

2
-85

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория высоких энергий

P - 289

В.Г. Гришин, М.И. Подгорецкий

ЗАМЕЧАНИЯ
К ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА
ЖЭТФ, 1959, т 36, в. 5, с 1593.

Дубна, 1959 год

P - 289

В.Г. Гришин, М.И. Подгорецкий

ЗАМЕЧАНИЯ
К ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Рассмотрены некоторые уточнения оптической модели.

§ 1. Задача о рассеянии частиц на силовом центре сводится, как известно, к решению уравнения Шредингера:

$$\nabla^2 \psi + [k_0^2 - U(\vec{r})] \psi = 0. \quad /1/$$

В обозначениях, показанных на рис.1, решение имеет вид [1].

$$\psi(P) = \int_V k U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\tau' - \int_S \left(\psi \frac{\partial k}{\partial n} - k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds', \quad /2/$$

где

$$\psi(P) = \psi(P) - e^{ik_0 z}, \quad k = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

и

$\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внешней нормали к элементу поверхности. Поверхность S и заключенный в ней объем V можно выбирать произвольно

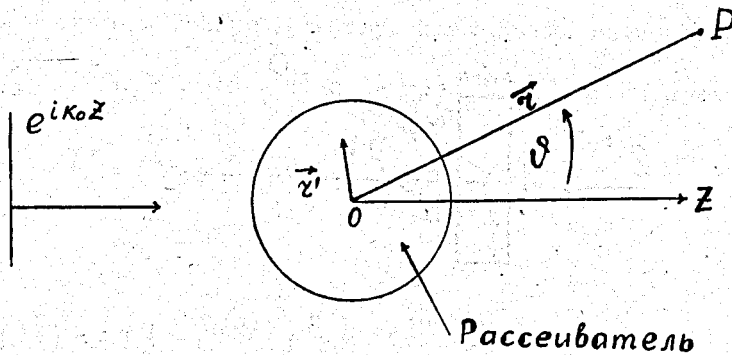


Рис. 1.

На больших расстояниях $\psi \sim \frac{1}{r}$. Поэтому интеграл по поверхности, бесконечно удаленной от рассеивателя, стремится к нулю. Если поверхность S охватывает точки 0 и P и стремится к бесконечности, то решение можно записать:

$$\psi(P) = \int_V k \cdot U \cdot \psi d\tau' \quad /3/$$

При другом выборе поверхности /см.рис.2/ интеграл по бесконечным частям поверхности стремится к нулю, объемный интеграл выпадает и остается интеграл по плоскости Σ . Таким образом, то же самое решение можно представить в виде:

$$\psi(P) = - \int_{\Sigma} \left(\psi \frac{\partial k}{\partial n} - k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds' \quad /4/$$

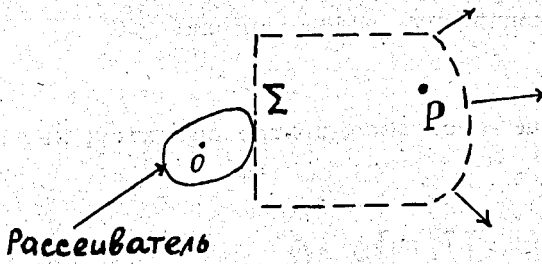


Рис. 2.

Выражение /3/ используют обычно в борновском приближении, полагая, что падающая волна не искажается, т.е. $\psi \approx e^{ik_0 z}$. Аналогичный прием можно использовать и в других случаях, если приблизительно известен вид ψ внутри рассеивателя. В частности, при анализе взаимодействия быстрых частиц с ядрами и с нуклонами можно подставить функцию ψ , взятую в приближении геометрической оптики и получить таким образом выражение для ψ .

Рассмотрим такой подход на примере однородного диска /рис.3/:

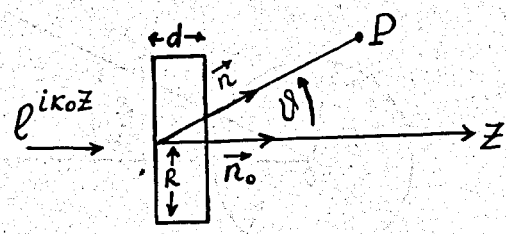


Рис. 3.

Здесь \vec{n} и \vec{n}_0 единичные векторы по направлению рассеяния и оси Z соответственно. Внутри диска имеем $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1$ / κ_1 может быть комплексным/, т.е.

$$\psi = A \cdot e^{i(\kappa_0 + \kappa_1)z} \quad /5/$$

Величины κ_0 , κ и $U = U + iV$ связаны между собой простым соотношением. Действительно уравнение /1/ для нашего случая имеет вид:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + (\kappa_0^2 - U - iV) \psi = 0,$$

что после подстановки /5/ дает

$$U + iV = \kappa_0^2 - \kappa^2 \quad /5'/$$

Подставляя в /3/ выражение /5/ и /5'/, найдем

$$\psi(P) = - \frac{A(\kappa_0^2 - \kappa^2)}{4\pi} \int_V \frac{e^{i\kappa_0|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i(\kappa_0 + \kappa_1)z'} d\tau'.$$

На больших расстояниях

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \vec{r}' \cdot \vec{n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$\psi(P) = - \frac{A(\kappa_0^2 - \kappa^2) e^{i\kappa_0 r}}{4\pi r} \int_V e^{i\kappa_0(\vec{n}_0 - \vec{n}) \cdot \vec{r}'} e^{i\kappa_1 z'} d\tau'.$$

Отсюда, амплитуда рассеяния

$$f(\vartheta) = - \frac{A(\kappa_0^2 - \kappa^2)}{4\pi} \int_V e^{i\kappa_0(\vec{n}_0 - \vec{n}) \cdot \vec{r}'} e^{i\kappa_1 z'} d\tau'. \quad /6/$$

Введя цилиндрическую систему координат, после интегрирования получим:

$$f(\vartheta) = \frac{(1 - e^{-i\kappa_1 d}) \cdot A(\kappa_0^2 - \kappa^2)}{2i\kappa_1} \cdot \frac{R J_1(\kappa_0 R \sin \vartheta)}{\kappa_0 \sin \vartheta} \quad /7/$$

Здесь $J_1(\kappa_0 R \sin \vartheta)$ - функция Бесселя первого порядка. Дальнейшее рассмотрение для простоты проведем только для двух предельных случаев.

а/ $|\kappa_1| \ll \kappa_0$. Тогда отражения на границах раздела практически не происходит, т.е. $A \approx 1$.

Кроме того, $U = (\kappa_0 - \kappa)(\kappa_0 + \kappa) \approx -2\kappa_0\kappa_1$.

Следовательно,

$$f(\vartheta) = i(1 - e^{-i\kappa_1 d}) \frac{R J_1(\kappa_0 R \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}. \quad /8/$$

б/ Очень большое поглощение на толщине диска.

В этом случае можно пренебречь отражением волны от задней стенки диска, в то время как отражение от передней может быть существенным /если $\kappa \geq \kappa_0$ /. Учитывая граничные условия, получаем: $A = \frac{2\kappa_0}{\kappa_0 + \kappa}$, т.е. для $f(\vartheta)$ снова справедлива формула /8/.

Полученный результат совпадает с выражением для амплитуды рассеяния, вычисленным на основании оптической модели. Совпадение не является случайным, так как оптическая модель исходит из поверхностного интеграла /4/, который тождественно равен исходному обменному интегралу /3/, если вместо ψ и Ψ подставить их точные зна-

чения. Поэтому оба подхода равноправны и можно говорить о том, что в тех или иных условиях один удобнее другого с методической точки зрения.

§ 2. Предположим, что рассеиватель состоит из независимых элементарных центров, изображенных на рис.4 в виде заштрихованных кружков.

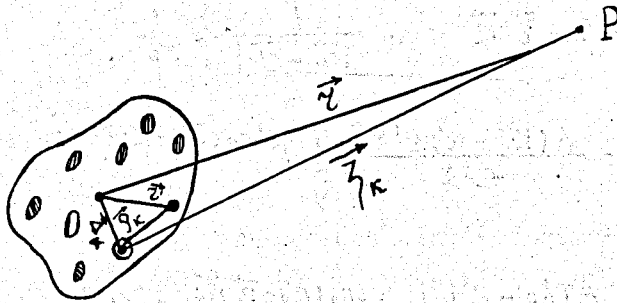


Рис. 4.

В силу аддитивности

$$U(\vec{r}') = \sum U_k(\vec{r}'), \text{ где } U_k(\vec{r}') = U_0(\vec{r}_k)$$

функция U_0 одинакова для всех центров/. Тогда из /3/ получаем

$$\psi(P) = \sum_k \int L U_k \Psi d\tau' = \sum \psi_k.$$

Так как $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}_k - \vec{r}_k|$, то

$$\psi_k = \int L(\vec{r}_k, \vec{r}_k) \cdot U_0(\vec{r}_k) \Psi(\vec{r}_k) d\tau.$$

Здесь интегрирование производится по текущему вектору \vec{r}_k . При достаточно малом поглощении в приближении геометрической оптики в окрестности каждого элементарного рассеивателя можно записать:

$$\Psi(\vec{r}') = B \cdot e^{ik(\vec{n}_0 \vec{r}')} = B e^{ik(\vec{n}_0 \vec{\Delta}_k)} \cdot e^{ik(\vec{n}_0 \vec{r}_k)} = \Psi(\vec{\Delta}_k) \cdot e^{ik(\vec{n}_0 \vec{r}_k)} \quad \text{т.е.}$$

$$\psi_k(P) = \Psi(\vec{\Delta}_k) \cdot \int L(\vec{r}_k, \vec{r}_k) U_0(\vec{r}_k) e^{ik(\vec{n}_0 \vec{r}_k)} d\tau. \quad /8/$$

Далее

$$L(\vec{r}_k, \vec{r}_k) = L(\vec{r}', \vec{r}') \approx - \frac{e^{ik_0 z}}{4\pi r} e^{-ik_0(\vec{n} \vec{\Delta}_k + \vec{n} \vec{r}_k)}$$

Тогда

$$\psi = \frac{\hat{f}(\theta)}{r} e^{ik_0 z} \cdot (\sum \Psi(\vec{\Delta}_k) e^{-ik_0 \vec{n} \vec{\Delta}_k}),$$

где

$$\tilde{f}(\nu) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i(\kappa \vec{n}_0 \vec{\rho}_k - \kappa_0 \vec{n} \vec{\rho}_k)} \cdot U_0(\rho_k) d\tau.$$

Амплитуда рассеяния имеет вид

$$A(\nu) = \tilde{f}(\nu) \cdot \left(\sum_k \psi(\vec{\Delta}_k) e^{-i\kappa_0 \vec{n} \vec{\Delta}_k} \right). \quad /10/$$

Если $|\kappa_1| \cdot \Delta e \ll 1$, где Δe размеры элементарного центра, то $\tilde{f}(\nu)$ практически совпадает с амплитудой рассеяния $f(\nu)$ на свободном элементарном центре. Именно такой случай осуществляется при взаимодействии быстрых π -мезонов и нуклонов с ядрами ($|\kappa_1| \sim 10^{12} \text{ см}^{-1}$ и $\Delta e \sim 10^{-13} \text{ см}$), не говоря уже о γ -квантах и электронах. Поэтому можно считать $\tilde{f}(\nu) \approx f(\nu)$, что дает

$$A(\nu) = f(\nu) \sum \psi(\vec{\Delta}_k) e^{-i\kappa_0 \vec{n} \vec{\Delta}_k} \quad /10'/$$

Физический смысл /10/ и /10'/ - интерференция вторичных рассеянных волн от элементарных рассеивателей. При выводе /10/ предполагалось, что внутри каждого элементарного центра волна не искажается / $e^{i\kappa z}$ и вне и внутри излучателя/, т.е. по существу для каждого излучателя используется борновское приближение. Из физического смысла /10/ ясно, что это не обязательно и что такой же результат будет и при сильном искажении поля внутри элементарных рассеивателей.

Как известно, дифференциальное сечение упругого рассеяния $\sigma(\nu) = |A(\nu)|^2$. В связи с тем, что элементарные центры находятся в движении для экспериментально измеряемого $\sigma_{\text{exp}}(\nu)$ имеем:

$$\sigma_{\text{exp}}(\nu) = \overline{\sigma(\nu)} = \overline{|A(\nu)|^2} = \overline{|f(\nu)|^2 \cdot \left| \sum_k \psi(\vec{\Delta}_k) e^{-i\kappa_0 \vec{n} \vec{\Delta}_k} \right|^2}$$

В результате усреднения получается член, зависящий только от среднего числа элементарных центров в различных частях рассеивателя и член, зависящий от флуктуации в числе центров. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый член, поэтому можно с самого начала усреднять $A(\nu)$, а потом вычислять $|\overline{A}|^2$ ^{x/}. Введем в рассмотрение среднюю плотность элементарных рассеивателей $\rho(\vec{\Delta})$ ^{xx/}, тогда вместо /10'/ получаем:

^{x/} Исследование второго члена позволяет, в принципе, подойти к вопросу о характере внутриядерных флуктуаций.

^{xx/} $\rho(\vec{\Delta})$ - среднее число элементарных рассеивателей, центры которых находятся в рассматриваемом объеме. В дальнейшем под $\rho(\vec{\Delta})$ мы будем понимать плотность числа нуклонов.

$$A(\vartheta) = f(\vartheta) \cdot F(\vartheta),$$

/11/

где

$$F(\vartheta) = \int_{\tau} \rho(\vec{\Delta}) \cdot \psi(\vec{\Delta}) \cdot e^{-i k_0 \vec{n} \cdot \vec{\Delta}} d\tau.$$

/11'/

имеет смысл обобщенного формфактора. Если $\psi(\vec{\Delta}) \sim e^{i k_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{\Delta}}$, то обобщенный формфактор переходит в обычный, используемый при борновском приближении [2,3]. Из /11/ и /11'/ следует, что

$$\sigma(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2 \cdot |F(\vartheta)|^2.$$

/11''/

§ 3. При обычном рассмотрении в оптической модели полагают, что внутри рассеивателя справедливо приближение геометрической оптики. Тогда на основании равенства выражений /3/ и /4/ можно написать

$$A_{од.}(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V} e^{-i k_0 \vec{n} \cdot \vec{\Delta}} \cdot U(\vec{\Delta}) \psi(\vec{\Delta}) d\tau.$$

Далее полагают, что

$$U(\vec{\Delta}) = -4\pi f(0) \rho(\vec{\Delta}).$$

/12/

То есть

$$A_{од.}(\vartheta) = f(0) \int_{V} e^{-i k_0 \vec{n} \cdot \vec{\Delta}} \rho(\vec{\Delta}) \psi(\vec{\Delta}) d\tau.$$

С другой стороны из /11/ имеем

$$A(\vartheta) = f(\vartheta) \int_{V} e^{-i k_0 \vec{n} \cdot \vec{\Delta}} \rho(\vec{\Delta}) \psi(\vec{\Delta}) d\tau.$$

Сравнивая $A_{од.}(\vartheta)$ и $A(\vartheta)$ получаем:

$$A(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)}{f(0)} A_{од.}(\vartheta).$$

/13/

Из формулы /13/ видно, что $A(\vartheta)$ при $\vartheta \neq 0$ отличается от $A_{од.}(\vartheta)$, так как обычное оптическое рассмотрение не учитывает вторичные волны, излучаемые элементарными рассеивателями, под углами $\vartheta \neq 0$. При рассеянии вперед из /13/ имеем:

$A(0) = A_{од}(0)$, что ясно физически, так как введение K_1 как раз и учитывает суперпозицию всех вторичных волн, излученных вперед. Различие между $A(\nu)$ и $A_{од}(\nu)$ исчезает, если рассеяние на элементарном центре изотропное, но может быть существенным, если имеется анизотропия.

Из /13/ получаем

$$\sigma(\nu) = \frac{\sigma_0(\nu)}{\sigma_0(0)} \cdot \sigma_{од}(\nu). \quad /14/$$

Здесь

$$\sigma_0(\nu) = |f(\nu)|^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{од}(\nu) = |A_{од}(\nu)|^2.$$

Обычно $\frac{\sigma_0(\nu)}{\sigma_0(0)} < 1$, т.е. $\sigma(\nu) < \sigma_{од}(\nu)$ и полное упругое сечение σ_{el} будет меньше аналогичного обычного $\sigma_{el.од}$. Из $A(0) = A_{од}(0)$ и из известной оптической теоремы $\sigma_t = 4\pi k \operatorname{Im} A(0)$ следует, что полные сечения σ_t одинаковы. Отсюда, полное неупругое сечение $\sigma_{in} = \sigma_t - \sigma_{el}$ больше аналогичного обычного $\sigma_{in.од}$.

$$\sigma_{in} = \sigma_t - \sigma_{el} = \int \sigma_{од}(\nu) d\Omega + \sigma_{in.од} - \int \frac{\sigma_0(\nu)}{\sigma_0(0)} \sigma_{од}(\nu) d\Omega. \quad /15/$$

т.е.

$$\sigma_{in} = \sigma_{in.од} + \int \sigma_{од}(\nu) \left[1 - \frac{\sigma_0(\nu)}{\sigma_0(0)} \right] d\Omega.$$

Предыдущее рассмотрение было проведено в нерелятивистском случае. По физическому смыслу все сказанное, кроме конкретного вида интеграла, определяющего $f(\nu)$ и $\tilde{f}(\nu)$, относится и к релятивистскому случаю.

Формула /14/ относится к рассеянию на тяжелых элементарных центрах, т.е. справедлива в лабораторной системе координат. Легко видеть, что в случае малых углов рассеяния она имеет один и тот же вид в любой системе координат. Действительно, известно, что величина $\sigma^*(\nu^*) d\Omega^*$ является инвариантом^{x/}

Тогда

$$\sigma(\nu) = \sigma^*(\nu^*) \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sigma_0^*(\nu^*)}{\sigma_0^*(0)} \sigma_{од}^*(\nu^*) \frac{d\Omega^*}{d\Omega}.$$

но

$$\sigma_{од}^*(\nu^*) \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \sigma_{од}(\nu), \quad \sigma_0^*(0) = \sigma_0(0) \cdot \left(\frac{d\Omega}{d\Omega^*} \right)_0$$

и

$$\sigma_0^*(\nu^*) = \sigma_0(\nu) \left(\frac{d\Omega}{d\Omega^*} \right)_\nu.$$

^{x/} Звездочкой отмечены величины, относящиеся в движущейся системе координат.

Следовательно

$$\sigma(\vartheta) = \frac{\sigma_0(\vartheta)}{\sigma_0(0)} \sigma_{\text{ст}}(\vartheta) \cdot \frac{\left(\frac{d\Omega^*}{d\Omega}\right)_0}{\left(\frac{d\Omega^*}{d\Omega}\right)_{\vartheta}}$$

Если углы малы, то

$$\frac{\left(\frac{d\Omega^*}{d\Omega}\right)_0}{\left(\frac{d\Omega^*}{d\Omega}\right)_{\vartheta}} \approx 1 - d\vartheta^2,$$

где d равно $1/2$, если масса рассеиваемых частиц равна массе элементарных рассеивателей, и $d \ll 1$ при рассеивании легких частиц на тяжелых.

Таким образом окончательно снова получаем форму /14/.

§ 4. В настоящее время проведены эксперименты по рассеиванию быстрых электронов на ядрах [4]. Анализ экспериментальных данных проводился по формуле /11/ с подстановкой вместо $f(\vartheta)$ кулоновской амплитуды рассеяния на точечном заряде. Таким образом, полученная функция $\rho_e(\vec{\Delta})$ характеризует распределения плотности заряда в ядре.

Естественней было бы говорить о плотности нуклонов, как характеристике структуры ядра более непосредственной и более подходящей для сравнения с результатами других опытов. Тогда, по формуле /11"/ имеем:

$$\sigma_{\text{exp}}^{\text{я}} = \sigma_{\text{exp}}^{\text{р}} \cdot F_{\text{я}}^2, \quad /16/$$

где $\sigma_{\text{exp}}^{\text{я}}$ - экспериментальное сечение рассеяния электронов на ядре, $\sigma_{\text{exp}}^{\text{р}}$ - экспериментальное сечение рассеяния электронов на протоне,

$$F_{\text{я}} = \int \rho(\vec{\Delta}) \psi(\vec{\Delta}) e^{-i\kappa_0 \vec{\Delta}} d\tau$$

и $\rho_{\text{н}}(\vec{\Delta})$ плотность нуклонов в ядре. С другой стороны, авторы работы [4] полагали

$$\sigma_{\text{exp}}^{\text{я}} = \sigma_{\text{мот.}} F_{\text{я.ноф.}}^2. \quad /16'/$$

где $\sigma_{\text{мот.}}$ сечение рассеяния электронов точечным зарядом /"моттовское рассеяние"/ и $F_{\text{я.ноф.}}$ - формфактор, полученный из /16'/ . Приравнивая правые части /16/ и /16'/, получаем:

$$F_{\text{я}}^2 = \frac{\sigma_{\text{мот.}} F_{\text{я.ноф.}}^2}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{р}}}$$

Если магнитное рассеяние отсутствует, то $\sigma_{exp}^p = \sigma_{mot} \cdot F_p^2$, где F_p формфактор протона. В итоге получаем

$$F_a = \frac{F_a \cdot \text{ноф.}}{F_p} \quad /17/$$

Для малых углов в борновском приближении имеем [4] $F = 1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{6}$, где $\hbar \vec{q}$ - переданный импульс ($|q| = k_0 \vartheta$) и \bar{r}^2 - среднеквадратичный радиус. Разлагая все формфакторы в ряд, из /17/ получаем:

$$\bar{r}_a^2 = \bar{r}_{a, \text{ноф.}}^2 - \bar{r}_p^2 \quad /18/$$

Различие в среднеквадратичных радиусах $\sqrt{\bar{r}_a^2}$ и $\sqrt{\bar{r}_{a, \text{ноф.}}^2}$ составляет для углерода $\approx 5,5\%$.

Аналогичные соображения нужно учитывать и при анализе рассеяния $\hat{\pi}$ -мезонов и нуклонов [5-8]. Именно нужно исходить из распределения плотности в ядре и учитывать сечение $\sigma_0(\vartheta)$ элементарного взаимодействия, обрабатывая опытные данные в соответствии с /11"/ или /14/, а не просто по обычной оптической модели. В этой связи следует отметить работу [5], в которой делается вывод о возможном различии между величинами \bar{r}^2 при рассеянии на ядрах электронов и $\hat{\pi}$ -мезонов. Существование указанного эффекта вызывает, правда, некоторые сомнения с экспериментальной точки зрения.

Во всяком случае, при его обсуждении необходимо учитывать соображения, изложенные выше, что к сожалению не было в явном виде сделано авторами.

Для введения поправки нужно разложить обобщенный формфактор /11"/ в ряд по q^2 . В предельном случае малых поглощений разложение имеет вид:

$$1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{6};$$

в противоположном, предельном случае очень сильного поглощения /на всем ядре/ практически имеет место диффракция на черном шарике и

$$\sigma(\vartheta) = 2 \sigma_{0\sigma}(0) \cdot \frac{J_1^2(k_0 R \sin \vartheta)}{k_0^2 R^2 (\sin \vartheta)^2}.$$

Тогда разложение для малых углов имеет вид:

$$1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{8}.$$

Таким образом, в общем случае коэффициент при $q^2 \bar{r}^2$ заключен, по-видимому, между $1/6$ и $1/8$.

Для получения поправок нужно также разложить элементарные сечения π - P и P - P взаимодействий в ряд по q^2 .

Эти разложения имеют вид

$$\sigma_0(\nu) \approx \sigma_0(0) \left(1 - \frac{q^2 R^2}{6}\right), \text{ при } E_{\pi, P} \approx (1 \div 3) \text{ BeV и } R = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

При проведении намеченных расчетов для ядер углерода получается поправка в $\bar{\sigma}^2$ около 6,5%.

Авторы благодарят С.М. Биленького, Г.В. Ефимова, В.И. Огиевского и Р.М. Рынди-на за участие в обсуждениях.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Мотт и Г.Месси "Теория атомных столкновений". ИЛ /1951/.
2. Mott Proc. Roy. Soc. A 127, 658, 1930.
3. Н. Bethe Ann. of Phys. 3, 190, 1958
4. R. Hofstadter Rev. Mod. Phys. 28, 214, 1956
5. J.W. Cronin, R. Cool and A. Abashian Phys. Rev. 107, 1121, 1957
6. T. Bowen, M. Di. Corato, W.H. Moore and G. Tagliaferri.
Nuovo Cimento IX, 908, 1958.
7. Р.Б. Бегжанов. ЖЭТФ 34, 775 /1958/
8. Р.Б. Бегжанов. ЖЭТФ 34, 1013 /1958/.

Работа поступила в издательский отдел 26 января 1959 года.