Acta Phys. Acad. Scien. Hung. 1967, т. 22, в. 1-4, с. 201-219.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2886

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

К ТЕОРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ SL (2,C)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2886

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

К ТЕОРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ SL(2,C)

Направлено в журнал Института Анри Пуанкаре

§ 1. Введение

В ряде работ (Барут, Будини и Фронсдаль/1/, Дотан, Гелл-Манн и Нееман/2/, Фронсдаль/3/, Дельбурго, Салам и Стратде/4/, Руль/5/, Мишель/6/, Тодоров/7/ и Нгуен Ван Хьеу/8/) обсуждается возможность применения некомпактной группы симметрии для классификации элементарных частиц.

Было доказано, что в теории симметрии с группой G, являющейся полупрямым произведением группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ и некомпактной группы внутренней симметрии S,

$$G = \mathcal{P} \boxtimes S \quad ; \quad S \supset SL(2,C),$$

условие унитарности S-матрицы соблюдается/8/ и в такой теории мы можем ввести полевые операторы таким образом, чтобы была нормальная связь между спином и статистикой.

Прежде чем изучить экспериментальные следствия этой теории симметрии мы должны решить некоторые основные задачи, среди которых:

1) Изучение неприводимых унитарных (бесконечномерных) представлений некомпактной группы внутренней симметрии S и их расщепление на прямую сумму неприводимых конечномерных представлений максимальной компактной подгруппы группы S.

2) Вычисление матричных элементов конечных преобразований группы S, соответствующих чистым преобразованиям Лоренца, для её унитарных представлений.

Эти задачи были рассмотрены в выше упомянутых работах/1-8/, некоторые частные результаты были получены, но окончательных решений пока не было найдено.

В настоящей работе мы изучаем неприводимые унитарные представления группы $SL(2,C)$ и вычисляем матричные элементы конечных преобразований для этих представлений. Метод, который мы используем здесь, может быть обобщен для группы $SL(n,C)$ и $SU(p,q)$. Здесь необходимо отметить, что теория унитарных представлений этих групп получила полное развитие в работе Гельфанда И.М. и Наймарка М.А./9/. Теория Гельфанда и Наймарка является строгой теорией с математической точки зрения. Однако метод, используемый в этой работе, не удобен для физических приложений. Здесь же мы используем другой метод, который оказывается более удобным для физических приложений, а именно, метод однородных функций. Возможность использования однородных функций для изучения унитарных представлений некомпактных групп была обсуждена в работе/10/, а также в работах/3,5,11/. Используя метод однородных функций, мы можем получить результаты Гельфанда и Наймарка/9/ очень простым путем.

§ 2. Унитарные представления группы $SL(2,C)$

Группой $SL(2,C)$ называется группа всех комплексных матриц g второго порядка с равным единице детерминантом. Мы будем реализовать представления этой группы в Гильбертовом пространстве функций $f(z_1,z_2)$ двух комплексных переменных z_1 и z_2. Поставим в соответствие каждой матрице g преобразование T_g в пространстве функций $f(z_1,z_2)$:

$$g \longrightarrow T_g$$

$$T_g f(z_1,z_2) = f(z_1',z_2') \; ; \; z_a' = z_b g_{ba} \quad |a,b=1,2| \qquad (2.I)$$

Нетрудно показать, что $T_g T_{g'} = T_{gg'}$. Это означает, что соответствие (2.I) есть представление группы $SL(2,C)$. Определим теперь скалярное произведение в пространстве функций $f(z_1,z_2)$ следующим образом:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int f_1(z_1,z_2)\overline{f_2(z_1,z_2)} \cdot dz_1 d\bar{z}_1 \cdot dz_2 d\bar{z}_2 \qquad (2.2)$$

(Здесь и в дальнейшем черта над величиной означает её комплексное сопряжение). В таком случае наше Гильбертово пространство состоит из всех квадратично интегрируемых функций двух комплексных переменных. Легко проверить, что при скалярном произведении (2.2) операторы T_g унитарны:

$$\langle T_g f_1, T_g f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle .$$

Таким образом, мы получили унитарное представление (2.I), которое, однако, ещё не является неприводимым. Чтобы получить неприводимые представления, мы используем однородные функции. Функция $f(z_1,z_2)$ называется однородной функцией степени однородности (λ_1,λ_2), где λ_1, λ_2 - комплексные числа, если для любого комплексного $\sigma \neq 0$ имеем:

$$f(\sigma z_1, \sigma z_2) = \sigma^{\lambda_1} \bar{\sigma}^{\lambda_2} f(z_1,z_2) . \qquad (2.3)$$

Это определение имеет смысл, если разность $\lambda_1-\lambda_2$ равна целому числу. Из этого определения и из (2.I) следует, что если $f(z_1,z_2)$-однородная функция степени однородности (λ_1,λ_2), то $T_g f(z_1,z_2)$-также однородная функция той же степени однородности. Следовательно, Гильбертово пространство D_λ однородных функций некоторой степени однородности $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ реализует представления группы $SL(2C)$.

В пространстве однородных функций мы не можем, однако, использовать скалярное произведение в виде (2.2). В самом деле, каждой функции $f(z_1,z_2)$ из D_λ однозначно ставится функция одной комплексной переменной

$$f(z_1,z_2) \longrightarrow f(z) \equiv f(z,1) ,$$

ибо

$$f(z_1,z_2) = z_2^{\lambda_1} \bar{z}_2^{\lambda_2} f\left(\frac{z_1}{z_2},1\right) = z_2^{\lambda_1} \bar{z}_2^{\lambda_2} f\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \qquad (2.4)$$

и интеграл в правой части (2.2) преобразуется в произведение двух интегралов :

$$\int f_1(z_1,z_2)\overline{f_2(z_1,z_2)} \cdot dz_1 d\bar{z}_1 \cdot dz_2 d\bar{z}_2 = \int \left| z_2^{\lambda_1} \bar{z}_2^{\lambda_2} \right|^2 f_1\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{f_2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot |z_2|^2 d\left(\frac{z_1}{z_2}\right) d\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right) dz_2 d\bar{z}_2 =$$
$$= \int f_1(z)\overline{f_2(z)} dz d\bar{z} \cdot \int \left| z_2^{\lambda_1+1} \bar{z}_2^{\lambda_2+1} \right|^2 dz_2 d\bar{z}_2 ,$$

второй из них, как легко видеть, обращается в бесконечность.

Таким образом, в пространстве D_λ мы должны определить скалярное произведение иным образом. Так как однородная функция $f(z_1,z_2)$ эффективно зависит только от одного аргумента, то для определения скалярного произведения вместо интеграла по комплексной поверхности мы используем интеграл по комплексной линии, а именно, мы определяем скалярное произведение как:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{i}{2} \int f_1(z_1,z_2) \overline{f_2(z_1,z_2)}\, d\omega_z , \qquad (2.5)$$

где $d\omega_z$ - некоторая мера, инвариантная относительно преобразования

$$z_a \to z_a' = z_b g_{ba} , \quad \det g = 1 .$$

Легко видеть, что можно выбрать такую меру в виде:

$$d\omega_z = (z_2 dz_1 - z_1 dz_2)(\bar{z}_2 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 d\bar{z}_2) . \qquad (2.6)$$

Как и в предыдущем случае (2.2), из инвариантности меры $d\omega_z$ сразу вытекает унитарность операторов T_g относительно скалярного произведения (2.5), и, следовательно, мы получили унитарное представление группы $SL(2C)$ в пространстве D_λ .

Норма элемента $f(z_1,z_2) \in D_\lambda$ определяется по (2.5):

$$\| f \|^2 \equiv \langle f, f \rangle = \frac{i}{2} \int | f(z_1,z_2) |^2 d\omega_z . \qquad (2.7)$$

Подставляя в подинтегральное выражение (2.7) $z_a = \sigma z_a'$ и используя (2.3), имеем

$$\| f \|^2 = | \sigma^{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2 + 2} |^2 \cdot \| f \|^2 \qquad (2.8)$$

для любого комплексного $\sigma \neq 0$. Соотношение (2.8) показывает, что λ_1 и λ_2 должны удовлетворить уравнению

$$\lambda_1 + \bar{\lambda}_2 + 2 = 0 , \qquad (2.9)$$

решением которого является

$$\lambda_1 = \nu_0 + \frac{i\rho}{2} - 1 ,$$

$$\lambda_2 = -\nu_0 + \frac{i\rho}{2} - 1 ,$$

где ν_0 , ρ - действительные числа; так как $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu_0$ -целое число, то ν_0 должно принимать целые или полуцелые значения. Итак, мы получили унитарные представления в Гильбертовом пространстве D_λ однородных функций степени однородности $\lambda = (\nu_0 + \frac{i\rho}{2} - 1, -\nu_0 + \frac{i\rho}{2} - 1)$, где ν_0 - любое целое или полуцелое число, ρ - любое действительное число. Эти представления неприводимы /107/ и образуют так называемую главную серию. Они обозначаются через $\mathfrak{S}_{\nu_0 \rho}$. Наряду с этой главной серией имеется ещё дополнительная серия /9,10,12/. Эта серия также может рассматриваться аналогичным путем, однако на ней мы пока не будем останавливаться.

Наконец, отметим, что из (2.6) и (2.9) следует, что для представления основной серии скалярное произведение (2.5) переходит к хорошо знакомому [9,10,12] выражению:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{i}{2} \int f_1(z) f_2(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{2.10}$$

§ 3. Эквивалентные представления. Расщепление унитарного представления группы $SL(2C)$ на конечномерные представления группы $SU(2)$

Пусть $\mathfrak{S}_{\chi_0 \varrho}$ (с операторами T_g) и $\mathfrak{S}_{\chi_0' \varrho'}$ с операторами T'_g) – два неприводимых унитарных представления группы $SL(2C)$, которые реализуются в Гильбертовых пространствах однородных функций

$$D_{\lambda \equiv (\chi_0 + \frac{i\varrho}{2} - 1, -\chi_0 + \frac{i\varrho}{2} - 1)} \quad \text{и} \quad D_{\lambda' \equiv (\chi_0' + \frac{i\varrho'}{2} - 1, -\chi_0' + \frac{i\varrho'}{2} - 1)},$$

соответственно. Найдем теперь условие эквивалентности этих двух представлений. Представления $\mathfrak{S}_{\chi_0 \varrho}$ и $\mathfrak{S}_{\chi_0' \varrho'}$ называются эквивалентными, если существует оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство D_λ на пространство $D_{\lambda'}$, такой, что

$$T'_g A = A T_g \tag{3.1}$$

для любого элемента g. Из этого определения сразу видно, что, если $\lambda = \lambda'$ $(т.е.\ \chi_0 = \chi_0',\ \varrho = \varrho')$, то $\mathfrak{S}_{\chi_0 \varrho}$ и $\mathfrak{S}_{\chi_0' \varrho'}$ эквивалентны. При этом пространства D_λ и $D_{\lambda'}$ попросту совпадают. Это- тривиальный случай, не представляющий никакого интереса. Пусть $f(\xi_1, \xi_2) \in D_\lambda$, $f'(\eta_1, \eta_2) \in D_{\lambda'}$. Представим оператор A в виде интегрального преобразования с некоторым ядром K:

$$f'(\eta_1, \eta_2) = A f(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{i}{2} \int K(\eta_1, \eta_2; \xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2)\, d\omega_\xi. \tag{3.2}$$

Тогда условие (3.1) может быть записано в следующем явном виде:

$$T'_g f'(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{2} \int K(\eta_1, \eta_2; \xi_1, \xi_2)\, T_g f(\xi_1, \xi_2)\, d\omega_\xi. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) в свою очередь перепишется, с учетом (2.1), в виде

$$f'(\eta_1', \eta_2') = \frac{i}{2} \int K(\eta_1, \eta_2; \xi_1, \xi_2) f(\xi_1', \xi_2')\, d\omega_{\xi'}, \tag{3.4}$$

где $\eta_a' = \eta_b g_{ba}$, $\xi_a' = \xi_b g_{ba}$. Сравнивая (3.4) с определением (3.2), мы имеем:

$$K(\eta_1', \eta_2'; \xi_1', \xi_2') = K(\eta_1, \eta_2; \xi_1, \xi_2),$$

т.е. ядро K должно быть инвариантной функцией от ξ_a и η_a. Далее, как хорошо известно в теории спинорных представлений группы $SL(2C)$, из переменных ξ_a и η_a мы можем образовать следующий инвариант:

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1 \quad = \text{инвариант}.$$

Таким образом, ядро $K(\eta_1,\eta_2;\xi_1,\xi_2)$ должно быть функцией от инварианта $(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$. Оно также должно быть однородной функцией, так как $f'(\eta_1,\eta_2)$ – однородная функция. Пусть оно является однородной функцией от (ξ_1,ξ_2) степени однородности (μ_1,μ_2). Тогда, подставляя в подинтегральное выражение (3.2) $\xi_\alpha=\sigma\xi'_\alpha$, мы имеем:

$$\int K(\eta_1,\eta_2;\xi_1,\xi_2)f(\xi_1,\xi_2)d\omega_\xi=(\sigma)^{\mu_1+\lambda_1+2}(\bar{\sigma})^{\mu_2+\lambda_2+2}\int K(\eta_1,\eta_2;\xi'_1,\xi'_2)f(\xi'_1,\xi'_2)d\omega_{\xi'}$$

для любого комплексного $\sigma\neq0$. Отсюда следует, что

$$\mu_1=-\lambda_1-2=-\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1\ ,$$
$$\mu_2=-\lambda_2-2=+\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1\ . \tag{3.5}$$

Таким образом, $K(\eta_1,\eta_2;\xi_1,\xi_2)$ должно быть однородной функцией от (ξ_1,ξ_2) степени однородности $(-\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1,\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1)$. (С другой стороны, так как $K(\eta_1,\eta_2;\xi_1,\xi_2)$ -функция от комбинации $(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$, то К также является однородной функцией от (η_1,η_2) той же степени однородности $(-\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1,\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1)$. Тогда из (3.2) следует, что $f'(\eta_1,\eta_2)$ – также однородная функция степени однородности $(-\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1,\nu_0-\frac{i\rho}{2}-1)$. Это означает, что если $\nu'_0=-\nu_0$, $\rho'=-\rho$, то представления $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$ и $\mathfrak{S}_{\nu'_0\rho'}$ эквивалентны.

Рассмотрим теперь расщепление неприводимого унитарного представления группы $SL(2C)$ на прямую сумму неприводимых (конечномерных) представлений её максимальной компактной подгруппы $SU(2)$. В теории спинорных представлений групп $SL(2C)$ хорошо известно, что если z_α преобразуется как спинор φ_α, то $\bar{z}_\alpha$ преобразуется как спинор $\varphi^{\dot{\alpha}}$, следовательно, сумма $z_\alpha\bar{z}_\alpha$ преобразуется как $\varphi_\alpha\varphi^{\dot{\alpha}}$ = инвариант подгруппы $SU(2)$. Мы будем поэтому обозначать $\bar{z}_\alpha$ через $\bar{z}^{\dot{\alpha}}$ или просто $\bar{z}^{\alpha}$ ради удобства.

Для наглядности мы иллюстрируем наш метод некоторыми частными примерами. Общий случай будет рассматриваться в следующем параграфе.

Рассмотрим сначала представление $\mathfrak{S}_{0\rho}$. Это представление реализуется в пространстве $D(\frac{i\rho}{2}-1,\frac{i\rho}{2}-1)$ однородных функций $f(z_1,z_2)$ степени однородности $(\frac{i\rho}{2}-1,\frac{i\rho}{2}-1)$. Одной из таких функций является

$$f_{00}(z_1,z_2)\sim(z_1\bar{z}^1+z_2\bar{z}^2)^{\frac{i\rho}{2}-1}. \tag{3.6}$$

Как было указано, эта функция инвариантна относительно группы $SU(2)$ и, следовательно, характеризует состояние с нулевым спином. Для получения функций, соответствующих состояниям с ненулевыми спинами, мы должны строить эти функции так, чтобы они содержали некоторое число множителей z_α и $\bar{z}^b$ без суммирования. Легко видеть, например, что для состояний со спином $j=1$ имеем следующие функции:

$$f_{11}(z_1,z_2)\sim(z_1\bar{z}^1+z_2\bar{z}^2)^{\frac{i\rho}{2}-2}z_1\bar{z}^2 \quad \text{для } m=+1, \tag{3.7}$$

$$f_{10}(z_1,z_2) \sim (z_1\bar z^1 + z_2\bar z^2)^{\frac{i\rho}{2}-2}(z_2\bar z^2 - z_1\bar z^1) \quad \text{для } m=0, \tag{3.8}$$
$$f_{1,-1}(z_1,z_2) \sim (z_1\bar z^1 + z_2\bar z^2)^{\frac{i\rho}{2}-2}\, z_2\bar z^1 \quad \text{для } m=-1 \tag{3.9}$$
(m -проекция спина на оси Oz .

Рассмотрим теперь представления $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}(\nu_0\neq 0)$. Так как представления $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$ и $\mathfrak{S}_{-\nu_0,-\rho}$ эквивалентны, то мы можем для определенности считать, что $\nu_0>0$. Мы выбираем базисные элементы представления $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$ в виде произведений величины $(z_1\bar z^1+z_2\bar z^2)^{\frac{i\rho}{2}-n}$ $(n\geqslant\nu_0+1)$ на некоторое число множителей z_a и $\bar z^b$ без суммирования. Легко видеть, что такие произведения с наименьшим числом свободных множителей z_a и $\bar z^b$ имеют вид:
$$f(z_1,z_2) \sim (z_1\bar z^1+z_2\bar z^2)^{\frac{i\rho}{2}-1-\nu_0}\, z_{a_1}z_{a_2}\cdots z_{a_{2\nu_0}}. \tag{3.10}$$
Эти функции описывают состояния со спином $j_0=\nu_0$. Остальные же функции описывают состояния со спином $j=j_0+1, j_0+2,\ldots$. Таким образом, представление $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$ расщепляется на прямую сумму неприводимых конечномерных представлений компактной подгруппы $SU(2)$. Каждое такое неприводимое конечномерное предсталение встречается в $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$ только один раз и характеризует состояние с определенным спином, принимающим одно из значений $j=\nu_0, \nu_0+1, \nu_0+2, \ldots$

§ 4. Матричные элементы конечных преобразований

Как было упомянуто во введении, матричные элементы конечных преобразований группы S вообще и группы $SL(2C)$ в частности необходимо знать при изучении структуры матричных элементов процессов в любой теории симметрии с некомпактными группами. Отметим, что задача нахождения матричных элементов конечных преобразований группы Лоренца впервые была поставлена и частично решена (для случая $\nu_0=0$) Долгиновым и Топтыгиным в работе[13]. Авторы этой работы использовали в качестве базисных функции, являющиеся аналитическим продолжением четырехмерных шаровых функций эвклидова пространства (более подробно см[13,14]).

Наш вывод основан исключительно на результатах, изложенных в § 2 при помощи метода однородных функций. Пусть нам нужно найти матричный элемент $D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(g)$, который определяется как:
$$g \longrightarrow U_g\ ;\ U_g\,|\nu_0\rho;jm\rangle = \sum_{j'm'} D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(g)\,|\nu_0\rho;j'm'\rangle\ , \tag{4.1}$$
где через $|\nu_0\rho;jm\rangle$ обозначается канонический базис представления $\mathfrak{S}_{\nu_0\rho}$; j, m - спин и его проекция на ось Oz , соответственно. Обобщая результаты (3.6) -(3.10), мы найдем канонический базис $|\nu_0\rho;jm\rangle$ в пространстве однородных функций $D_\lambda \equiv (\nu_0+\frac{i\rho}{2}-1, -\nu_0+\frac{i\rho}{2}-1)$ следующим образом:
$$|\nu_0\rho;jj\rangle \longrightarrow f^{\nu_0\rho}_{jj}(z_1,z_2) = C_{jj}\,(z_1\bar z^1+z_2\bar z^2)^{\frac{i\rho}{2}-1-j}(z_1)^{j+\nu_0}(\bar z^2)^{j-\nu_0}, \tag{4.2}$$
где C_{jj} - коэффициент нормировки, который определяется по (2.10) и равен :
$$C_{jj} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(2j+1)!}{(j+\nu_0)!\,(j-\nu_0)!}\right\}^{1/2}. \tag{4.3}$$
Из $|\nu_0\rho;jj\rangle$ можно найти $|\nu_0\rho;jm\rangle$ стандартным методом:

$$|\nu_0\rho; jm\rangle \to f^{\nu_0\rho}_{jm}(z_1,z_2) = N_{jm}(J_-)^{j-m} f^{\nu_0\rho}_{jj}(z_1,z_2), \tag{4.4}$$

где

$$N_{jm} = \left\{ \frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!} \right\}^{1/2}, \tag{4.5}$$

$$J_- = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}^1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}. \tag{4.6}$$

Из (4.2)-(4.6) мы получим окончательное выражение для $f^{\nu_0\rho}_{jm}(z_1,z_2)$:

$$f^{\nu_0\rho}_{jm}(z_1,z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (2j+1)\cdot(j+m)!\,(j-m)!\,(j+\nu_0)!\,(j-\nu_0)! \right\}^{1/2} \cdot \left(z_1\bar{z}^1 + z_2\bar{z}^2\right)^{\frac{i\rho}{2}-1-j} \cdot \tag{4.7}$$

$$\cdot \sum_d (-1)^d \frac{1}{d!\,(j-m-d)!\,(\nu_0+m+d)!\,(j-\nu_0-d)!} (z_1)^{\nu_0+m+d} (z_2)^{j-m-d} (\bar{z}^1)^d (\bar{z}^2)^{j-\nu_0-d}.$$

Имея явное выражение для канонического базиса $|\nu_0\rho; jm\rangle$, мы можем теперь легко найти матричный элемент $D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(g)$. Известно, что всякую матрицу g можно представить в виде:

$$g = u_1 \varepsilon u_2,$$

где u_1, u_2 - унитарные унимодулярные матрицы, соответствующие трехмерному вращению;

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

(ε - действительное число)

и соответствует чистому вращению Лоренца в плоскости (x_3, x_4). Таким образом, можно, не нарушая общности, ограничиваться нахождением только $D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon)$.

Из (4.I) и из соотношения ортонормированных базисных функций $f^{\nu_0\rho}_{jm}$

$$\frac{i}{2}\int f^{\nu_0\rho}_{jm}(z)\,\overline{f^{\nu_0\rho}_{j'm'}(z)}\,dz\,d\bar{z} = \delta_{jj'}\cdot\delta_{mm'}$$

имеем:

$$D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon) = \frac{i}{2}\int T_\varepsilon f^{\nu_0\rho}_{jm}(z)\cdot\overline{f^{\nu_0\rho}_{j'm'}(z)}\,dz\,d\bar{z}. \tag{4.8}$$

Отсюда с помощью (2.I) и (4.7) мы получим

$$D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon) = \delta_{mm'}\cdot\frac{1}{\pi}\left\{(2j+1)(2j'+1)\cdot(j+m)!\,(j-m)!\,(j+\nu_0)!\,(j-\nu_0)!\,(j'+m)!\,(j'-m)!\,(j'+\nu_0)!\,(j'-\nu_0)!\right\}^{1/2}$$

$$\sum_{d,d'}(-1)^{d+d'}\left\{d!\,d'!\,(j-m-d)!\,(j'-m-d')!\,(\nu_0+m+d)!\,(\nu_0+m+d')!\,(j-\nu_0-d)!\,(j'-\nu_0-d')!\right\}^{-1} \tag{4.9}$$

$$\varepsilon^{-2(2d+m+\nu_0+1-\frac{i\rho}{2})}\cdot\frac{i}{2}\int dz\,d\bar{z}\,|z|^{2(d+d'+m+\nu_0)}\left(1+|z|^2\right)^{-\frac{i\rho}{2}-1-j'}\left(1+\varepsilon^{-4}|z|^2\right)^{\frac{i\rho}{2}-1-j},$$

где d и d' пробегают целые числа, которые не обращают каждый множитель под знаком факториала в отрицательную величину. Используя замену $z = \sqrt{v}\,e^{i\varphi}$ $(0 \leq v < \infty;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, мы приводим интеграл в (4.9) к виду:

$$J = \pi\int_0^\infty dv\cdot v^{d+d'+m+\nu_0}(1+v)^{-\frac{i\rho}{2}-1-j'}\left(1+\varepsilon^{-4}v\right)^{\frac{i\rho}{2}-1-j}.$$

При значениях d и d', указанных в (4.9), J оказывается равным :

$$J = \pi \varepsilon^{4(d+d'+m+\nu_0+1)} \cdot \frac{(d+d'+m+\nu_0)!\,(j+j'-d-d'-m-\nu_0)!}{(j+j'+1)!} F\left(j'+1+\frac{i\rho}{2}, d+d'+m+\nu_0+1; j+j'+2; 1-\varepsilon^4\right), \tag{4.10}$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ – гипергеометрическая функция.

Подставляя (4.10) в (4.9), мы получим окончательный результат:

$$D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon) = \frac{\delta_{mm'}}{(j+j'+1)!}\left\{(2j+1)(2j'+1)(j+m)!(j-m)!(j+\nu_0)!(j-\nu_0)!(j'+m)!(j'-m)!(j'+\nu_0)!(j'-\nu_0)!\right\}^{1/2} \tag{4.11}$$

$$\sum_{d,d'} (-1)^{d+d'} \frac{(d+d'+m+\nu_0)!\,(j+j'-d-d'-m-\nu_0)!}{d!\,d'!\,(j-m-d)!\,(j'-m-d')!\,(\nu_0+m+d)!\,(\nu_0+m+d')!\,(j-\nu_0-d)!\,(j'-\nu_0-d')!}$$

$$\varepsilon^{2(2d'+m+\nu_0+1+\frac{i\rho}{2})} F\left(j'+1+\frac{i\rho}{2}, d+d'+m+\nu_0+1; j+j'+2; 1-\varepsilon^4\right).$$

Этот результат в точности (до некоторого несущественного множителя) совпадает с результатом, полученным авторами в работе /15/ другим методом.

Отметим теперь некоторые простые свойства функции $D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon)$.

1. Полагая в (4.11) ε =1 с учетом $F(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1$, имеем

$$D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(1) = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{4.12}$$

Это тривиальное соотношение. Оно выражает тот факт, что мы имеем дело с тождественным преобразованием.

2. Переставляя в (4.11) jm и $j'm'$ и используя свойства гипергеометрической функции

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right), \tag{4.13}$$

мы получим

$$D^{\nu_0\rho}_{j'm';jm}(\varepsilon) = \overline{D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}}(\varepsilon^{-1}). \tag{4.14}$$

3. Заменяя в (4.11) m, m' на $-m, -m'$, затем полагая $j-\nu_0-d = d_1$, $j'-\nu_0-d' = d_1'$ и используя (4.13), приходим к

$$D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon) = (-1)^{j+j'-2\nu_0} D^{\nu_0\rho}_{j,-m;j',-m'}(\varepsilon^{-1}), \tag{4.15}$$

4. Из (4.I2), (4.I4) и из группового свойства функции $D_{jm;j'm'}$ следует

$$\sum_{jm} D^{\nu_0\rho}_{jm;j'm'}(\varepsilon)\,\overline{D^{\nu_0\rho}_{jm;j''m''}(\varepsilon)} = \delta_{j'j''}\,\delta_{m'm''} .$$

Последнее соотношение представляет собой условие унитарности представления.

§ 5. Обобщенные тензоры

От канонических базисов $f^{\nu_0\rho}_{jm}(z_1,z_2)$, явное выражение которых уже дано в (4.7), мы перейдем теперь к другим базисам, которые являются обобщенными тензорами для группы $SU(2,C)$ и строятся следующим образом:

$$f^{b_1b_2\ldots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\ldots a_{j+\nu_0}}(z_1,z_2) = (z_c\bar z^c)^{\frac{i\rho}{2}-1-j}\,\phi^{b_1b_2\ldots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\ldots a_{j+\nu_0}},\quad /a,b=1,2/ \tag{5.I}$$

где

$$\phi^{b_1b_2\ldots b_t}_{a_1a_2\ldots a_{t+k}} = \sum_{s=0}^{t}\alpha(t,s,k)(z_c\bar z^c)^s\, S\,\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\ldots\delta^{b_s}_{a_s} z_{a_{s+1}}\ldots z_{a_{t+k}}\bar z^{b_{s+1}}\ldots\bar z^{b_t} \tag{5.2}$$

$$\alpha(t,s,k) = (-1)^s\frac{t!(t+k)!(2t+k-s)!}{s!(t-s)!(t+k-s)!(2t+k)!} . \tag{5.3}$$

S означает симметризацию по нижним и верхним индексам a и b в отдельности:

$$S\left(T^{b_1b_2\ldots b_j}_{a_1a_2\ldots a_i}\right) = \frac{1}{i!\,j!}\sum_{P(a,b)} T^{b_1b_2\ldots b_j}_{a_1a_2\ldots a_i}$$

($\sum_{P(a,b)}$ - суммирование по всем перестановкам a и по всем перестановкам b).

Тензоры $\phi^{b_1b_2\ldots b_t}_{a_1a_2\ldots a_{t+k}}$ симметричны по верхним и нижним индексам и имеют нулевой шпур по любой паре верхнего и нижнего индексов - они являются неприводимыми относительно группы $SU(2)$. Полагая в (5.I), например, $a_1=a_2=\ldots=a_{j+\nu_0}=1$; $b_1=b_2=\ldots=b_{j-\nu_0}=2$, легко видеть из (5.I), (5.3) и (4.2):

$$f^{\overbrace{22\ldots2}^{j-\nu_0\ \text{раз}}}_{\underbrace{11\ldots1}_{j+\nu_0\ \text{раз}}} = \sqrt{\pi}\left\{\frac{(j+\nu_0)!\,(j-\nu_0)!}{(2j+1)!}\right\}^{1/2} f^{\nu_0\rho}_{jj} .$$

Обратной к (5.2) формулой разложения является:

$$z_{a_1}z_{a_2}\ldots z_{a_{t+k}}\bar z^{b_1}\bar z^{b_2}\ldots\bar z^{b_t} = \sum_{s=0}^{t}\beta(t,s,k)(z_c\bar z^c)^{t-s}\, S\,\phi^{b_1b_2\ldots b_s}_{a_1a_2\ldots a_{s+k}}\delta^{b_{s+1}}_{a_{s+k+1}}\ldots\delta^{b_t}_{a_{t+k}}, \tag{5.4}$$

где

$$\beta(t,s,k) = \frac{t!\,(t+k)!\,(2s+k+1)!}{s!\,(s+k)!\,(t-s)!\,(t+k+s+1)!} . \tag{5.5}$$

При преобразовании g тензор $f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}$ переходит в

$$T_g f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}} = \sum_{j'} D^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0};\,c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0};\,d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}(g)\, f^{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}_{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}} \tag{5.6}$$

(Как везде, по повторным индексам c, d проводится суммирование), где матричные элементы $D^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0};\,c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0};\,d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}$ являются обобщением $D^{\nu_0 \rho}_{jm;\,j'm'}(g)$, найденных в § 4. Их явное выражение будет дано в следующем параграфе.

Всякую однородную функцию $\varphi(z_1,z_2)$ из пространства $D_{(\nu_0+\frac{i\rho}{2}-1,\,-\nu_0+\frac{i\rho}{2}-1)}$ можно разложить по тензорам $f^{b_1b_2\dots}_{a_1a_2\dots}$:

$$\varphi(z_1,z_2) = \sum_{j'} \varphi^{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}\, f^{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}_{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}(z_1,z_2), \tag{5.7}$$

где $\varphi^{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}$ – также симметричные по верхним и нижним индексам и имеют нулевой шпур. Их мы называем также обобщенными тензорами. При преобразовании g функция $\varphi(z_1,z_2)$ переходит в $T_g\varphi(z_1,z_2)$, которую опять разложим по тензорам $f^{b_1b_2\dots}_{a_1a_2\dots}$. Имеем:

$$T_g\varphi(z_1,z_2) = \sum_{j} T_g \varphi^{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}_{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}\, f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}(z_1,z_2). \tag{5.8}$$

С другой стороны, из (5.6) и (5.7) следует

$$T_g\varphi(z_1,z_2) = \sum_{j'j} \varphi^{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}\, D^{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0};\,a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}_{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0};\,b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}(g)\, f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}} . \tag{5.9}$$

Сравнивая (5.8) и (5.9), сразу найдем закон преобразования для тензора $\varphi^{a_1a_2\dots}_{b_1b_2\dots}$:

$$T_g \varphi^{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}_{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}} = \sum D^{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0};\,a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}_{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0};\,b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}(g)\, \varphi^{c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}} \tag{5.I0}$$

§ 6. Матричные элементы для обобщенных тензоров

Мы найдем в этом параграфе явное выражение для матричных элементов $D^{b_1b_2\dots;\,c_1c_2\dots}_{a_1a_2\dots;\,d_1d_2\dots}(g)$, определяемых по (5.6) (или по (5.I0)). Перепишем сначала (5.I) и (5.2) в виде

$$f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}(z_1,z_2) = \sum_{s=0}^{j-\nu_0} \alpha(j-\nu_0,s,2\nu_0)\,(z_c\bar z^c)^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s} \mathfrak{S}\, \delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\dots\delta^{b_s}_{a_s} z_{a_{s+1}}\dots z_{a_{j+\nu_0}}\,\bar z^{b_{s+1}}\dots\bar z^{b_{j-\nu_0}}. \tag{6.I}$$

Так как при преобразовании g

$$z_a \to z'_a = z_b g_{ba} = z_b g^b_a\,;\quad \bar z^a \to \bar z'^a = \bar z^b g^+_{ba} = \bar z^b g^{+a}_{b}$$ (g^+ - матрица, эрмитова сопряженная к g)

$$f(z_1,z_2) \longrightarrow T_g f(z_1,z_2) = f(z'_1,z'_2)\,,$$

то тензор $f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}}$ переходит в :

$$T_g f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}} = \sum_{s=0}^{j-\nu_0}\alpha(j-\nu_0,s,2\nu_0)\left\{z_p\bar z^q (gg^+)^p_q\right\}^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s} z_{c_{s+1}} z_{c_{s+2}}\dots z_{c_{j+\nu_0}}\,\bar z^{d_{s+1}}\bar z^{d_{s+2}}\dots\bar z^{d_{j-\nu_0}}\cdot \tag{6.2}$$

$$\cdot \mathcal{S}_{(a,b)}\,\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\dots\delta^{b_s}_{a_s}\, g^{c_{s+1}}_{a_{s+1}} g^{c_{s+2}}_{a_{s+2}}\dots g^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}}\, g^{+b_{s+1}}_{d_{s+1}} g^{+b_{s+2}}_{d_{s+2}}\dots g^{+b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0}}\,.$$

Так как всякую матрицу 2x2 можно разложить по 4 матрицам Паули $\{\sigma_0 = 1, \vec\sigma\}$, то мы можем положить:

$$gg^+ = \alpha_0\sigma_0 + \hat\alpha = \alpha_0(1+\hat\beta)\,;\quad \hat\beta \equiv \frac{1}{\alpha_0}\hat\alpha = \frac{1}{\alpha_0}\vec\alpha\vec\sigma\,. \tag{6.3}$$

Подставляя это выражение для gg^+ в $\{z_p\bar z^q (gg^+)^p_q\}^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}$ и разлагая последнее на сумму по степеням $z_c\bar z^c$, имеем:

$$\left\{z_p\bar z^q (gg^+)^p_q\right\}^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s} = \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}\left\{z_c\bar z^c + z_p\hat\beta^p_q\bar z^q\right\}^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s} = \tag{6.4}$$

$$= \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k\right)}\left(z_c\bar z^c\right)^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s-k}\left(z_p\hat\beta^p_q\bar z^q\right)^k.$$

С помощью (6.4) перепишем (6.2) в виде:

$$T_g f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0}} = \sum_{s=0}^{j-\nu_0}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(j-\nu_0,s,2\nu_0)\frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k\right)}\,\alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}\left(z_c\bar z^c\right)^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s-k} \tag{6.5}$$

$$\hat\beta^{p_1}_{q_1}\hat\beta^{p_2}_{q_2}\dots\hat\beta^{p_k}_{q_k}\, z_{p_1}z_{p_2}\dots z_{p_k} z_{p_{k+1}} z_{p_{k+2}}\dots z_{p_{k+j+\nu_0-s}}\,\bar z^{q_1}\bar z^{q_2}\dots\bar z^{q_k}\bar z^{q_{k+1}}\dots\bar z^{q_{k+j-\nu_0-s}}$$

$$\mathcal{S}_{(a,b)}\,\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\dots\delta^{b_s}_{a_s}\, g^{p_{k+1}}_{a_{s+1}} g^{p_{k+2}}_{a_{s+2}}\dots g^{p_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\, g^{+b_{s+1}}_{q_{k+1}} g^{+b_{s+2}}_{q_{k+2}}\dots g^{+b_{j-\nu_0}}_{q_{k+j-\nu_0-s}}\,,$$

где для удобства в дальнейшем мы провели замену индексов суммирования.

$$c_{s+1} \longrightarrow p_{k+1} \qquad d_{s+1} \longrightarrow q_{k+1}$$
$$c_{s+2} \longrightarrow p_{k+2} \qquad d_{s+2} \longrightarrow q_{k+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$c_{j+\nu_0} \longrightarrow p_{k+j+\nu_0-s} \qquad d_{j-\nu_0} \longrightarrow q_{k+j-\nu_0-s}$$

Разлагая теперь $\overset{}{z}_{p_1} \overset{}{z}_{p_2} \ldots \overset{}{z}_{p_{k+j+\nu_0-s}} \bar{z}^{q_1} \bar{z}^{q_2} \ldots \bar{z}^{q_{k+j-\nu_0-s}}$ по $\phi^{q_1 q_2 \ldots}_{p_1 p_2 \ldots}$ при помощи (5.4) и подставляя найденное выражение в (6.5), получим:

$$T_g \int^{b_1 b_2 \ldots b_{j-\nu_0}}_{a_1 a_2 \ldots a_{j+\nu_0}} = \tag{6.6}$$

$$= \sum_{s=0}^{j-\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k+j-\nu_0-s} \alpha(j-\nu_0, s, 2\nu_0) \cdot \beta(k+j-\nu_0-s, r, 2\nu_0) \frac{\Gamma\left(\frac{i\varrho}{2}-j+s\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{i\varrho}{2}-j+s-k\right)} \alpha_0^{\frac{i\varrho}{2}-1-j+s} \cdot$$

$$\cdot \left(z_c \bar{z}^c\right)^{\frac{i\varrho}{2}-1-\nu_0-r} \hat{\beta}^{p_1}_{q_1} \hat{\beta}^{p_2}_{q_2} \ldots \hat{\beta}^{p_k}_{q_k} \sum_{(p,q)} \phi^{q_1 q_2 \ldots q_r}_{p_1 p_2 \ldots p_{r+2\nu_0}} \delta^{q_{r+1}}_{p_{r+2\nu_0+1}} \ldots \delta^{q_{k+j-\nu_0-s}}_{p_{k+j+\nu_0-s}}$$

$$\sum_{(a,b)} \delta^{b_1}_{a_1} \delta^{b_2}_{a_2} \ldots \delta^{b_s}_{a_s} g^{p_{k+1}}_{a_{s+1}} g^{p_{k+2}}_{a_{s+2}} \ldots g^{p_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}} \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{q_{k+1}} \overset{+}{g}{}^{b_{s+2}}_{q_{k+2}} \ldots \overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{q_{k+j-\nu_0-s}} .$$

Заметим, что в произведении

$$\left\{ \hat{\beta}^{p_1}_{q_1} \ldots \hat{\beta}^{p_k}_{q_k} g^{p_{k+1}}_{a_{s+1}} g^{p_{k+2}}_{a_{s+2}} \ldots g^{p_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}} \cdot \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{q_{k+1}} \overset{+}{g}{}^{b_{s+2}}_{q_{k+2}} \ldots \overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{q_{k+j-\nu_0-s}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \sum_{P(p,q)} \left\{ \phi^{q_1 q_2 \ldots q_r}_{p_1 p_2 \ldots p_{r+2\nu_0}} \delta^{q_{r+1}}_{p_{r+2\nu_0+1}} \delta^{q_{r+2}}_{p_{r+2\nu_0+2}} \ldots \delta^{q_{k+j-\nu_0-s}}_{p_{k+j+\nu_0-s}} \right\}$$

мы можем переставить знак $\sum_{P(p,q)}$ между двумя сомножителями в фигурных скобках без всякого изменения, так как по индексам p и q проводится суммирование.

Таким образом, выражение (6.6) может быть переписано в более удобной форме:

$$T_g \int^{b_1 b_2 \ldots b_{j-\nu_0}}_{a_1 a_2 \ldots a_{j+\nu_0}} = \tag{6.7}$$

$$= \sum_{s=0}^{j-\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j'=\nu_0}^{k+j-s} \left(z_c \bar{z}^c\right)^{\frac{i\varrho}{2}-1-j'} \phi^{q_1 q_2 \ldots q_{j'-\nu_0}}_{p_1 p_2 \ldots p_{j'+\nu_0}} \alpha_0^{\frac{i\varrho}{2}-1-j+s}$$

$$\cdot\, \alpha(j-\nu_0, s, 2\nu_0)\, \beta(k+j-\nu_0-s, j'-\nu_0, 2\nu_0)\, \frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k\right)}\, \delta^{q_{j'-\nu_0+1}}_{p_{j'+\nu_0+1}}\, \delta^{q_{j'-\nu_0+2}}_{p_{j'+\nu_0+2}} \cdots \delta^{q_{k+j-\nu_0-s}}_{p_{k+j+\nu_0-s}}$$

$$\cdot\, \frac{1}{(j-\nu_0)!\,(j+\nu_0)!\,(k+j-\nu_0-s)!\,(k+j+\nu_0-s)!} \sum_{P(a,b,p,q)} \hat\beta^{p_1}_{q_1}\cdots\hat\beta^{p_k}_{q_k}\, \delta^{b_1}_{a_1}\cdots\delta^{b_s}_{a_s}\, g^{p_{k+1}}_{a_{s+1}}\cdots g^{p_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\, \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{q_{k+1}}\cdots \overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{q_{k+j-\nu_0-s}}$$

где мы использовали замену $r+\nu_0 = j'$.

Из (6.7) и из определений (5.I) и (5.6) нетрудно получить следующее выражение для $D^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0};\,c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0};\,d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}$:

$$D^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0};\,c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0};\,d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}(g) =$$

$$= \sum_{k=\max(0,j'-j)}^{\infty}\ \sum_{s=0}^{\min(j-\nu_0,\,j+k-j')} \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}\, \alpha(j-\nu_0, s, 2\nu_0)\, \beta(k+j-\nu_0-s, j'-\nu_0, 2\nu_0)\, \frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k\right)}\ \cdot \tag{6.8}$$

$$\cdot\, \frac{1}{(j-\nu_0)!\,(j+\nu_0)!\,(k+j-\nu_0-s)!\,(k+j+\nu_0-s)!}\, \delta^{d_{j'-\nu_0+1}}_{c_{j'+\nu_0+1}}\, \delta^{d_{j'-\nu_0+2}}_{c_{j'+\nu_0+2}} \cdots \delta^{d_{k+j-\nu_0-s}}_{c_{k+j+\nu_0-s}}\ \cdot$$

$$\cdot \sum_{P(a,b,c,d)} \hat\beta^{c_1}_{d_1}\cdots\hat\beta^{c_k}_{d_k}\, \delta^{b_1}_{a_1}\cdots\delta^{b_s}_{a_s}\, g^{c_{k+1}}_{a_{s+1}}\cdots g^{c_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\, \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{d_{k+1}}\cdots \overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{d_{k+j-\nu_0-s}}$$

Подставляя сюда явные выражения (5. 3) и (5.5) для α и β , получим окончательный результат:

$$D^{b_1b_2\dots b_{j-\nu_0};\,c_1c_2\dots c_{j'+\nu_0}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu_0};\,d_1d_2\dots d_{j'-\nu_0}}(g) = \tag{6.9}$$

$$= \sum_{k=\max(0,j'-j)}^{\infty}\ \sum_{s=0}^{\min(j-\nu_0,\,j+k-j')} (-1)^s\, \frac{(2j-s)!\,(2j'+1)!}{s!\,k!\,(2j)!\,(j'-\nu_0)!\,(j'+\nu_0)!\,(j-\nu_0-s)!\,(j+\nu_0-s)!\,(k+j-j'-s)!\,(k+j+j'-s+1)!}$$

$$\cdot\, \frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k\right)}\, \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1-j+s}\, \delta^{d_{j'-\nu_0+1}}_{c_{j'+\nu_0+1}}\, \delta^{d_{j'-\nu_0+2}}_{c_{j'+\nu_0+2}} \cdots \delta^{d_{k+j-\nu_0-s}}_{c_{k+j+\nu_0-s}}$$

$$\sum_{P(a,b,c,d)} \hat\beta^{c_1}_{d_1}\cdots\hat\beta^{c_k}_{d_k}\, \delta^{b_1}_{a_1}\cdots\delta^{b_s}_{a_s}\, g^{c_{k+1}}_{a_{s+1}}\cdots g^{c_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\, \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{d_{k+1}}\cdots \overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{d_{k+j-\nu_0-s}}$$

Рассмотрим теперь формулу (6.9) в некоторых частных случаях:

1. Если g – чистое вращение Лоренца в плоскости (x_3, x_4), т.е. $g \equiv \mathcal{E} - \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, то

$$g\overset{+}{g} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{2})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\varepsilon^{-2}-\varepsilon^{2})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а это значит,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{2}) \; ; \quad \hat{\beta} = \frac{\varepsilon^{-2}-\varepsilon^{2}}{\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{2}}\,\sigma_3 \,. \tag{6.10}$$

Подставляя (6.10) в (6.9), получим:

$$D^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu_0};\, c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu_0}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu_0};\, d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu_0}}(\varepsilon) = \tag{6.11}$$

$$= \sum_{k=\max(0,j'-j)}^{\infty} \sum_{s=0}^{\min(j-\nu_0,\, j+k-j')} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{s+m} \frac{(2j-s)!\,(2j'+1)!}{m!\,s!\,k!\,(2j)!\,(j'-\nu_0)!\,(j'+\nu_0)!\,(j-\nu_0-s)!\,(j+\nu_0-s)!\,(k+j-j'-s)!\,(k+j+j'-s+1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2^{k+m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-j+s-k-m\right)}\, \varepsilon^{2\left(j-s+1-\frac{i\rho}{2}\right)} (1-\varepsilon^{4})^{m+k}\, \delta^{d_{j'-\nu_0+1}}_{c_{j'+\nu_0+1}} \cdots \delta^{d_{k+j-j'-s}}_{c_{k+j+\nu_0-s}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{P(a,b,c,d)} (\sigma_3)^{c_1}_{d_1} \cdots (\sigma_3)^{c_k}_{d_k}\, \delta^{b_1}_{a_1} \cdots \delta^{b_s}_{a_s}\, \varepsilon^{c_{k+1}}_{a_{s+1}} \cdots \varepsilon^{c_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\, \varepsilon^{b_{s+1}}_{d_{k+1}} \cdots \varepsilon^{b_{j-\nu_0}}_{d_{k+j-\nu_0-s}}$$

Если положить в (6.11) $j = j'$ и

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{j+\nu_0} = c_1 = c_2 = \cdots = c_{j+\nu_0} = 1$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{j-\nu_0} = d_1 = d_2 = \cdots = d_{j-\nu_0} = 2\,,$$

то нетрудно проверить, что

$$D^{\nu_0 \rho}_{jj;jj}(\varepsilon) \equiv D^{\overbrace{22\ldots2}^{j-\nu_0\ \text{раз}};\,\overbrace{11\ldots1}^{j+\nu_0\ \text{раз}}}_{\underbrace{11\ldots1}_{j+\nu_0\ \text{раз}};\,\underbrace{22\ldots2}_{j-\nu_0\ \text{раз}}}(\varepsilon) = \varepsilon^{2\left(j-\nu_0+1-\frac{i\rho}{2}\right)} F\left(j+1-\frac{i\rho}{2},\, j-\nu_0+1;\, 2j+2;\, 1-\varepsilon^{4}\right)$$

Этот результат находится в полном согласии с (4.11).

2. Если g – преобразование, соответствующее переходу частицы из состояния покоя $\overset{0}{p}_\mu = (0,0,0;im_0)$ в состояние с $p_\mu = (\vec{p}; iE)$, то

$$g = \frac{E+m_0-\vec{\sigma}\vec{p}}{\sqrt{2m_0(E+m_0)}} \; ; \quad g\overset{+}{g} = \frac{E-\vec{\sigma}\vec{p}}{m_0}$$

и, следовательно,

$$\alpha_0 = \frac{E}{m_0} \; ; \quad \hat{\beta} = -\frac{1}{E}\vec{\sigma}\vec{p} .$$

3. При $j=0$ (а следовательно $\nu_0=0$) формула (6.9) переходит в

$$D^{;\, c_1 c_2 \dots c_{j'}}_{;\, d_1 d_2 \dots d_{j'}}(g) =$$

$$= \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-1} \sum_{k=j'}^{\infty} \frac{(2j'+1)!}{(j'!)^2 (k-j')!(k+j'+1)!} \cdot \frac{\Gamma(\frac{i\rho}{2})}{\Gamma(\frac{i\rho}{2}-k)} \delta^{d_{j'+1}}_{c_{j'+1}} \delta^{d_{j'+2}}_{c_{j'+2}} \dots \delta^{d_k}_{c_k} \sum_{P(c)} \hat{\beta}^{c_1}_{d_1} \hat{\beta}^{c_2}_{d_2} \dots \hat{\beta}^{c_k}_{d_k}$$

4. Если в формуле (6.11) мы полагаем $\mathcal{E} = 1+\alpha$, α мало отличается от нуля, что соответствует бесконечно малому вращению Лоренца в плоскости (x_3, x_4), то нетрудно получить:

$$D^{b_1 b_2 \dots b_{j-\nu_0};\, c_1 c_2 \dots c_{j+1+\nu_0}}_{a_1 a_2 \dots a_{j+\nu_0};\, d_1 d_2 \dots d_{j+1-\nu_0}}(\mathcal{E}) \approx \qquad (6.12)$$

$$\approx \alpha \cdot (2j+2-i\rho) \frac{1}{(j+1-\nu_0)!(j+1+\nu_0)!} \sum_{P(c,d)} (\sigma_3)^{c_1}_{d_1} \cdot \delta^{c_2}_{a_1} \dots \delta^{c_{j+1+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}} \cdot \delta^{b_1}_{d_2} \dots \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j+1-\nu_0}}$$

для перехода $j \to j' = j+1$;

$$D^{b_1 b_2 \dots b_{j-\nu_0};\, c_1 c_2 \dots c_{j+\nu_0}}_{a_1 a_2 \dots a_{j+\nu_0};\, d_1 d_2 \dots d_{j-\nu_0}}(\mathcal{E}) \approx \qquad (6.13)$$

$$\approx \frac{1}{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!} \sum_{P(a)} \delta^{c_1}_{a_1} \dots \delta^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}} \sum_{P(b)} \delta^{b_1}_{d_1} \dots \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0}} +$$

$$+ \alpha \Big\{ \frac{-1}{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!(j+\nu_0-1)!} \sum_{P(a,c)} (\sigma_3)^{c_1}_{a_1} \delta^{c_2}_{a_2} \dots \delta^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}} \sum_{P(b)} \delta^{b_1}_{d_1} \dots \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0}} - \frac{1}{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!(j-\nu_0-1)!} \sum_{P(a)} \delta^{c_1}_{a_1} \dots \delta^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}} \sum_{P(b,d)} (\sigma_3)^{b_1}_{d_1} \delta^{b_2}_{d_2} \dots \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0}}$$

$$+ \Big(1-\frac{i\rho}{2j+2}\Big) \frac{1}{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!} \delta^{d}_{c} \sum_{P(c,d)} (\sigma_3)^{c_1}_{d_1} \delta^{c_2}_{a_1} \dots \delta^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0-1}} \delta^{c}_{a_{j+\nu_0}} \delta^{b_1}_{d_2} \dots \delta^{b_{j-\nu_0-1}}_{d_{j-\nu_0}} \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d} - \Big(1-\frac{i\rho}{2j}\Big) \frac{1}{(j-\nu_0-1)!(j-\nu_0)!(j+\nu_0-1)!(j+\nu_0)!} \cdot \sum_{P(a,b,c,d)} (\sigma_3)^{c_1}_{d_1} \delta^{b_1}_{a_1} \delta^{c_2}_{a_2} \dots \delta^{c_{j+\nu_0}}_{a_{j+\nu_0}} \delta^{b_2}_{d_2} \dots \delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0}} \Big\}$$

для перехода $j \to j' = j$ и

$$D^{b_1 b_2 \dots b_{j-\nu_0};\, c_1 c_2 \dots c_{j+\nu_0-1}}_{a_1 a_2 \dots a_{j+\nu_0};\, d_1 d_2 \dots d_{j-\nu_0-1}}(\varepsilon) \approx \qquad (6.14)$$

$$\approx \alpha \Big\{ -\frac{1}{2j(j-\nu_0-1)!\,[(j+\nu_0-1)!]^2}\sum_{P(a,c)} (\sigma_3)^{c_1}_{a_1}\delta^{c_2}_{a_2}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0-1}}\delta^{c}_{a_{j+\nu_0}}\cdot\sum_{P(b)}\delta^{b_1}_{d_1}\dots\delta^{b_{j-\nu_0-1}}_{d_{j-\nu_0-1}}\delta^{b_{j-\nu_0}}_{c} +$$

$$+\frac{1}{2j(j-\nu_0-1)!(j+\nu_0-1)!(j+\nu_0-2)!}\sum_{P(a,b,c)}\delta^{b_1}_{a_1}(\sigma_3)^{c_1}_{a_2}\delta^{c_2}_{a_3}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0}}\delta^{b_2}_{d_1}\delta^{b_3}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0-1}} -$$

$$-\frac{1}{2j[(j-\nu_0-1)!]^2(j+\nu_0-1)!}\sum_{P(a)}\delta^{c_1}_{a_1}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0-1}}\delta^{d}_{a_{j+\nu_0}}\sum_{P(b,d)}(\sigma_3)^{b_1}_{d_1}\delta^{b_2}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0-1}}_{d_{j-\nu_0-1}}\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d} +$$

$$+\frac{1}{2j(j-\nu_0-2)!(j-\nu_0-1)!(j+\nu_0-1)!}\sum_{P(a,b,d)}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{c_1}_{a_2}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0}}(\sigma_3)^{b_2}_{d_1}\delta^{b_3}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0-1}} +$$

$$+\frac{(2j+2-i\rho)}{4j(2j+1)\cdot(j-\nu_0-1)!(j+\nu_0-1)!}\delta^{d}_{c}\delta^{d_0}_{c_0}\sum_{P(c,d)}(\sigma_3)^{c_1}_{d_1}\delta^{c_2}_{a_1}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0-2}}\delta^{c}_{a_{j+\nu_0-1}}\delta^{c_0}_{a_{j+\nu_0}}\delta^{b_1}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0-2}}_{d_{j-\nu_0-1}}\delta^{b_{j-\nu_0-1}}_{d}\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_0}$$

$$-\frac{(2j-i\rho)}{[2j\cdot(j+\nu_0-1)!(j-\nu_0-1)!]^2}\delta^{d}_{c}\sum_{P(a,b,c,d)}(\sigma_3)^{c_1}_{d_1}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{c_2}_{a_2}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0-1}}\delta^{c}_{a_{j+\nu_0}}\delta^{b_2}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0-1}}_{d_{j-\nu_0-1}}\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d}$$

$$+\frac{(2j-2-i\rho)}{4j\cdot(2j-1)\cdot(j-\nu_0-2)!(j-\nu_0-1)!(j+\nu_0-2)!(j+\nu_0-1)!}\sum_{P(a,b,c,d)}(\sigma_3)^{c_1}_{d_1}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{c_2}_{a_3}\dots\delta^{c_{j+\nu_0-1}}_{a_{j+\nu_0}}\delta^{b_3}_{d_2}\dots\delta^{b_{j-\nu_0}}_{d_{j-\nu_0-1}}$$

для перехода $j \to j' = j-1$.

В частности, если в (6.13) мы полагаем

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{j+\nu_0} = c_1 = c_2 = \dots = c_{j+\nu_0} = 1$$
$$b_1 = b_2 = \dots = b_{j-\nu_0} = d_1 = d_2 = \dots = d_{j-\nu_0} = 2 \ ,$$

то мы получим матричный элемент перехода $f^{\nu_0\rho}_{jj} \to f^{\nu_0\rho}_{jj}$ при бесконечно малом вращении Лоренца в плоскости (x_3, x_4) :

$$D^{\overbrace{22\dots2}^{j-\nu_0\ \text{раз}};\ \overbrace{11\dots1}^{j+\nu_0\ \text{раз}}}_{\underbrace{11\dots1}_{j+\nu_0\ \text{раз}};\ \underbrace{22\dots2}_{j-\nu_0\ \text{раз}}}(\varepsilon) \approx 1 - \alpha\cdot\frac{i\rho\nu_0}{j+1} \ .$$

Этот результат в точности совпадает с хорошо известным результатом (см. например, /12/)

§ 7. Максимально вырожденная главная серия представлений группы $SL(n,C)$

Для максимально вырожденной главной серии представлений группы $SL(n,C)$ мы можем непосредственно применить метод, развитый в §§ 5,6 для группы $SL(2,C)$, с некоторыми несущественными изменениями. Так, вместо (5.I) имеем

$$f^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu_0}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu_0}}(z_1,\dots,z_n) = (z_c \bar{z}^c)^{\frac{i\rho}{2}-\frac{n}{2}-j} \, \phi^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu_0}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu_0}} \quad /a,b=1,2,\dots,n/,$$

где j, ν_0 – также целые или полуцелые числа, однако j теперь уже не означает спина. Формулы (5.2) и (5.4) остаются в силе, при этом вместо выражений (5.3) и (5.5) для α и β мы должны взять

$$\alpha(t,s,k) = (-1)^s \frac{t!\,(t+k)!\,(2t+k+n-2-s)!}{s!\,(t-s)!\,(t+k-s)!\,(2t+k+n-2)!},$$

$$\beta(t,s,k) = \frac{t!\,(t+k)!\,(2s+k+n-1)!}{s!\,(s+k)!\,(t-s)!\,(t+k+n+s-1)!}.$$

Чтобы получить формулы для матричного элемента $D^{b_1 b_2 \cdots ;\, c_1 c_2 \cdots}_{a_1 a_2 \cdots ;\, d_1 d_2 \cdots}(g)$, соответствующего перехода $z_a \to z'_a = z_b g_{ba}$, мы поступаем анологично тому, как в §6. Разница состоит только в том, что теперь мы должны разложить $g\overset{+}{g}$ по матрицам - генераторам λ_i подгруппы $SU(n)$:

$$g\overset{+}{g} = \alpha_0 I + \sum_{i=1}^{n^2-1} \alpha_i \lambda_i = \alpha_0 (1+\hat{\beta}); \quad \hat{\beta} = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^{n^2-1} \alpha_i \lambda_i .$$

В результате получим:

$$D^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu_0};\, c_1 c_2 \cdots c_{j+\nu_0}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu_0};\, d_1 d_2 \cdots d_{j-\nu_0}}(g) =$$

$$
=\sum_{k=\max(0,j'-j)}^{\infty}\ \sum_{s=0}^{\min(j-\nu_0,\, j+k-j')} (-1)^s \frac{(2j+n-2-s)!\,(2j'+n-1)!}{s!\,k!\,(j-\nu_0-s)!\,(j+\nu_0-s)!\,(2j+n-2)!\,(j'-\nu_0)!\,(j'+\nu_0)!\,(k+j-j'-s)!\,(k+j+j'-s+n-1)!}
$$

$$
\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-\frac{n}{2}-j+s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2}-\frac{n}{2}-j+s+1-k\right)}\ \alpha_0^{\frac{i\rho}{2}-\frac{n}{2}-j+s}\ \delta^{d_{j'-\nu_0+1}}_{c_{j'+\nu_0+1}}\ \delta^{d_{j'-\nu_0+2}}_{c_{j'+\nu_0+2}}\cdots\delta^{d_{k+j-\nu_0-s}}_{c_{k+j+\nu_0-s}}
$$

$$
\cdot\sum_{P(a,b,c,d)} \hat{\beta}^{c_1}_{d_1}\hat{\beta}^{c_2}_{d_2}\cdots\hat{\beta}^{c_k}_{d_k}\ \delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdots\delta^{b_s}_{a_s}\ g^{c_{k+1}}_{a_{s+1}}\cdots g^{c_{k+j+\nu_0-s}}_{a_{j+\nu_0}}\ \overset{+}{g}{}^{b_{s+1}}_{d_{k+1}}\cdots\overset{+}{g}{}^{b_{j-\nu_0}}_{d_{k+j+\nu_0-s}}
$$

§ 8. Пространственное отражение для группы $SL(2,C)$

Идентифицируем теперь группу $SL(2,C)$ с однородной собственной группой Лоренца и рассмотрим пространственное отражение P. Между P и генераторами группы $SL(2,C)$ существуют следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
P M^i_j P^{-1} &= M^i_j \\
P N^i_j P^{-1} &= -N^i_j \\
P^2 &= 1,
\end{aligned}
\qquad (8.1)
$$

где M^i_j и N^i_j – компактные и некомпактные генераторы, соответственно.

Как известно, коммутационные соотношения для M^i_j и N^i_j имеют вид:

$$
\begin{aligned}
[M^i_j, M^k_\ell] &= \delta^i_\ell M^k_j - \delta^k_j M^i_\ell \\
[N^i_j, N^k_\ell] &= -\delta^i_\ell M^k_j + \delta^k_j M^i_\ell \\
[M^i_j, N^k_\ell] &= \delta^i_\ell N^k_j - \delta^k_j N^i_\ell \ .
\end{aligned}
\qquad (8.2)
$$

Нетрудно видеть, что в пространстве однородных функций с каноническими базисами (4.7) этими генераторами являются x/

---

x/ Соответствие между M^i_j, N^i_j и H, F в работе [12] таково:

$$
M^1_2 = H_- , \quad M^2_1 = H_+ , \quad M^1_1 = -M^2_2 = H_3 .
$$

$$
N^1_2 = F_- , \quad N^2_1 = F_+ , \quad N^1_1 = -N^2_2 = F_3 .
$$

$$M^i_j = z_j \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} - \frac{1}{2}\delta^i_j \left(z_a \frac{\partial}{\partial z_a} - \bar{z}^a \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \right) ,$$

$$iN^k_j = z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} - \frac{1}{2}\delta^i_j \left(z_a \frac{\partial}{\partial z_a} + \bar{z}^a \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \right) . \tag{8.3}$$

Из (8.I) и (8.3) следует, что оператор P будет действовать так, что

$$z_a \longrightarrow \varepsilon_{ab} \bar{z}^b$$
$$\bar{z}^a \longrightarrow z_b \varepsilon^{ba}$$
$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Поэтому

$$P f(z_1, z_2; \bar{z}^1 \bar{z}^2) = f(\bar{z}^2, -\bar{z}^1; -z_2, z_1) . \tag{8.4}$$

Из (8.4) и (4.7) после некоторого простого преобразования получим:

$$P f^{\nu_0 \rho}_{jm}(z_1, z_2) = (-1)^{\frac{i\rho}{2} - 1 - j} f^{-\nu_0 \rho}_{jm}(z_1, z_2) . \tag{8.5}$$

Таким образом, под действием P базисные элементы представления $\mathfrak{S}_{\nu_0 \rho}$ переходят в базисные элементы представления $\mathfrak{S}_{-\nu_0 \rho}$, которое, в свою очередь, как было доказано, эквивалентно представлению $\mathfrak{S}_{\nu_0, -\rho}$. Это означает, что под действием P только пространство $D_{(\nu_0 - 1, -\nu_0 - 1)}$ $(\rho = 0)$ или пространство $D_{(\frac{i\rho}{2} - 1, \frac{i\rho}{2} - 1)}$ $(\nu_0 = 0)$ переходит в себя; причем, как видно из (8.5), четности базисных векторов f_{jm} отличаются между собой множителем $(-1)^j$.

В заключение мы выражаем благодарность Н.Н. Боголюбову, Я.А. Смородинскому и А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе.

Литература

1. Barut A.O., Budini P. and Fronsdal C., Preprint Trieste, 1965.
2. Dothan Y., Gell-Mann M. and Ne'eman Y., Phys. Lett. 17, 148, 1965.
3. Fronsdal C., Preprint Trieste 1965; Yalta Lectures, Yalta 1966.
4. Delbourgo R., Salam A. and Strathdee J., Proc. Roy. Soc. 289A, 177 (1965).
5. Rühl W., Preprints CERN 1965–1966.
6. Michel L., Phys. Rev., 137, B405 (1965).
7. Тодоров И., Лекции международной школы по теоретической физике, Ялта, 1966.

8. Нгуен Ван Хьеу. Лекции международной школы по теоретической физике, Ялта, 1966.

9. И.М.Гельфанд, М.А.Наймарк, Труды математического института имени В.А.Стеклова, XXXVI, 1950.

10. И.М.Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я.Виленкин, Обобщенные функции, том 5, Москва, 1962.

11. Nguyen van Hieu, Lecture at Zakopane Summer School, Poland, 1966.

12. М.А.Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, Москва, 1958.

13. А.З. Долгинов, И.Н. Топтыгин, ЖЭТФ, 37, 1441, 1959.

14. А.З.Долгинов, ЖЭТФ, 30, 746, 1956.

15. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу, Препринт ОИЯИ, Р-2777, Дубна, 1966.

Рукопись поступила в издательский
отдел 11 августа 1966 г.