\ell-\ell'} [1 + (-1)^{\epsilon_{ij}+\ell+\ell'}] \times \tag{60}$$

$$\times \frac{2V_j}{\pi} \int_0^\infty q^2\, dq\, K^{(ij)}_{L,\ell\lambda,\ell'\lambda'}(q_1, q) \frac{F^{(j)}_{L,\ell'\lambda'}(q)}{q^2 - q_0^2 - i0},$$

где

$$\Phi^{(i)}_{L,\ell\lambda}(q_1, q_0) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{q_0}\, c^{(i)}_{\ell\lambda}(p_0, Z - q_1^2)\, \phi_d(p_{10})\, P_\ell\left(\frac{\vec{p}_0\vec{q}_1}{p_0 q_1}\right) P_L\left(\frac{\vec{q}_1\vec{q}_0}{q_1 q_0}\right), \tag{61}$$

$$K^{(ij)}_{L,\ell\lambda,\ell'\lambda'}(q_1, q) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{q}} \frac{c^{(i)}_{\ell\lambda}(p, Z - q_1^2)\, M^{(j)}_{\ell'\lambda'}(p_1)}{q_1^2 + q^2 + \vec{q}_1\vec{q} - \frac{3}{4} Z} \times \tag{62}$$

$$\times P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{q}_1}{pq_1}\right) P_{\ell'}\left(\frac{\vec{p}_1\vec{q}}{p_1 q}\right) P_L\left(\frac{\vec{q}_1\vec{q}}{q_1 q}\right).$$

В (61) и (62) величины $c^{(i)}_{\ell\lambda}(p,Z)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\lambda'} [\delta_{\lambda\lambda'} - B^{(i)}_{\ell,\lambda\lambda'}(Z)]\, c^{(i)}_{\ell\lambda'}(p,Z) = M^{(i)}_{\ell\lambda}(p), \qquad (63)$$

где

$$M^{(i)}_{\ell\lambda}(p) = \int_0^\infty s^2\, ds\, f_i(s)\, s^{\ell}\, L^{(i)}_{\ell\lambda}(s)\, j_{\ell}(ps),$$

$$B^{(i)}_{\ell,\lambda\lambda'}(Z) = \frac{2V_i}{\pi}\int_0^\infty p^2\, dp\, \frac{M^{(i)}_{\ell\lambda}(p) M^{(i)}_{\ell\lambda'}(p)}{p^2 - Z}.$$

Систему уравнений (63) легко получить из (49^1) и (49^2), если учесть угловые зависимости (25) и (26) для $M_n(\vec{p})$ и $c_n(\vec{p},Z)$. Парциальные амплитуды упругого рассеяния $A^{(L)}_s$, согласно (50) и (59), определяются следующим выражением:

$$A^{(L)}_s(q_0) = \frac{V_1}{2\pi^2}\sum_{\lambda}\int_0^\infty k^2\, dk\, \frac{\phi_d(k) M^{(1)}_{0\lambda}(k)}{k^2 + a^2}\, F_{L,0\lambda}(q_0). \qquad (64)$$

Выражение (64) представляет собой фактически ряд по степеням $a r_0$, так как в интеграл из-за поведения $\phi_d(k)$ наиболее существенный вклад вносят импульсы $k \approx a$, а из свойств полиномов $L_{\ell\lambda}(s)$ (I , 4) следует, что $M^{(1)}_{0\lambda}(a) \approx (a r_0)^{\lambda}$. В нулевом приближении ($\ell = \lambda = 0$) система уравнений (60) для $S = 3/2$ сводится к одному уравнению для функции $F^{(1)}_{L,00}(q)$, а для $S = 1/2$ – к системе двух уравнений для функций $F^{(1)}_{L,00}(q)$ и $F^{(2)}_{L,00}(q)$. Амплитуды рассеяния в этом случае будут определяться выражением, аналогичным (32):

$$A^{(L)}_s(q_0) = \frac{V_1}{N}\, F^{(1)}_{L,00}(q_0). \qquad (65)$$

Из (65) следует, что в нулевом приближении задача о $n-d$ – рассеянии сводится к некоторой эффективной задаче двухчастичного рассеяния, причем функции $F_{L,00}(q)$ имеют смысл амплитуд, которые удовлетворяют соответствующим интегральным уравнениям.

Для волновых функций связанного состояния трех нуклонов (H^3) вместо (44) и (48) можно написать следующие разложения:

$$\Psi_i(s,q) = \sum_n \phi^{(i)}_n(s)\Psi^{(i)}_n(\vec{q}),$$

причем компоненты функций $\Psi^{(i)}_n(\vec{q})$ будут удовлетворять однородной системе интегральных уравнений:

$$\Psi^{(1)}_{\ell\lambda}(q_1) = \sum_{i\ell'\lambda'} a_{ij}(2\ell+1) i^{\ell-\ell'} [1 + (-1)^{\epsilon_{ij} + \ell + \ell'}] \times$$

$$\times \frac{2V_j}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq K^{(ij)}_{0,\ell\lambda,\ell\lambda'}(q_1, q) \Psi^{(j)}_{\ell\lambda'}(q), \tag{66}$$

где ядра $K^{(ij)}_{0,\ell\lambda,\ell\lambda'}(q_1, q)$ определяются выражением (62) при $L = 0$.

§4. Заключение

Использование в разложении (48) базисных функций $\phi_n(\vec{s})$ вида (23) фактически означает, что в области действия потенциала волновая функция раскладывается в ряд по степеням взаимного расстояния между двумя нуклонами. Ясно, что такое разложение будет достаточно хорошо сходиться, если линейные размеры системы $R \gtrsim r_0$, где r_0 –радиус взаимодействия. Действительно, в этом случае будет мала вероятность того, что взаимные расстояния между всеми нуклонами будут меньше или порядка r_0, и поведение волновой функции при малых расстояниях между двумя нуклонами будет определяться в основном свойствами их взаимного потенциала. Поэтому можно ожидать, что при $R \gtrsim r_0$ метод Бубнова-Галеркина в применении к задаче $n-d$ –рассеяния, как и в задаче двух нуклонов /10/, будет обладать достаточно хорошей сходимостью. Так как дейтрон является "рыхлым" ядром, то в случае рассеяния нейтрона на дейтроне можно считать, что условие $R \gtrsim r_0$ будет выполнено. При этом под R следует понимать средние размеры области, в которой функция $F^{(1)}(\vec{s}, \vec{q})$ в (44) существенным образом отличается от асимптотического вида $F^{(1)}_a(\vec{s}, \vec{q}) = \phi_d(s) F_a(\vec{q})$.

Литература

1. Г.В. Скорняков и К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 31, 775 (1956).
2. Г.В. Скорняков. ЖЭТФ, 31, 1046 (1956).
3. Г.С. Данилов. ЖЭТФ, 43, 1424 (1962).
4. Ф.М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, Москва, 1958.
5. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, ГИТТЛ, Москва, 1957.
6. V.N. Efimov, Comtes Rendus du Congres International de Physique Nucleaire, v. II, p. 258, Paris, 1965.
7. V.N. Efimov. Preprint, E-2214, Dubna, 1965.
8. A.G. Sitenko, V.F. Kharchenko. Nucl. Phys., 49, 15 (1963).

9. М. Верде. Строение атомного ядра. Под ред. А.С. Давыдова, ИЛ, Москва, 1959.
10. В.Н. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р-2546, Дубна, 1966.
11. Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1966 г.