ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2873

А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P - 2873

А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в Nuclear Physics

1. Введение

Открытие дисперсионных соотношений делает возможной экспериментальную проверку основных принципов локальной квантовой теории поля и в первую очередь принципа микропричинности. Так как аналитические свойства амплитуд рассеяния являются непосредственными следствиями основных принципов локальной квантовой теории поля, то на основе экспериментального изучения следствий аналитических свойств амплитуд рассеяния можно судить о правильности этих принципов. Так, например, из принципов локальной теории поля следует, что амплитуды рассеяния π -мезона на нуклоне при некоторых фиксированных передачах импульса t являются аналитическими функциями комплексной переменной s (квадрат полной энергии в с.ц.м.) с полюсами и разрезами на вещественной оси [1], причем эти амплитуды при $s \to \infty$ растут медленнее любой линейной экспоненты [2,3]. Тогда, если дифференциальные сечения упругого рассеяния π -мезонов на протоне вперед ограничены, а полные сечения взаимодействия π -мезонов с протоном стремятся к постоянным пределам при $s \to \infty$, то эти пределы должны совпадать [4,5]. Таким образом, если дифференциальные сечения упругого рассеяния π -мезона на протоне вперед ограничены, а полные сечения взаимодействия мезонов с протоном стремятся к разным пределам при $s \to \infty$, например, то это, по-видимому, указывает на то, что в комплексной плоскости амплитуды рассеяния растут экспоненциально или быстрее, и этот рост амплитуд в свою очередь является указанием на существование фундаментальной длины - меры нелокальности теории [1-3,6,7].

В настоящей работе мы рассмотрим возможность изучения экспоненциального роста амплитуд рассеяния в комплексной плоскости на основе экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого рассеяния вперед и полным сечениям. Следует отметить, что если принцип микропричинности не выполняется на малых расстояниях, то амплитуды рассеяния π -мезона на протоне, например, могут иметь комплексные особенности, а на бесконечности они могут расти экспоненциально или быстрее. Здесь мы рассмотрим лишь простейший случай, когда комплексных особенностей не существует, и амплитуды рассеяния, являющиеся аналитическими функциями в комплексной плоскости s с полюсами и разрезами на вещественной оси, растут экспоненциально в комплексной плоскости. Мы покажем, что в этом случае точное определение дифференциальных сечений упругого рассеяния вперед и полных сечений, т.е. точное определение амплитуд рассеяния, позволяет определить нижний предел типа роста амплитуд и тем самым определить нижний предел фундаментальной длины в квантовой теории поля.

2. Аналитические свойства амплитуд рассеяния и дисперсионные соотношения в локальной теории

Рассмотрим упругое рассеяние вперед $\pi^{\pm}$ -мезона на нуклоне. Усредненные амплитуды этих процессов обозначим через $T_{\pm}(\omega)$, где ω – энергия $\pi^{\pm}$ -мезонов, а действительную и мнимую части амплитуд $T_{\pm}(\omega)$ – через $D_{\pm}(\omega)$ и $A_{\pm}(\omega)$. Из основных принципов локальной теории поля следует, что $T_{\pm}(\omega)$ являются краевыми значениями функций $T_{\pm}(z)$, аналитических в комплексной плоскости z с полюсами в точках $\pm\omega_0 = \pm\mu^2/2m$, где μ и m – массы π -мезона и протона, и с разрезами вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\mu$ и от μ до ∞. Эти аналитические функции удовлетворяют следующему условию вещественности

$$T_{\pm}(z^*) = [T_{\pm}(z)]^* \tag{1}$$

и соотношению перекрестной симметрии

$$T_{+}(-z) = -T_{-}(z) \tag{2}$$

для всех комплесных z и, в частности, соотношению

$$T_{+}(-\omega) = -[T_{-}(\omega)]^* , \tag{3}$$

вытекающему из (2) при помощи предельного перехода к верхним берегам разрезов $z \to \omega + i\epsilon$, $T_{+}(-\omega) = T_{+}(-\omega + i\epsilon)$.

Далее, в силу локальности полей амплитуды $T_{\pm}(z)$ растут в комплексной плоскости медленнее любой линейной экспоненты:

$$|T_{\pm}(z)| < C e^{\epsilon|z|} , \quad |z| \to \infty \tag{4}$$

при любом $\epsilon > 0$ (см. [2,3]). Отсюда следует, что в силу теоремы Фрагмена–Линделефа амплитуды $T_{\pm}(z)$ растут в комплексной плоскости z не быстрее некоторого полинома, если они растут не быстрее некоторого полинома на вещественной оси, т.е. если сечения растут не быстрее некоторого полинома от ω при $\omega \to \infty$ [x]. В этом случае

x) Отметим, что полиномиальная ограниченность амплитуд $T_{\pm}(z)$ при $\omega \to \infty$ на вещественной оси является следствием более слабого предположения. Рассмотрим амплитуды рассеяния как функции от s и t : $T(s,t)$. Можно показать (см. [6]), что если при значениях t, лежащих в области аналитичности по t, функция $T(s,t)$ растет с ростом s медленнее экспоненты от полинома от s

$$|T(s,t)| < C e^{a s^n} , \quad a > 0, \quad s \to +\infty , \quad n \to 0 ,$$

то в силу аналитичности по t и условия унитарности, в физической области $(t \le 0)$ она растет медленнее некоторого полинома от s, когда s стремится к бесконечности вдоль вещественной оси.

можно написать для $T_{\pm}(z)$ дисперсионные соотношения с конечным числом вычитаний. Для простоты мы рассмотрим случай, когда $T_{\pm}(\omega)$ растут не быстрее $\omega^{1-\epsilon} = |z|^{1-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, при $z \to \infty$ вдоль положительной вещественной оси, т.е. дифференциальные сечения упругого рассеяния растут не быстрее $\omega^{2(1-\epsilon)}$, а полные сечения – не быстрее $\omega^{1-\epsilon}$. В этом случае можно написать дисперсионные соотношения с одним вычитанием [8].

$$T_{+}(z) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{\mu}\right)T_{+}(\mu) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\mu}\right)T_{-}(\mu) +$$

$$+\frac{z^2-\mu^2}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\left[\frac{\sigma_{+}(\omega')}{\omega'-z} + \frac{\sigma_{-}(\omega')}{\omega'+z}\right] + \frac{2f^2}{f^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z-\mu^2/2m} , \tag{5}$$

$$T_{-}(z) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{\mu}\right)T_{-}(\mu) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\mu}\right)T_{+}(\mu) +$$

$$+\frac{z^2-\mu^2}{4\pi^2}\int_{\mu}^{\infty}\left[\frac{\sigma_{-}(\omega')}{\omega'-z} + \frac{\sigma_{+}(\omega')}{\omega'+z}\right] - \frac{2f^2}{\mu^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z+\mu^2/2m} \tag{6}$$

где f – перенормированная константа взаимодействия π -мезона с нуклоном, а $\sigma_{\pm}(\omega)$ – полные сечения взаимодействия мезонов с протоном

$$\sigma_{\pm}(\omega) = \frac{4\pi}{\sqrt{\omega^2-\mu^2}} A_{\pm}(\omega) .$$

3. Дисперсионные соотношения при наличии экспоненциального роста

Рассмотренные аналитические свойства амплитуд рассеяния являются следствием основных принципов локальной теории поля и в первую очередь принципа микропричинности. Если же принцип микропричинности не выполняется на малых расстояниях, то, вообще говоря, амплитуды рассеяния $T_{\pm}(z)$ могут иметь комплексные особенности, и на бесконечности они могут расти экспоненциально или быстрее. Мы рассмотрим простейший случай, когда комплексных особенностей не существует, а на бесконечности

$T_\pm(z)$ растут экспоненциально. Более конкретно, предположим, что: 1) $T_\pm(z)$ аналитичны в комплексной плоскости z с полюсами в точках $z=\pm\mu^2/2m$ и с разрезами вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\mu$, и от μ до ∞; 2) $T_\pm(z)$ удовлетворяют условию вещественности (1)

$$T_\pm(z^*)=[T_\pm(z)]^*$$

и соотношениям перекрестной симметрии (2) и (3)

$$T_+(z)=-T_-(z) \quad ,$$

$$T_+(-\omega)=-[T_-(\omega)]^* \quad ;$$

3) $T_\pm(\omega)$ растут при $\omega\to+\infty$ (в физической области) не быстрее $\omega^{1-\epsilon}$, $\epsilon>0$;
4) $T_\pm(z)$ растут при $z\to\infty$ в комплексной плоскости не быстрее некоторой линейной экспоненты

$$|T_\pm(z)|<C\,e^{a|z|} \quad , a>0, \ |z|\to\infty . \tag{7}$$

Мы покажем, что в данном случае, зная значения $T_\pm(\omega)$ на вещественной оси, мы можем определить нижний предел константы a в соотношении (7), которая может быть рассмотрена как мера нелокальности в теории поля – фундаментальная длина.

Согласно условию вещественности, разности значений функций $T_\pm(z)$ на верхнем и нижнем берегах разрезов пропорциональны значениям мнимых частей $T_\pm(\omega)=T_\pm(\omega+i\epsilon)$:

$$\Delta_\pm(\omega)=T_\pm(\omega+i0)-T_\pm(\omega-i0)=2i\,\mathrm{Im}\,T_\pm(\omega) \quad . \tag{8}$$

Из соотношений перекрестной симметрии следует, что

$$\Delta_+(-\omega)=\Delta_-(\omega) \quad . \tag{9}$$

Введем теперь функции $F_\pm(z)$, являющиеся суммами полюсных членов и дисперсионных интегралов со спектральными функциями $\Delta\pm(\omega)$:

$$F_+(z)=\frac{z^2-\mu^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\left[\frac{\sigma+(\omega')}{\omega'-z}+\frac{\sigma-(\omega')}{\omega'+z}\right]+ \tag{10}$$

$$+\frac{2f^2}{\mu^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z-\mu^2/2m} \quad ,$$

$$F_-(z)=\frac{z^2-\mu^2}{4\rho\pi^2}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\left[\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'-z}+\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'+z}\right]-\frac{2f^2}{\mu^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z+\mu^2/2m} \quad . \tag{11}$$

Рассмотрим разности

$$\phi_\pm(z)=T_\pm(z)-F_\pm(z) \quad . \tag{12}$$

Пользуясь формулами (8)–(11), нетрудно показать, что функции $\phi_\pm(z)$ аналитичны во всей плоскости z, т.е. являются целыми функциями. Так как $F_\pm(z)$ растут полиномиально при $z\to\infty$ в комплексной плоскости, то рост амплитуд $T_\pm(z)$ полностью определяется ростом целых функций $\phi_\pm(z)$, если $T_\pm(z)$ растут экспоненциально.

Таким образом, амплитуды $T_\pm(z)$, обладающие указанными свойствами 1)–4), представимы в виде:

$$T_+(z)=\phi_+(z)+\frac{2f^2}{\mu^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z-\mu^2/2m}+$$

$$\frac{z^2-\mu^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\left[\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'-z}+\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'+z}\right] \quad , \tag{13}$$

$$T_-(z)=\phi_-(z)-\frac{2f^2}{\mu^2}\,\frac{z^2-\mu^2}{z+\mu^2/2m}+$$

$$\frac{z^2-\mu^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\left[\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'-z}+\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'+z}\right] \quad , \tag{14}$$

где $\phi_\pm(z)$ – целые функции экспоненциального роста, удовлетворяющие условиям

$$\phi_\pm(z^*)=[\phi_\pm(z)]^* , \tag{15}$$

$$\phi_+(-z)=-\phi_-(z) \quad . \tag{16}$$

Мы предположили, что $T_\pm(z)$ растут экспоненциально в комплексной плоскости z. Так как $F_\pm(z)$ растут полиномиально, то изучение роста амплитуд $T_\pm(z)$ сводится к изучению роста целых функций $\phi_\pm(z)$.

Полученные выше дисперсионные соотношения (13), (14) при наличии экспоненциального роста амплитуды в комплексной плоскости отличаются от обычных дисперсионных соотношений (5), (6) тем, что вместо полиномов первой степени по z в них содержатся некоторые целые функции $\phi_{\pm}(z)$. Проверка дисперсионных соотношений по существу означает определение этих функций на вещественной оси.

В случае локальной теории функции $\phi_{\pm}(z)$ вырождаются в полиномы. Если же при проверке дисперсионных соотношений выясняется, что функции $\phi_{\pm}(z)$ не являются полиномами, то это будет свидетельствовать о наличии фундаментальной длины. Ниже, в § 4, мы приведем некоторый математический аппарат, которые позволяет по полученной информации относительно функций $\phi_{\pm}(z)$ дать оценку фундаментальной длины.

4. Некоторые теоремы из теории целых функций

Целая функция $\phi(z)$ называется целой функцией экспоненциального типа a, если

$$e^{(a-\epsilon)r} < \max_{|z|=r} |\phi(z)| < e^{(a+\epsilon)r}, \tag{17}$$

при $r\to\infty$ и при любом положительном ϵ. Обозначим через B_a класс целых функций $\phi(z)$ экспоненциального типа a, ограниченных на вещественной оси, а через W^p_a – класс целых функций $\phi(z)$ экспоненциального типа a, для которых степень $|\phi(z)|^p$ интегрируема на вещественной оси, и положим

$$||\phi||_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(z)|^p\, dz\right]^{1/p}. \tag{18}$$

Тогда имеют место следующие теоремы.

<u>Теорема 1.</u> Если целая функция $\phi(z)$ принадлежит классу B_a, то между значениями этой функции и ее производных $\phi^{(n)}(z)$ имеет место неравенство

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\phi^{(n)}(x)| \leqslant a^n \max_{-\infty<x<\infty} |\phi(x)| . \tag{19}$$

Эта теорема была доказана Бернштейном /9/. Результаты Бернштейна были обобщены в ряде работ. Приведем некоторые теоремы, доказанные Ибрагимовым /10,11/.

<u>Теорема 2.</u> Пусть целая функция $\phi(z)$ принадлежит классу W^p_a, $1\le p\le 2$. Тогда для любого $p'\ge p$ мы имеем неравенство

$$||\phi^{(n)}||_{p'} < [\pi(np+1)]^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\, a^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\, ||\phi||_p . \tag{20}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы. Если положить $p'=p$, то мы имеем

$$||\phi^{(n)}||_p \le a^n ||\phi||_p . \tag{21}$$

В неравенстве (20) $1\le p\le 2$. Однако справедливо более общее утверждение:

<u>Теорема 3.</u> Неравенство (21) имеет место для всех целых функций класса W^p_a, $p\ge 1$.

Если в неравенстве (20) положить $p'=\infty$, то в силу соотношения /12/

$$\lim_{p'\to\infty} ||\phi^{(n)}||_{p'} = \max_{-\infty<x<\infty} |\phi^{(n)}(x)|$$

мы имеем

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\phi^{(n)}(x)| \le [\pi(np+1)]^{-\frac{1}{p}}\, a^{n+\frac{1}{p}}\, ||\phi||_p , \tag{22}$$

а для случая $n=0$

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\phi(x)| \le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} ||\phi||_p , \qquad 1\le p\le 2 . \tag{23}$$

<u>Теорема 4.</u> Пусть целая функция $\phi(x)$ принадлежит классу W^p_a, $p\ge 1$. Тогда для всех $p'\gg p$ мы имеем

$$||\phi||_{p'} \le \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} ||\phi||_p , & 1\le p\le 2 , \\ \left(\frac{pa}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} ||\phi||_p , & p>2 . \end{cases} \tag{24}$$

Отметим, что первое из неравенств (24) является частным случаем теоремы 2 (достаточно положить $n=0$). В случае, когда $p'=\infty$, вместо второго неравенства из (24) имеет место более точное неравенство

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\phi(x)| \le \left(\frac{pa}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} ||\phi||_p , \qquad p>2 . \tag{25}$$

Неравенства (24) являются обобщением неравенства Никольского [13]

$$\|\phi\|_{p'} \leq 2a^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|\phi\|_p \quad . \tag{26}$$

Для изучения роста целых функций $\phi_\pm(z)$ можно применить также следующую теорему順 Планшереля и Пойя [14].

Теорема 5. Если целая функция $\phi(z)$ принадлежит классу W^p_a, то для любой возрастающей последовательности точек λ_n на вещественной оси, для которой $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq \delta > 0$, имеет место неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\lambda_n)|^p < \frac{4}{\pi\delta} e^{\frac{p a \delta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \quad . \tag{27}$$

5. Методы экспериментального определения нижнего предела экспоненциального роста амплитуд рассеяния

Как было показано, если $T_\pm(z)$ экспоненциально растут в комплексной плоскости z, то изучение роста $T_\pm(z)$ сводится к изучению роста целых функций $\phi_\pm(z)$ в соотношениях (13) и (14). Значения этих функций и их производных на вещественной оси можно определить на основе экспериментальных данных по полным сечениям и дифференциальным сечениям упругого рассеяния вперед при помощи соотношений (13) и (14). Если $\phi_\pm(z)$ ограничены на вещественной оси, то для определения нижнего предела постоянной a можно применять соотношение (19). Если $\phi_\pm(z)$ растут линейно на вещественной оси, например, то вместо $\phi_\pm(z)$ рассмотрим новые целые функции

$$\phi^{(I)}_\pm(z) = \frac{\phi_\pm(z) - \phi_\pm(0)}{z} \quad , \tag{28}$$

ограниченные на вещественной оси и имеющие такой же рост на комплексной плоскости, что и сами $\phi_\pm(z)$. Применение к этим функциям $\phi^{(I)}_\pm(z)$ неравенства (19) позволяет определить нижний предел постоянной a. Если же $\phi_\pm(z)$ растут как $z^{2-\epsilon}$, то рассмотрим

$$\phi^{(II)}_\pm(z) = \frac{\phi_\pm(z) - \phi_\pm(0) - z\phi'_\pm(0)}{z^2} \quad . \tag{29}$$

и применим к этим функциям неравенство (19). Аналогично, если степень $|\phi\pm(x)|^p$ интегрируема, то, применяя к функциям $\phi_\pm(z)$ неравенства (20)-(27), мы можем также

определить нижний предел постоянной a. Если же $|\phi\pm(x)|^p$ неинтегрируема, то вместо функций $\phi_\pm(z)$ достаточно рассмотреть соответствующие целые функции вида (28) и (29), p-ая степень которых интегрируема, и применить к этим новым функциям неравенства (19) и (27).

Таким образом, если амплитуды рассеяния вперед $T_\pm(z)$ являются аналитическими функциями в плоскости z с полюсами и разрезами на вещественной оси и если они растут экспоненциально в комплексной плоскости, то на основе экспериментальных данных можно определить при помощи соотношения (13), (14) и неравенств (19)-(27) нижний предел постоянной a в соотношении (17), характеризующей рост амплитуд и связанной с фундаментальной длиной.

Полученные результаты показывают, что наличие экспоненциального роста амплитуды рассеяния в комплексной плоскости проявляется в характере их поведения на вещественной оси. Обнаружение этих свойств весьма деликатная вещь, требующая знания поведения функций и в ряде случаев их производных на всей вещественной оси. Эффективность рассматриваемых в работе методов для экспериментального обнаружения фундаментальной длины в существенной степени зависит от характера асимптотического поведения и, конечно, требует большого объема экспериментальной информации.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, ГИФМЛ, Москва, 1958.
2. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 46, 1502 (1964).
3. Nguyen van Hieu. Ann. Phys., 33, 428 (1965).
4. И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 34, 725 (1958).
5. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 43, 2277 (1964).
6. А.А. Логунов и Нгуен Ван Хьеу. Лекции Международной зимней школы, Дубна, 1964.
7. D.I. Blokhinsev and G.I. Kolerov. Nuovo Cim., 34, 163 (1964).
8. M.L. Goldberger, H. Miyazawa and R. Oehme. Phys. Rev., 99, 986 (1955).
9. С.Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов, Гостехиздат, Москва, 1937.
10. И.И. Ибрагимов. УМН, 12, 323 (1957).
11. И.И. Ибрагимов. Изв. АН СССР, серия мат. 23, 243 (1959); 24, 605 (1960).
12. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1, стр. 37 "Мир", Москва, 1965.
13. С.М. Никольский. Труды МИ АН СССР им. В.А. Стеклова, 38, 244 (1951).
14. M. Plancherel and G. Polya. Comment. Math. Helv., 10, 110 (1938).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1966 г.