ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2874

И.В. Полубаринов

О ПРОСТРАНСТВАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2874

И.В. Полубаринов

О ПРОСТРАНСТВАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

I.ВВЕДЕНИЕ

Симметрические группы $\mathfrak{S}_n$, т. е. группы перестановок n символов, имеют важное значение для физики. Любая группа конечного порядка n изоморфна с некоторой группой перестановок n символов (см., например,/I/, стр. 66). Благодаря этому, рассмотрение любых конечных групп, например, кристаллографических групп, сводится в конечном счете к рассмотрению симметрических групп. Статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака связаны с полностью симметричными или полностью антисимметричными представлениями этих групп. С представлениями, отвечающими схемам Юнга с не более чем двумя строками связано описание многоэлектронных систем (см./2/, стр. 369). Аналогично схемы с не более чем тремя строками отвечают зарядовым состояниям многопионных систем./3/ Вейль/2,4/ усиленно подчеркивал роль конечных групп $\mathfrak{S}_n$ для построения неприводимых тензорных пространств непрерывных групп. Этот путь позволяет строить важные для современной физики волновые функции, преобразующиеся по неприводимым представлениям групп $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(6)$.

Рассматривалось много различных (хотя по своему содержанию эквивалентных) представлений группы $\mathfrak{S}_n$: полунормальные, ортогональные, естественные представления/5-7/. Тем не менее трудно найти в литературе явные и удобные реализации пространств неприводимых представлений. В настоящей работе для групп $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ построены в явном виде пространства неприводимых представлений и разложения по соответствующим полным системам базисных векторов. Сперва мы основываемся непосредственно на схемах Юнга. Однако для получения удобной симметричной формы базиса приходится отказаться от применения стандартных схем Юнга. Далее, с целью добиться симметричной записи для формулы разложения по базисным векторам вводится новый симметричный базис, который, вообще говоря, не связан со схемами Юнга непосредственно.

2.ПРОСТРАНСТВА НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\mathfrak{S}_3$

Пусть

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba\ - \tag{I}$$

векторы, на которые как операторы действуют перестановки и их линейные комбинации, в частности схемы Юнга. Например, перестановка (ab) (мы всегда будем записывать перестановки в циклической форме, см./I/, стр. I5) действует как

$$(ab)\,abc = bac,\quad (ab)\,acb = bca,\ \ldots$$

Отсюда очевидно, что векторы (I) образуют базис пространства регулярного представления/8/ (стр. 287). Смысл символов a, b и c может быть различным. Так, они могут обозначать три реальные предмета с различными взаимными расположениями (I). Они могут иметь смысл трех операторов, действующих в том или ином пространстве, причем "векторы" (I) суть всевозможные произведения этих операторов. Далее, a, b и c могут обозначать возможные значения тензорных индексов, а "векторы" (I) – различные компоненты тензора третьего ранга.

Регулярное представление группы $\mathfrak{S}_3$ распадается на два неэквивалентных одномерных представления и два эквивалентных двумерных

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

(см./9/, стр. 214). Чтобы построить базис в подпространстве каждого неприводимого представления, нужно подействовать на векторы (I) соответствующими схемами Юнга. Тогда векторы (I) превращаются в некоторую более узкую совокупность векторов, преобразующихся по неприводимому представлению. С точки зрения подсчета размерности представлений удобнее всего использовать стандартные схемы Юнга (см. таблицы I–4), для которых характерно соблюдение алфавитного порядка в строках и столбцах/5/.

Таблица I. Стандартные схемы Юнга для группы $\mathfrak{S}_2$.

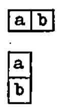


Таблица 2. Стандартные схемы Юнга для группы $\mathfrak{S}_3$.

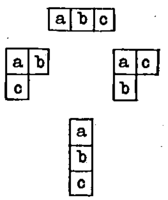


Таблица 3. Стандартные схемы Юнга для группы $\mathfrak{S}_4$.

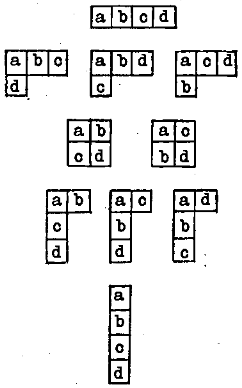
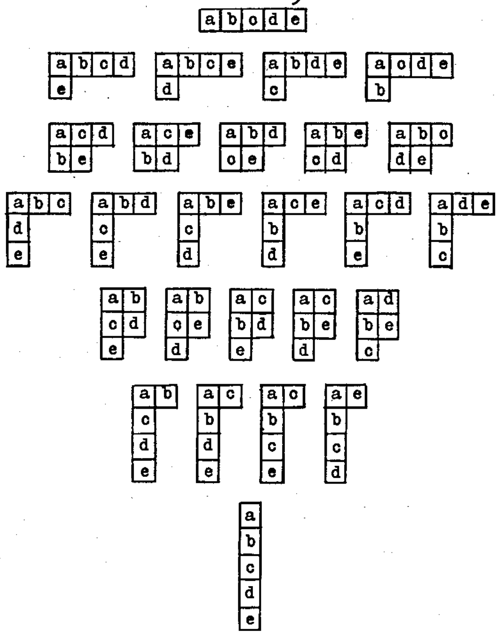
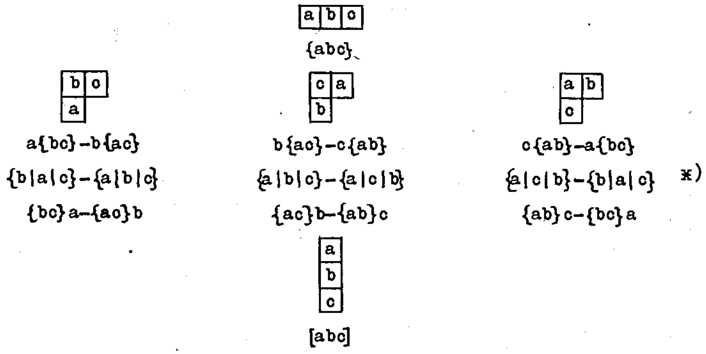


Таблица 4. Стандартные схемы Юнга для группы $\mathfrak{S}_5$.



Ради симметрии в записи векторов, которая не обеспечивалась бы при применении стандартных схем, мы откажемся от последних и выберем схемы Юнга следующим образом.

Таблица 2а. Базис неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_3$, порождаемый схемами Юнга



В выражениях для векторов фигурные скобки означают симметризацию по всем, стоящим внутри них, символам

$$\{abc\} = abc+acb+bca+bac+cab+cba \; .$$

Аналогично квадратные скобки подразумевают антисимметризацию (альтернирование)

$$[abc] = abc-acb+bca-bac+cab-cba \; .$$

Вертикальные черточки означают, что на заключенный между ними символ операция симметризации (или антисимметризации) не распространяется, например,

$$\{b|a|c\} = bac+cab \; .$$

По виду векторов в каждой строке таблицы 2а ясно, что перестановки a, b и c переставляют эти векторы только друг с другом. Таким образом, каждая строка дает базис некоторого представления $\mathfrak{S}_3$. Ясно, что {abc} и [abc] суть базисы неприводимых одномерных представлений этой группы. Операторы, действующие на эти векторы и представляющие все перестановки, имеют следующий вид :

ж) Векторы, стоящие в этой строке, могут быть записаны соответственно как двойные коммутаторы $[c[ab]]$, $[a[bc]]$ и $[b[ca]]$, удовлетворяющие тождеству Якоби

$$[a[bc]] + [c[ab]] + [b[ca]] = 0 \; .$$

		I	(ab)	(bc)	(ca)	(abc)	(cba)
для	{abc}	I	I	I	I	I	I
для	[abc]	I	–I	–I	–I	I	I

(ср./I0/, стр. I0I). Рассмотрим векторы, отвечающие схеме $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$, обозначив их для краткости соответственно как

$$\begin{matrix} e_{II} & e_{I2} & e_{I3} \\ e_{2I} & e_{22} & e_{23} \\ e_{3I} & e_{32} & e_{33} \end{matrix} \qquad (2)$$

Свойства элементов этой таблицы следующие.

I. Сумма элементов любой строки равна нулю, т. е.

$$e_{iI}+e_{i2}+e_{i3}=0 \quad , \qquad i=I,2,3. \qquad (3)$$

2. Сумма элементов любого столбца этой таблицы есть нуль

$$e_{Ii}+e_{2i}+e_{3i}=0 \quad , \qquad i=I,2,3. \qquad (4)$$

Эти свойства позволяют разобраться в двумерных представлениях. Три вектора с суммой нуль образуют базис неприводимого двумерного представления симметрической группы $\mathfrak{S}_3$ (см./9/, стр. 2I4). Если рассмотреть первую строку и выбрать векторы e_{II} и e_{I2} за основные, то в качестве матриц, действующих на столбец $\begin{pmatrix} e_{II} \\ e_{I2} \end{pmatrix}$ и представляющих все перестановки, мы получим

$$\begin{array}{cccccc} I & (ab) & (bc) & (ca) & (abc) & (cba) \\ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & -I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ср./II/, стр. 42). Так как на основании (4) третью строку можно исключить как линейную комбинацию первых двух, то мы получили два двумерных неприводимых представления, однако они эквивалентны. Таким образом, с учетом упомянутых выше одномерных представлений мы имеем все представления группы $\mathfrak{S}_3$. При учете обоих эквивалентных двумерных представлений мы получаем полное разложение регулярного представления этой группы. Вернемся к свойствам таблицы (2).

3. Симметризаторы $\begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline c & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}$ действуют на векторы e_{ij} следующим образом

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{iI}=3e_{iI}, & \begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i2}=0, & \begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i3}=-3e_{iI}, \\ \begin{array}{|c|c|}\hline c & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{iI}=-3e_{i2}, & \begin{array}{|c|c|}\hline c & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i2}=3e_{i2}, & \begin{array}{|c|c|}\hline c & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i3}=0, \\ \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{iI}=0, & \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i2}=-3e_{i3}, & \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}\, e_{i3}=3e_{i3}. \end{array} \qquad (5)$$

4. Теперь получим разложение произвольной линейной комбинации векторов (I) по табличным комбинациям. Представим произвольную линейную комбинацию векторов (I) в виде

$$\alpha_{abc}abc+\alpha_{acb}acb+\alpha_{bca}bca+\alpha_{bac}bac+\alpha_{cab}cab+\alpha_{cba}cba=$$
$$=A\{abc\}+Be_{II}+Ce_{2I}+De_{I2}+Ee_{22}+F[abc] \quad . \qquad (6)$$

Здесь α_{abc}, α_{acb}, ... – произвольные численные коэффициенты при abc, acb,... , а A, B, ... – коэффициенты, которые следует найти. Из векторов e_{ij} сюда включены только четыре линейно независимых. Чтобы найти коэффициенты A, B, ..., на обе части написанного равенства подействуем последовательно симметризаторами

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline\end{array} \ , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array} , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline c & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} , \quad \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline\end{array}$$

При этом подразумевается, что они никак не действуют на коэффициенты α_{abc}, α_{acb},... и A, B, ... Этим путем мы приходим к уравнениям

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{6A=\alpha_{\{abc\}}} \\ 3B=\alpha_{(a\{bc\}-\{bc\}a)} \ ; & 3D=3B+\alpha_{(b\{ac\}-\{ac\}b)} \\ 3C=\alpha_{(\{b|a|c\}-\{bc\}a)} \ ; & 3E=3C+\alpha_{(\{a|b|c\}-\{ac\}b)} \\ \multicolumn{2}{c}{6F=\alpha_{[abc]}} \end{array} \qquad (7)$$

Здесь, например, $\alpha_{\{abc\}}$, $\alpha_{(a\{bc\}-\{bc\}a)}$,... $\alpha_{[abc]}$ обозначают следующие линейные комбинации коэффициентов

$$\alpha_{\{abc\}}=\alpha_{abc}+\alpha_{acb}+\alpha_{bca}+\alpha_{bac}+\alpha_{cab}+\alpha_{cba}$$
$$\alpha_{(a\{bc\}-\{bc\}a)}=\alpha_{abc}+\alpha_{acb}-\alpha_{bca}-\alpha_{cba}$$
$$\alpha_{[abc]}=\alpha_{abc}-\alpha_{acb}+\alpha_{bca}-\alpha_{bac}+\alpha_{cab}-\alpha_{cba}$$

Как следствие того, что подпространство, соответствующее $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$, неприводимо, коэффициенты B, C, D и E могут быть выражены в терминах e_{ij} . Это легко сделать с помощью очевидных тождеств

$$a\{bc\}+b\{ac\}+c\{ab\}\equiv\{bc\}a+\{ac\}b+\{ab\}c\equiv\{b|a|c\}+\{a|b|c\}+\{a|c|b\} \ . \qquad (8)$$

Тогда мы вправе, например, записать

$$a\{bc\}-\{bc\}a=x(a\{bc\}-\{bc\}a)+y(-b\{ac\}+\{ac\}b-c\{ab\}+\{ab\}c) \quad ,$$

$$\{b|a|c\}-\{bc\}a=x(\{b|a|c\}-\{bc\}a)+y(-\{a|b|c\}+\{ac\}b-\{a|c|b\}+\{ab\}c)$$

с произвольными x и y, удовлетворяющими условию x+y=I. Легко сообразить, что для получения разложения по табличным векторам следует выбрать $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{I}{3}$.Это дает

$$3B=\alpha(\tfrac{2}{3}e_{11}+\tfrac{1}{3}e_{12}-\tfrac{2}{3}e_{31}-\tfrac{1}{3}e_{32})=\frac{1}{3}\alpha(2e_{11}+e_{12}-2e_{31}-e_{32})\ ;\quad 3D=\frac{1}{3}\alpha(e_{11}+2e_{13}-e_{31}-2e_{33})\ ;$$
$$3C=\frac{1}{3}\alpha(2e_{21}+e_{22}-2e_{31}-e_{32})\ ;\qquad 3E=\frac{1}{3}\alpha(e_{21}+2e_{23}-e_{31}-2e_{33})\ ; \tag{9}$$

Отметим, что вычисленная матрица коэффициентов при e_{ij} выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B & D & 0 \\ C & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ее можно видоизменять бесконечным числом способов: одновременно ко всем элементам любой строки или любого столбца этой матрицы можно добавлять одно и то же число. Однако, если не переходить к новым базисным векторам, то только с помощью этих операций не удается получить для e_{ij} столь же симметричную запись, как для вектора $\{abc\}$, при котором стоит коэффициент $\alpha_{\{abc\}}$.

Новый базис и симметричное разложение

Поставим себе цель заменить e_{ij} на такие векторы, при которых запись разложения станет симметричной в указанном выше смысле. Угадываем, что в качестве подходящих новых векторов можно выбрать*)

$$e'_{11}=[a\{bc\}]\ ,\quad e'_{12}=[b\{ca\}]\ ,\quad e'_{13}=[c\{ab\}]\ ,$$
$$e'_{21}=[a[bc]]\ ,\quad e'_{22}=[b[ca]]\quad e'_{23}=[c[ab]]\ .$$

Действительно, они раскладываются только по векторам e_{ij} и наоборот

$$\begin{pmatrix} e'_{11} \\ e'_{12} \\ e'_{21} \\ e'_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix}\ ;\qquad \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e'_{11} \\ e'_{12} \\ e'_{21} \\ e'_{22} \end{pmatrix}\ . \tag{10}$$

Искомое симметричное разложение можно получить из разложения (6) путем подстановки туда e_{ij} из (10), коэффициентов A, B, ... F из (7) и использования тождеств

$$a\{bc\}-\{bc\}a-c\{ab\}+\{ab\}c=[a\{bc\}]-[c\{ab\}]\ ,\quad 2\{a|b|c\}-b\{ac\}-\{ac\}b=[a[bc]]-[c[ab]] \tag{11}$$

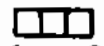
и тождеств, получаемых из них перестановкой (ab). Второй путь – подстановка в (6) выражений (9) и использование обеих формул (10). В результате мы приходим к разложению

*) Выбор неоднозначен. Можно убедиться, что существует двухпарамерическое семейство комбинаций, удовлетворяющих поставленному требованию.

$$\alpha_{abc}abc+\alpha_{acb}acb+\alpha_{bca}bca+\alpha_{bac}bac+\alpha_{cab}cab+\alpha_{cba}cba=$$
$$=\frac{1}{6}\alpha_{\{abc\}}\{abc\}+\frac{1}{6}\alpha_{[a\{bc\}]}[a\{bc\}]+\frac{1}{6}\alpha_{[b\{ca\}]}[b\{ca\}]+\frac{1}{6}\alpha_{[c\{ab\}]}[c\{ab\}]+$$
$$+\frac{1}{6}\alpha_{[a[bc]]}[a[bc]]+\frac{1}{6}\alpha_{[b[ca]]}[b[ca]]+\frac{1}{6}\alpha_{[c[ab]]}[c[ab]]+\frac{1}{6}\alpha_{[abc]}[abc]\ . \tag{12}$$

Весьма привлекательной и удобной является симметричная форма этого разложения. Приведем в заключение этих вычислений таблицу новых базисных векторов.

Таблица 2б. Новые базисные векторы в пространстве представлений $\mathfrak{S}_3$



{abc}

[a{bc}]	[b{ca}]	[c{ba}]
[a[bc]]	[b[ca]]	[c[ba]]

[abc]

Векторы, преобразующиеся по двумерным представлениям, связывают тождества

$$[a\{bc\}]+[b\{ca\}]+[c\{ba\}]=0\ ,$$
$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ba]]=0\ . \tag{13}$$

3. ПРОСТРАНСТВА НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\mathfrak{S}_4$

Базис пространства регулярного представления группы $\mathfrak{S}_4$ можно записать в виде

$$\begin{matrix} abcd, & abdc, & acdb, & acbd, & adbc, & adcb, \\ bacd, & bacd, & bdca, & bdac, & bcad, & bcda, \\ cabd, & cadb, & cbda, & cbad, & cdab, & cdba, \\ dacb, & dabc, & dcba, & dcab, & dbac, & dbca. \end{matrix} \tag{14}$$

Регулярное представление группы $\mathfrak{S}_4$ распадается на два неэквивалентных одномерных представления, два эквивалентных двумерных и на две неэквивалентные друг другу тройки эквивалентных представлений

$$24=1^2+1^2+2^2+3^2+3^2$$

(см. /9/, стр. 215). Соответствующим образом выбранные схемы Юнга при действии на векторы пространства (14) превращают их в векторы, приведенные в таблице 3а.

Таблица 3а. Базис неприводимых представлений группы Θ_4 , порождаемый схемами Юнга

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&b&c&d\\\hline\end{array}$

{abcd}

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline b&c&d\\\hline a\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline c&d&a\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline d&a&b\\\hline c\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&b&c\\\hline d\\\cline{1-1}\end{array}$
a{bcd}−b{acd}	b{acd}−c{abd}	c{abd}−d{abc}	d{abc}− a{bcd}
{b|a|cd}−{a|b|cd}	{a|b|cd}−{a|c|bd}	{a|c|bd}−{a|d|bc}	{a|d|bc}−{b|a|cd}
{bc|a|d}−{ac|b|d}	{ac|b|d}−{ab|c|d}	{ab|c|d}−{ab|d|c}	{ab|d|c}−{bc|a|d}
{bcd}a−{acd}b	{acd}b−{abd}c	{abd}c−{abc}d	{abc}d−{bcd}a

$\begin{array}{|c|c|}\hline a&b\\\hline d&c\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|}\hline a&c\\\hline b&d\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|}\hline a&d\\\hline c&b\\\hline\end{array}$
{{ab}{cd}}−{{ac}{bd}}	{{ac}{bd}}−{{ad}{bc}}	{{ad}{bc}}−{{ab}{cd}}
{acbd}−{abcd}	{abcd}−{abdc}	{abdc}−{acbd}
{a{cd}b}−{a{bd}c}	{a{bd}c}−{a{bc}d}	{a{bc}d}−{a{cd}b}

$\begin{array}{|c|c|}\hline d&a\\\hline c\\\cline{1-1} b\\\cline{1-1}\end{array}$	$-\begin{array}{|c|c|}\hline a&b\\\hline d\\\cline{1-1} c\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{|c|c|}\hline b&c\\\hline a\\\cline{1-1} d\\\cline{1-1}\end{array}$	$-\begin{array}{|c|c|}\hline c&d\\\hline b\\\cline{1-1} a\\\cline{1-1}\end{array}$
a[bcd]+[b|a|cd]	−b[acd]−[a|b|cd]	c[abd]+[a|c|bd]	−d[abc]−[a|d|bc]
−[b|a|cd]−[bc|a|d]	[a|b|cd]+[ac|b|d]	−[a|c|bd]−[ab|c|d]	[a|d|bc]+[ab|d|c]
[bc|a|d]+[bcd]a	−[ac|b|d]−[acd]b	[ab|c|d]+[abd]c	−[ab|d|c]−[abc]d
−[bcd]a−a[bcd]	[acd]b+b[acd]	−[abd]c−c[abd]	[abc]d+d[abc]

$\begin{array}{|c|}\hline a\\\hline b\\\hline c\\\hline d\\\hline\end{array}$

[abcd]

Поясним, что внутренние фигурные скобки обозначают симметризацию по связываемой паре символов

acbd=acbd+bcad ,   acdb=acdb+bcda .

Общие внешние скобки обозначают симметризацию по взаимному расположению пар

{acbd}={cadb}=acbd+cadb=acbd+adbc+bcad+bdac+cadb+cbda+dacb+dbca ,

{a{cd}b}={c{ab}d} =acdb+cabd=acdb+adcb+bcda+bdca+cabd+cbad+dabc+dbac

Очевидно, что каждая строка таблицы 3б образует базис пространства некоторого представления группы Θ_4 , так как престановки из Θ_4 не выводят элементы таблицы из своих строк. Элементы таблицы 3б, соответствующие схемам $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &\ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ &\ \\\hline\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1} \ \\\cline{1-1}\end{array}$, для краткости будем обозначать

$$\begin{array}{llll} e^{3,I}_{II}, & e^{3,I}_{I2}, & e^{3,I}_{I3}, & e^{3,I}_{I4} \\ e^{3,I}_{2I}, & e^{3,I}_{22}, & e^{3,I}_{23}, & e^{3,I}_{24} \\ e^{3,I}_{3I}, & e^{3,I}_{32}, & e^{3,I}_{33}, & e^{3,I}_{34} \\ e^{3,I}_{4I}, & e^{3,I}_{42}, & e^{3,I}_{43}, & e^{3,I}_{44} \end{array} \qquad (I5)$$

$$\begin{array}{lll} e^{2,2}_{II}, & e^{2,2}_{I2}, & e^{2,2}_{I3} \\ e^{2,2}_{2I}, & e^{2,2}_{22}, & e^{2,2}_{23} \\ e^{2,2}_{3I}, & e^{2,2}_{32}, & e^{2,2}_{33} \end{array} \qquad (I6)$$

$$\begin{array}{llll} e^{2,I,I}_{II}, & e^{2,I,I}_{I2}, & e^{2,I,I}_{I3}, & e^{2,I,I}_{I4} \\ e^{2,I,I}_{2I}, & e^{2,I,I}_{22}, & e^{2,I,I}_{23}, & e^{2,I,I}_{24} \\ e^{2,I,I}_{3I}, & e^{2,I,I}_{32}, & e^{2,I,I}_{33}, & e^{2,I,I}_{34} \\ e^{2,I,I}_{4I}, & e^{2,I,I}_{42}, & e^{2,I,I}_{43}, & e^{2,I,I}_{44} \end{array} \qquad (I7)$$

Свойства элементов этих трех таблиц следующие.

I. Сумма элементов любой строки равна нулю.

2. Сумма элементов любого столбца равна нулю.

С помощью этих свойств легко убедиться в том, что мы пришли к неприводимым представлениям указанных выше размерностей и кратностей. Нетрудно также, выбрав те или иные векторы за основные, восстановить вид представляющих матриц. Вернемся к свойствам таблиц (I5)-(I7).

3. Симметризаторы $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &\ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ &\ \\\hline\end{array}$,и $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1} \ \\\cline{1-1}\end{array}$ дают при действии на чужие таблицы нуль, а при действии на свои

$$\boxed{\begin{smallmatrix}b&c&d\\a&&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{3,I}=8e_{1I}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c&d\\a&&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c&d\\a&&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c&d\\a&&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{3,I}=-8e_{1I}^{3,I}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}c&d&a\\b&&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{3,I}=-8e_{12}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}c&d&a\\b&&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{3,I}=8e_{12}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}c&d&a\\b&&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}c&d&a\\b&&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{3,I}=0$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}d&a&b\\c&&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a&b\\c&&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{3,I}=-8e_{13}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a&b\\c&&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{3,I}=8e_{13}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a&b\\c&&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{3,I}=0 \tag{I8}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{3,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{3,I}=-8e_{14}^{3,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{3,I}=8e_{14}^{3,I}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&c\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,2}=I2e_{1I}^{2,2}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&c\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,2}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&c\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,2}=-I2e_{1I}^{2,2}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}a&c\\b&d\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,2}=-I2e_{12}^{2,2}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&c\\b&d\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,2}=I2e_{12}^{2,2}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&c\\b&d\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,2}=0 \tag{I9}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}a&d\\c&b\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,2}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&d\\c&b\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,2}=-I2e_{13}^{2,2}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}a&d\\c&b\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,2}=I2e_{13}^{2,2}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}d&a\\c&\\b&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,I,I}=8e_{1I}^{2,I,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a\\c&\\b&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,I,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a\\c&\\b&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,I,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a\\c&\\b&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{2,I,I}=-8e_{1I}^{2,I,I}$$

$$-\boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&\\c&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,I,I}=8e_{12}^{2,I,I}\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&\\c&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,I,I}=-8e_{12}^{2,I,I}\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&\\c&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,I,I}=0\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&\\c&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{2,I,I}=0 \tag{20}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix}b&c\\a&\\d&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,I,I}=0\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c\\a&\\d&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,I,I}=-8e_{13}^{2,I,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c\\a&\\d&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,I,I}=8e_{13}^{2,I,I}\qquad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c\\a&\\d&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{2,I,I}=0$$

$$-\boxed{\begin{smallmatrix}c&d\\b&\\a&\end{smallmatrix}}\,e_{1I}^{2,I,I}=0\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}c&d\\b&\\a&\end{smallmatrix}}\,e_{12}^{2,I,I}=0\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}c&d\\b&\\a&\end{smallmatrix}}\,e_{13}^{2,I,I}=8e_{14}^{2,I,I}\qquad -\boxed{\begin{smallmatrix}c&d\\b&\\a&\end{smallmatrix}}\,e_{14}^{2,I,I}=-8e_{14}^{2,I,I}$$

4. Обратимся к разложению произвольной линейной комбинации 24 векторов (I4) по табличным комбинациям. Представим произвольную линейную комбинацию векторов в (I4) в виде :

$$\alpha_{abcd}abcd+\alpha_{abdc}abdc+\alpha_{acdb}acdb+\alpha_{acbd}acbd+\alpha_{adbc}adbc+\alpha_{adcb}adcb+$$
$$+\alpha_{badc}badc+\alpha_{bacd}bacd+\alpha_{bdca}bdca+\alpha_{bdac}bdac+\alpha_{bcad}bcad+\alpha_{bcda}bcda+$$
$$+\alpha_{cabd}cabd+\alpha_{cadb}cadb+\alpha_{cbda}cbda+\alpha_{cbad}cbad+\alpha_{cdab}cdab+\alpha_{cdba}cdba+$$
$$+\alpha_{dacb}dacb+\alpha_{dabc}dabc+\alpha_{dcba}dcba+\alpha_{dcab}dcab+\alpha_{dbac}dbac+\alpha_{dbca}dbca=$$

$$\begin{aligned}
&=A\{abcd\}+\\
&+Be_{II}^{3,I}+Ee_{I2}^{3,I}+He_{I3}^{3,I}+\\
&+Ce_{2I}^{3,I}+Fe_{22}^{3,I}+Ie_{23}^{3,I}+\\
&+De_{3I}^{3,I}+Ge_{32}^{3,I}+Je_{33}^{3,I}+\\
&+Ke_{II}^{2,2}+Me_{I2}^{2,2}+\\
&+Le_{2I}^{2,2}+Ne_{22}^{2,2}+\\
&+Oe_{II}^{2,I,I}+Re_{I2}^{2,I,I}+Ue_{I3}^{2,I,I}+\\
&+Pe_{2I}^{2,I,I}+Se_{22}^{2,I,I}+Ve_{23}^{2,I,I}+\\
&+Qe_{3I}^{2,I,I}+Te_{32}^{2,I,I}+We_{33}^{2,I,I}+\\
&+X[abcd]
\end{aligned} \tag{2I}$$

Здесь α_{abcd} , ... – произвольные численные коэффициенты при abcd , ..., а A, B, ... – коэффициенты, которые следует найти. Для этого на обе части написанного равенства последовательно подействуем симметризаторами

$$\boxed{\begin{smallmatrix}a&b&c&d\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c&d\\a&&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}c&d&a\\b&&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a&b\\c&&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&c\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}a&c\\b&d\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}d&a\\c&\\b&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}a&b\\d&\\c&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}b&c\\a&\\d&\end{smallmatrix}}\quad \boxed{\begin{smallmatrix}a\\b\\c\\d\end{smallmatrix}}$$

При этом подразумевается, что симметризаторы никак не действуют на коэффициенты α_{abcd}, ... и A, ... В результате мы получаем уравнения

$$24A=\alpha_{\{abcd\}}$$

$$\begin{aligned}
&8B=\alpha_{(a\{bcd\}-\{bcd\}a)} &&8E=8B+\alpha_{(b\{acd\}-\{acd\}b)} &&8H=8E+\alpha_{(c\{abd\}-\{abd\}c)}\\
&8C=\alpha_{(\{b|a|cd\}-\{bcd\}a)} &&8F=8C+\alpha_{(\{a|b|cd\}-\{acd\}b)} &&8I=8F+\alpha_{(\{a|c|bd\}-\{abd\}c)}\\
&8D=\alpha_{(\{bc|a|d\}-\{bcd\}a)} &&8G=8D+\alpha_{(\{ac|b|d\}-\{acd\}b)} &&8J=8G+\alpha_{(\{ab|c|d\}-\{abd\}c)}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&I2K=\alpha_{(\{\{ab\}\{cd\}\}-\{a\{cd\}b\})} &&I2M=I2K+\alpha_{(\{\{ac\}\{bd\}\}-\{a\{bd\}c\})}\\
&I2L=\alpha_{(\{acbd\}-\{a\{cd\}b\})} &&I2N=I2L+\alpha_{(\{abcd\}-\{a\{bd\}c\})}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&8O=\alpha_{(a[bcd]+d[abc])} &&8R=8O-\alpha_{(a[bcd]+b[acd])}\\
&8P=\alpha_{(a[bcd]-[b|a|cd]+d[abc]-[a|d|bc])}= &&8S=8P-\alpha_{(a[bcd]-[b|a|cd]+b[acd]-[a|b|cd])}=\\
&\quad=\alpha_{([[ab][cd]]-[[ac][bd]])} &&\quad=8P+\alpha_{([[ac][bd]]-[[ad][bc]])}\\
&8Q=\alpha_{([bcd]a+[abc]d)} &&8T=8Q-\alpha_{([bcd]a+[acd]b)}
\end{aligned}$$

$$8U=8R+\alpha(b[acd]+c[abd])$$

$$8V=8S+\alpha(b[acd]-[a|b|cd]+c[abd]-[a|c|bd])= \qquad (24)$$

$$=8S-\alpha([[ab][cd]]+[[ac][bd]])$$

$$8W=8T+\alpha([acd]b+[abd]c)$$

$$24X=\alpha[abcd]$$

Вследствие неприводимости соответствующих пространств коэффициенты B, C, ... W могут быть выражены через табличные векторы. Это легко сделать с помощью тождеств

$$a\{bcd\}+b\{acd\}+c\{abd\}+d\{abc\}\equiv\{b|a|cd\}+\{a|b|cd\}+\{a|c|bd\}+\{a|d|bc\}\equiv \qquad (25)$$

$$\equiv\{bc|a|d\}+\{ac|b|d\}+\{ab|c|d\}+\{ab|d|c\}\equiv\{bcd\}a+\{acd\}b+\{abd\}c+\{abc\}d$$

$$\{\{ab\}\{cd\}\}+\{\{ac\}\{bd\}\}+\{\{ad\}\{bc\}\}\equiv\{\overbrace{acbd}\}+\{\overbrace{abcd}\}+\{\overbrace{abdc}\}\equiv\{a\underbrace{\{cd\}b}\}+\{a\underbrace{\{bd\}c}\}+\{a\underbrace{\{bc\}d}\}=\{abcd\} \qquad (26)$$

$$a[bcd]-[b|a|cd]+[bc|a|d]-[bcd]a\equiv-b[acd]+[a|b|cd]-[ac|b|d]+[acd]b=$$

$$\equiv c[abd]-[a|c|bd]+[ab|c|d]-[abd]c\equiv-d[abc]+[a|d|bc]-[ab|d|c]+[abc]d \qquad (27)$$

Так, например, мы можем записать

$$a\{bcd\}-\{bcd\}a=x(a\{bcd\}-\{bcd\}a)+y(-b\{acd\}+\{acd\}b-c\{abd\}+\{abd\}c-d\{abc\}+\{abc\}d)$$

$$a\{bcd\}-\{bcd\}a+b\{acd\}-\{acd\}b=z(a\{bcd\}-\{bcd\}a+b\{acd\}-\{acd\}b)+u(-c\{abd\}+\{abd\}c-d\{abc\}+\{abc\}d)$$

$$a\{bcd\}-\{bcd\}a+b\{acd\}-\{acd\}b+c\{abd\}-\{abd\}c=-x(d\{abc\}-\{abc\}d)+y(a\{bcd\}-\{bcd\}a+$$
$$+b\{acd\}-\{acd\}b+c\{abd\}-\{abd\}c)$$

$$\{\{ab\}\{cd\}\}-\{a\underbrace{\{cd\}b}\}=v(\{\{ab\}\{cd\}\}-\{a\underbrace{\{cd\}b}\})+w(-\{\{ac\}\{bd\}\}-\{\{ad\}\{bc\}\}+\{a\underbrace{\{bd\}c}\}+\{a\underbrace{\{bc\}d}\})$$

$$\{\overbrace{acbd}\}-\{a\underbrace{\{cd\}b}\}=v(\{\overbrace{acbd}\}-\{a\underbrace{\{cd\}b}\})+w(-\{\overbrace{abcd}\}-\{\overbrace{abdc}\}+\{a\underbrace{\{bd\}c}\}+\{a\underbrace{\{bc\}d}\})$$

$$a[bcd]+d[abc]=x(a[bcd]+d[abc])+y([b|a|cd]-[bc|a|d]+[bcd]a+[a|d|bc]-[ab|d|c]+[abc]d)$$

$$a[bcd]-[b|a|cd]+d[abc]-[a|d|bc]=z(a[bcd]-[b|a|cd]+d[abc]-[a|d|bc])+$$
$$+u(-[bc|a|d]+[bcd]a-[ab|d|c]+[abc]d)$$

$$[bcd]a+[abc]d=x([bcd]a+[abc]d)+y(a[bcd]-[b|a|cd]+[bc|a|d]+d[abc]-[a|d|bc]+[ab|d|c]).$$

В этих формулах числа x,y ... удовлетворяют соотношениям $x+y=z+u=v+w=I$, а в остальном произвольны. Для того, чтобы получить разложение по табличным комбинациям, нужно выбрать $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{I}{4}$, $z=u=\frac{I}{2}$, $v=\frac{2}{3}$, $w=\frac{I}{3}$. Тогда получаем

$$32B=\alpha(3e_{II}+2e_{I2}+e_{I3}-3e_{4I}-2e_{42}-e_{43}) \qquad I6E=\alpha(e_{II}+2e_{I2}+e_{I3}-e_{4I}-2e_{42}-e_{43})$$

$$32C=\alpha(3e_{2I}+2e_{22}+e_{23}-3e_{4I}-2e_{42}-e_{43}) \qquad I6F=\alpha(e_{2I}+2e_{22}+e_{23}-e_{4I}-2e_{42}-e_{43})$$

$$32D=\alpha(3e_{3I}+2e_{32}+e_{33}-3e_{4I}-2e_{42}-e_{43}) \qquad I6G=\alpha(e_{3I}+2e_{32}+e_{33}-e_{4I}-2e_{42}-e_{43})$$

$$32H=\alpha(e_{II}+2e_{I2}+3e_{I3}-e_{4I}-2e_{42}-3e_{43})$$

$$32I=\alpha(e_{2I}+2e_{22}+3e_{23}-e_{4I}-2e_{42}-3e_{43}) \qquad (28)$$

$$32J=\alpha(e_{3I}+2e_{32}+3e_{33}-e_{4I}-2e_{42}-3e_{43})$$

$$36K=\alpha(2e_{II}+e_{I2}-2e_{3I}-e_{32}) \qquad 36M=\alpha(e_{II}+2e_{I2}-e_{3I}-2e_{32})$$

$$36L=\alpha(2e_{2I}+e_{22}-2e_{3I}-e_{32}) \qquad 36N=\alpha(e_{2I}+2e_{22}-e_{3I}-2e_{32}) \qquad (29)$$

$$32O=\alpha(3e_{II}+2e_{2I}+e_{3I}-3e_{I4}-2e_{24}-e_{34}) \qquad 32R=\alpha(3e_{I2}+2e_{22}+e_{32}-3e_{I4}-2e_{24}-e_{34})$$

$$I6P=\alpha(e_{II}+2e_{2I}+e_{3I}-e_{I4}-2e_{24}-e_{34}) \qquad I6S=\alpha(e_{I2}+2e_{22}+e_{32}-e_{I4}-2e_{24}-e_{34})$$

$$32Q=\alpha(e_{II}+2e_{2I}+3e_{3I}-e_{I4}-2e_{24}-3e_{34}) \qquad 32T=\alpha(e_{I2}+2e_{22}+3e_{32}-e_{I4}-2e_{24}-3e_{34})$$

$$32U=\alpha(3e_{I3}+2e_{23}+e_{33}-3e_{I4}-2e_{24}-e_{34})$$

$$I6V=\alpha(e_{I3}+2e_{23}+e_{33}-e_{I4}-2e_{24}-e_{34}) \qquad (30)$$

$$32W=\alpha(e_{I3}+2e_{23}+3e_{33}-e_{I4}-2e_{24}-3e_{34})$$

Здесь в первых 6 строках у векторов e_{ij} подразумевается индекс 3,I , в следующих двух строках – индекс 2,2 и в последних 6 строках – индекс 2,I,I . Вычисленные коэффициенты при векторах таблицы 3а можно расположить в матрицы

$$\begin{pmatrix} B & E & H & 0 \\ C & F & I & 0 \\ D & G & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K & M & 0 \\ L & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} O & R & U & 0 \\ P & S & V & 0 \\ Q & T & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

К любой строке, как и к любому столбцу любой из этих матриц можно добавлять одно и то же число. Однако на этом пути не удается получить столь же симметричную запись, какую удалось найти выше для перестановок трех символов.

Новый базис и симметричное разложение

Поставим себе цель заменить $e_{ij}^{3,1}$, $e_{ij}^{2,2}$ и $e_{ij}^{2,1,1}$ на такие векторы, которые обеспечат симметричную форму разложения. Можно угадать и проверить это с помощью формулы (21), что от векторов $e_{ij}^{3,1}$ можно перейти к векторам

$$e'^{\,3,1}_{11}=[\{ab\}\{cd\}] \quad e'^{\,3,1}_{12}=[\{ac\}\{bd\}] \quad e'^{\,3,1}_{13}=[\{ad\}\{bc\}]$$

$$e'^{\,3,1}_{21}=[acbd] \quad e'^{\,3,1}_{22}=[abcd] \quad e'^{\,3,1}_{23}=[abdc]$$

$$e'^{\,3,1}_{31}=[a\{cd\}b] \quad e'^{\,3,1}_{32}=[a\{bd\}c] \quad e'^{\,3,1}_{33}=[a\{bc\}d]$$

от векторов $e_{ij}^{2,2}$ – к векторам

$$e'^{\,2,2}_{11}=\{\{ab\}\{cd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\} \quad e'^{\,2,2}_{12}=\{\{ac\}\{bd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\} \quad e'^{\,2,2}_{13}=\{\{ad\}\{bc\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}$$

$$e'^{\,2,2}_{21}=\{[ab][cd]\}-\frac{1}{3}[abcd] \quad e'^{\,2,2}_{22}=\{[ac][db]\}-\frac{1}{3}[abcd] \quad e'^{\,2,2}_{23}=\{[ad][bc]\}-\frac{1}{3}[abcd]$$

и, наконец, от векторов $e_{ij}^{2,1,1}$ – к векторам

$$e'^{\,2,1,1}_{11}=[[ab][cd]] \quad e'^{\,2,1,1}_{12}=[[ac][bd]] \quad e'^{\,2,1,1}_{13}=[[ad][bc]]$$

$$e'^{\,2,1,1}_{21}=[acbd] \quad e'^{\,2,1,1}_{22}=[abcd] \quad e'^{\,2,1,1}_{23}=[abdc]$$

$$e'^{\,2,1,1}_{31}=[a[cd]b] \quad e'^{\,2,1,1}_{32}=[a[bd]c] \quad e'^{\,2,1,1}_{33}=[a[bc]d]$$

В этих выражениях внутренние скобки ⌐¬ означают антисимметризацию по связываемой паре индексов: $acbd=acbd-bcad$. Внешние квадратные скобки означают антисимметризацию по взаимному расположению пар друг относительно друга, например,

$$[acbd]=acbd-cadb$$

$$[acbd]=-[cadb]=acbd-cadb=acbd-adbc-bcad+bdac-cadb+cbda+dacb-dbca$$

Новые векторы связаны с первоначальными следующим образом: векторы $e_{ij}^{3,1}$ и $e'^{\,3,1}_{ij}$ соотношениями

$$\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{13}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\\ e'_{23}\\ e'_{31}\\ e'_{32}\\ e'_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&2&1&1&2&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&-1&1&0&-1&0&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&1&2&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&-1&0&0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&-1&-2&-1&-1&-2&-1\\ 0&0&0&-1&0&-1&-1&0&-1\\ 0&0&0&-1&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{13}\\ e_{21}\\ e_{22}\\ e_{23}\\ e_{31}\\ e_{32}\\ e_{33}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{13}\\ e_{21}\\ e_{22}\\ e_{23}\\ e_{31}\\ e_{32}\\ e_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 1&-1&0&1&-1&0&1&-1&0\\ 0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1\\ 0&1&1&0&-1&-1&0&-1&-1\\ 1&-1&0&-1&1&0&-1&1&0\\ 0&1&-1&0&-1&1&0&-1&1\\ 0&-1&-1&0&1&1&0&-1&-1\\ -1&1&0&1&-1&0&-1&1&0\\ 0&-1&1&0&1&-1&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{13}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\\ e'_{23}\\ e'_{31}\\ e'_{32}\\ e'_{33}\end{pmatrix} \qquad (31)$$

векторы $e_{ij}^{2,2}$ и $e'^{\,2,2}_{ij}$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&1&0&2\\ 1&1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{21}\\ e_{22}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{21}\\ e_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&-2&0&0\\ 2&4&0&0\\ -1&1&-3&3\\ -1&-2&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\end{pmatrix} \qquad (32)$$

и, наконец, векторы $e_{ij}^{2,1,1}$ и $e'^{\,2,1,1}_{ij}$ выражаются друг через друга согласно

$$\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{13}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\\ e'_{23}\\ e'_{31}\\ e'_{32}\\ e'_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&0&2&2&0&1&1&0\\ -1&0&-1&-2&0&-2&-1&0&-1\\ 0&-1&-1&0&-2&-2&0&-1&-1\\ -1&-1&0&0&0&0&-1&-1&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&-1&-1&0\\ -1&0&-1&0&0&0&1&0&1\\ 0&-1&-1&0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{13}\\ e_{21}\\ e_{22}\\ e_{23}\\ e_{31}\\ e_{32}\\ e_{33}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ e_{13}\\ e_{21}\\ e_{22}\\ e_{23}\\ e_{31}\\ e_{32}\\ e_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&-1&1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&-1&-1&1&1&1&-1\\ 0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\\ 1&-1&1&1&-1&1&0&0&0\\ 1&1&-1&1&1&-1&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1&-1&-1&1&-1\\ 0&0&0&-1&-1&1&-1&-1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e'_{11}\\ e'_{12}\\ e'_{13}\\ e'_{21}\\ e'_{22}\\ e'_{23}\\ e'_{31}\\ e'_{32}\\ e'_{33}\end{pmatrix} \qquad (33)$$

Искомое симметричное разложение можно получить двумя путями. Первый путь – подстановка в разложение (21) e_{ij} из (31) – (33), коэффициентов и A, B, ... из (22) – (24) и использование тождеств

$$a\{bcd\}-\{bcd\}a+b\{acd\}-\{acd\}b+\{b|a|cd\}-\{bc|a|d\}+\{a|b|cd\}-\{ac|b|d\}=2[\{ab\}\{cd\}]$$

$$a\{bcd\}-\{bcd\}a+b\{acd\}-\{acd\}b-\{b|a|cd\}+\{bc|a|d\}-\{a|b|cd\}+\{ac|b|d\}=2[acbd] \qquad (34)$$

$$a\{bcd\}+\{bcd\}a+b\{acd\}+\{acd\}b-\{b|a|cd\}-\{bc|a|d\}-\{a|b|cd\}-\{ac|b|d\}=2[a\{cd\}b]$$

$$\{acbd\}+\{a\{cd\}b\}=\{\{ac\}\{bd\}\}+\{\{ad\}\{bc\}\},\quad \{acbd\}-\{a\{cd\}b\}=\{[ac][bd]\}+\{[ad][bc]\} \qquad (35)$$

$$-\{a[bcd]\}+\{b[acd]\}+\{c[abd]\}-\{d[abc]\}=2[acbd]-2[[ab][cd]]$$

$$[a[bcd]]-[b[acd]]-[c[abd]]+[d[abc]]=2[a[cd]b] \qquad (36)$$

а также тождеств, получаемых из (34) перестановками (ad) и (bd), из (35) перестановками (bd) и (bc) и из (36) перестановками (bc) и (ac). Второй путь состоит в подстановке в разложение (21) выражений (28)-(30) и использовании прямых и обратных формул (31) -(33). Искомое разложение имеет вид

$$
\sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{перестановкам}\\ abcd}} \alpha_{abcd}\, abcd = \frac{1}{24}\alpha_{\{abcd\}}\{abcd\} +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[\{ab\}\{cd\}]}[\{ab\}\{cd\}] + \frac{1}{8}\alpha_{[\{ac\}\{bd\}]}[\{ac\}\{bd\}] + \frac{1}{8}\alpha_{[\{ad\}\{bc\}]}[\{ad\}\{bc\}] +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[acbd]}[acbd] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[abcd]}[abcd] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[abdc]}[abdc] \qquad +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[a\{cd\}b]}[a\{cd\}b] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[a\{bd\}c]}[a\{bd\}c] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[a\{bc\}d]}[a\{bc\}d] \qquad +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{(\{\{ab\}\{cd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\})}\left(\{\{ab\}\{cd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}\right) + \frac{1}{8}\alpha_{(\{\{ac\}\{bd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\})}\left(\{\{ac\}\{bd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}\right) +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{(\{\{ad\}\{bc\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\})}\left(\{\{ad\}\{bc\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}\right) +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{(\{[ab][cd]\}-\frac{1}{3}[abcd])}\left(\{[ab][cd]\}-\frac{1}{3}[abcd]\right) + \frac{1}{8}\alpha_{(\{[ac][db]\}-\frac{1}{3}[abcd])}\left(\{[ac][db]\}-\frac{1}{3}[abcd]\right) +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{(\{[ad][bc]\}-\frac{1}{3}[abcd])}\left(\{[ad][bc]\}-\frac{1}{3}[abcd]\right) +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[[ab][cd]]}[[ab][cd]] + \frac{1}{8}\alpha_{[[ac][bd]]}[[ac][bd]] + \frac{1}{8}\alpha_{[[ad][bc]]}[[ad][bc]] +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[acbd]}[acbd] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[abcd]}[abcd] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[abdc]}[abdc] \qquad +
$$

$$
+\frac{1}{8}\alpha_{[a[cd]b]}[a[cd]b] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[a[bd]c]}[a[bd]c] \qquad + \frac{1}{8}\alpha_{[a[bc]d]}[a[bc]d] \qquad +
$$

$$
+\frac{1}{24}\alpha_{[abcd]}[abcd] \tag{37}
$$

Приведем для справок новую полную систему базисных векторов.

Таблица 36. Новые базисные векторы в пространстве представлений группы $\mathfrak{S}_4$

{abcd}

[{ab}{cd}]	[{ac}{bd}]	[{ad}{bc}]
[acbd]	[abcd]	[abdc]
[a{cd}b]	[a{bd}c]	[a{bc}d]
$\{\{ab\}\{cd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}$	$\{\{ac\}\{bd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}$	$\{\{ad\}\{bc\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}$
$\{[ab][cd]\}-\frac{1}{3}[abcd]$	$\{[ac][db]\}-\frac{1}{3}[abcd]$	$\{[ad][bc]\}-\frac{1}{3}[abcd]$
[[ab][cd]]	[[ac][bd]]	[[ad][bc]]
[acbd]	[abcd]	[abdc]
[a[cd]b]	[a[bd]c]	[a[bc]d]

[abcd]

Отметим, что векторы, отвечающие ⊞, связаны тождествами

$$
\begin{aligned}
&\{\{ab\}\{cd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}+\{\{ac\}\{bd\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\}+\{\{ad\}\{bc\}\}-\frac{1}{3}\{abcd\} = 0,\\
&\{[ab][cd]\}-\frac{1}{3}[abcd]+\{[ac][db]\}-\frac{1}{3}[abcd]+\{[ad][bc]\}-\frac{1}{3}[abcd] = 0.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Применяя перестановки к базисным векторам, легко получить представляющие матрицы для всех представлений группы $\mathfrak{S}_4$

	1	(ab)	(bc)	(ca)	(ad)	(bd)	(cd)
для {abcd}	1	1	1	1	1	1	1
для $\begin{pmatrix} e'^{\,3,1}_{i1} \\ e'^{\,3,1}_{i2} \\ e'^{\,3,1}_{i3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
для $\begin{pmatrix} e'^{\,2,2}_{i1} \\ e'^{\,2,2}_{i2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ *)
для $\begin{pmatrix} e'^{\,2,1,1}_{i1} \\ e'^{\,2,1,1}_{i2} \\ e'^{\,2,1,1}_{i3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
для [abcd]	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Так как любая перестановка может быть разложена на траспозиции, то матрицы, отвечающие остальным перестановкам, можно получить путем перемножения уже выписанных.

Отметим, что выбор базиса, как и в случае перестановок трех символов, неоднозначен. Так, например, вместо векторов $e'^{\,2,2}_{ij}$ можно было выбрать векторы

$$
e''^{\,2,2}_{11}=\{\{ab\}\{cd\}\}-\{\{ac\}\{bd\}\} \quad e''^{\,2,2}_{12}=\{\{ac\}\{bd\}\}-\{\{ad\}\{bc\}\} \quad e''^{\,2,2}_{13}=\{\{ad\}\{bc\}\}-\{\{ab\}\{cd\}\}
$$

$$
e''^{\,2,2}_{21}=\{acbd\}-\{a\{cd\}b\} \qquad e''^{\,2,2}_{22}=\{abcd\}-\{a\{bd\}c\} \qquad e''^{\,2,2}_{23}=\{abdc\}-\{a\{bc\}d\} \tag{39}
$$

причем

$$
e''^{\,2,2}_{i1}+e''^{\,2,2}_{i2}+e''^{\,2,2}_{i3}=0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{39'}
$$

Вклад их в разложение (37) записался бы таким образом:

$$
+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{11}}e''^{\,2,2}_{11}+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{12}}e''^{\,2,2}_{12}+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{13}}e''^{\,2,2}_{13}+
$$

$$
+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{21}}e''^{\,2,2}_{21}+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{22}}e''^{\,2,2}_{22}+\frac{1}{24}\alpha_{e''^{\,2,2}_{23}}e''^{\,2,2}_{23} \tag{40}
$$

---

*) Точнее говоря, это представляющие матрицы в пространстве строки $e'^{\,2,2}_{1j}$. Для $e'^{\,2,2}_{2j}$ все эти матрицы, кроме единичной, умножены на −1, т.е. отличаются преобразованием подобия.

Интересно подчеркнуть, что наряду с обычным тождеством Якоби (13) для двойных коммутаторов мы получили много других аналогичных тождеств. Это равные нулю суммы элементов строк и столбцов таблиц 2а и 3а, первое из тождеств (13), тождества (38), (39^1) и некоторые другие тождества, которые возникли в процессе вычислений. Отметим также ещё одно обобщение тождества Якоби– четверное тождество для тройных коммутаторов

$$[a[b[cd]]]+[c[d[ab]]]+[b[a[dc]]]+[d[c[ba]]] = 0 . \qquad (41)$$

Вместе с тем тройные коммутаторы не преобразуются по одному неприводимому представлению.

$$[a[b[cd]]]=\frac{1}{4}\left(-e^{!\;3,1}_{12}+e^{!\;3,1}_{13}+2e^{!\;3,1}_{22}-2e^{!\;3,1}_{23}+2e^{!\;2,1,1}_{11}+e^{!\;2,1,1}_{12}-e^{!\;2,1,1}_{13}\right) \qquad (42)$$

4. СВЯЗЬ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Непрерывные группы обычно связываются с инвариантностью некоторых квадратичных форм. Конечные группы также можно связать с квадратичными формами, $x_1^2+\ldots+x_n^2$ или $x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, которые инвариантны относительно перестановок x_i или x_i одновременно с y_i. Форму можно преобразовать таким образом, что она распадется на сумму форм меньших размерностей, неприводимых относительно указанных операций. Если нам удалось представить квадратичную форму в таком виде, то мы можем сразу же записать разложение по перестановкам типа (37) или (43). И наоборот, получив разложения типа (37) или (43), легко переписать их на языке квадратичных форм. Так, например, в случае группы $\mathcal{S}_2$ разложение по базисным векторам, отвечающим схемам таблицы 1,

$$\alpha_{ab}ab+\alpha_{ba}ba=\frac{1}{2}\alpha_{\{ab\}}\{ab\}+\frac{1}{2}\alpha_{[ab]}[ab]. \qquad (43)$$

находится во взаимооднозначном соответствии (обнаруживающемся, если обозначить $x_1=\alpha_{ab}$, $x_2=\alpha_{ba}$, $y_1=ab$, $y_2=ba$) с соотношением

$$x_1y_1+x_2y_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2) \qquad (44)$$

для квадратичной формы в двумерном пространстве. Формула (44) означает, что это пространство разбивается на два инвариантных относительно перестановок x_1 с x_2 и одновременно y_1 с y_2 одномерных подпространства. Аналогично можно переписать формулы (37) и (43) (обозначая $x_1=\alpha_{abc},\ldots x_6=\alpha_{cba}$, $y_1=abc,\ldots y_6=cba$ и $x_1=\alpha_{abcd},\ldots x_{24}=\alpha_{dcba}$, $y_1=abcd,\ldots y_{24}=dcba$) как квадратичные формы в 6-мерном и в 24-мерном пространствах. Эти формулы – обобщения хорошо знакомой и тривиальной формулы (44).

Аналог формулы (44) в случае трехмерного пространства есть

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\frac{1}{3}(xy+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3), \qquad (45)$$

где

$$\begin{aligned} x&=x_1+x_2+x_3, & y&=y_1+y_2+y_3,\\ \xi_1&=x_2-x_3, & \eta_1&=y_2-y_3,\\ \xi_2&=x_3-x_1, & \eta_2&=y_3-y_1,\\ \xi_3&=x_1-x_2, & \eta_3&=y_1-y_2, \end{aligned} \qquad (46)$$

причем

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0, \qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3=0 .$$

Комбинации x и y инвариантны относительно перестановок x_i и y_i, а ξ_i и η_i ведут себя как

$$\begin{aligned} &(x_1x_2) && \xi_1\leftrightarrow-\xi_2, && \xi_3\to-\xi_3,\\ &(x_2x_3) && \xi_1\to-\xi_1, && \xi_2\leftrightarrow-\xi_3,\\ &(x_3x_1) && \xi_1\leftrightarrow-\xi_3, && \xi_2\to-\xi_2. \end{aligned}$$

Таким образом, трехмерное пространство разбивается на неприводимое одномерное и двумерное подпространства. На этом простом примере мы убеждаемся, что для симметрии по всем x_i мы вынуждены в двумерном пространстве пользоваться тремя комбинациями ξ_1, ξ_2 и ξ_3 с суммой нуль (и аналогично для y_i), что не существует только двух комбинаций, которые переходили бы при перестановках x_i друг в друга, но не в линейные комбинации обеих. Именно с такой ситуацией мы столкнулись выше в п. 2 и 3 при построении базисов двумерных представлений.

Если пространство четырехмерное, то редукция квадратичной формы осуществляется следующим образом :

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=1/4\,(xy+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3), \qquad (47)$$

где

$$\begin{aligned} x&=x_1+x_2+x_3+x_4, & y&=y_1+y_2+y_3+y_4,\\ \xi_1&=-x_1+x_2+x_3-x_4, & \eta_1&=-y_1+y_2+y_3-y_4,\\ \xi_2&=x_1-x_2+x_3-x_4, & \eta_2&=y_1-y_2+y_3-y_4,\\ \xi_3&=x_1+x_2-x_3-x_4, & \eta_3&=y_1+y_2-y_3-y_4 . \end{aligned} \qquad (48)$$

Комбинации ξ_i и η_i обладают замечательной симметрией относительно перестановок x_i и y_i

$$\begin{aligned} &(x_1x_2) && \xi_1\leftrightarrow\xi_2, && (x_3x_4) && \xi_1\leftrightarrow-\xi_2,\\ &(x_2x_3) && \xi_2\leftrightarrow\xi_3, && (x_1x_4) && \xi_2\leftrightarrow-\xi_3,\\ &(x_3x_1) && \xi_3\leftrightarrow\xi_1, && (x_2x_4) && \xi_3\leftrightarrow-\xi_1. \end{aligned}$$

Как видим, четырехмерное пространство разбивается на неприводимые одномерное и трехмерное подпространства. В отличие от двумерных представлений для трехмерных лишние компоненты не нужны. Хотя первоначально в п. 3 мы ввели для трехмерного пространства базис из четырех векторов с суммой нуль (см. таблицу 3 а), но затем без потери симметрии мы преобразовали его в трехмерный базис. Если имеется базис из четырех векторов с суммой нуль, то такое сведение можно сделать, используя формулы (48).

Ещё одно замечание, не имеющее прямого отношения к обсуждаемым вопросам. Формулы (48) удобно использовать при рассмотрении двухчастичных реакций. Пусть p_I, p_2, p_3 и p_4 – 4-импульсы начальных и конечных частиц:

$$\begin{aligned} p_I+p_2+p_3+p_4 &= 0\,, \\ p' &= -p_I+p_2+p_3-p_4\,, \\ p'' &= p_I-p_2+p_3-p_4\,, \\ p''' &= p_I+p_2-p_3-p_4\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Плоская волна описывающая четыре частицы в этих переменных записывается так:

$$e^{\frac{i}{4}(p'\xi_1 + p''\xi_2 + p'''\xi_3)}\,.$$

Простые свойства векторов p', p'' и p''' при перестановках частиц удобны при учете кроссинг-симметрии. Квадраты этих импульсов p'^2, p''^2 и p'''^2 фактически суть мандельстамовские переменные.*) Формулы (45) и (46) можно аналогично использовать при рассмотрении вершины /I2/

В заключение сердечно благодарю Б.Н. Валуева, Л.Г. Заставенко и В.И. Огиевецкого за обсуждения и ценные советы.

Литература:

I. О.Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1933.

2. H. Weyl, The theory of groups and quantum mechanios, Dover Publication, Ino., I93I.

3. A. Pais, Ann. of Phys. 9, 548; I0, 454, 196o.

4. Г. Вейль, Классические группы, ИЛ, Москва, 1947.

5. D.E. Rutherford, Substitutional Analisis, Edinburgh University Press, 1948.

6. T. Yamanouchi, Proo. Math. Phys. Soo. Japan, I8, 623, 1936; I9, 436, 1937.

7. H. Jahn, H. van Wieringen, Proo. Roy. Soo. A209, 502, 195I.

8. В.И. Смирнов, Курс высшей математики, том. Ш, часть I, ГИТТЛ, 1956.

9. Б.Л. ван-дер-Варден, Современная алгебра, часть II, ГИТТЛ, 1947.

IO. Е. Вигнер, Теория групп и её приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 196I.

II. Б.Л.ван-дер-Варден, Метод теории групп в квантовой механике, ОНТИ ДНТВУ, 1938.

I2. Г.В. Ефимов, Nuovo Cimento 32, 1046, 1964.

*) Для них так же $p'^2+p''^2+p'''^2 = 4(p_I^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2)$. Если отказаться от явной симметрии, то с помощью закона сохранения 4-импульса легко свести эти переменные к переменным Мандельстама.

Рукопись поступила в издательский отдел 5 августа 1966 г.