ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2870

Г.В. Ефимов

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2870

Г.В. Ефимов

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Направлено в "Communications in Mathematical Physics"

1. Введение. Условие макропричинности

Как хорошо известно, основной трудностью в квантовой теории поля, связанной с построением разложения теории возмущений для S -матрицы по известному лагранжиану системы квантованных полей, является проблема устранения ультрафиолетовых расходимостей. Были предприняты многочисленные попытки преодолеть эту трудность, отказавшись от принципа локальности взаимодействия, как это впервые было предложено Ватагиным[1]. Однако нелокальной квантовой теории поля присущи многие трудности, и в настоящее время, как нам кажется, она далека еще от своего завершения[x]. Настоящая работа также относится к числу попыток устранить ультрафиолетовые расходимости в теории путем введения нелокальности в лагранжиан взаимодействия.

Как нам кажется, одной из основных трудностей при построении нелокальной теории поля является формулировка принципа макропричинности S -матрицы. Хотя имеются интуитивные соображения, что акаузальный сигнал должен достаточно быстро затухать с ростом времени или расстояния, еще не сформулировано достаточно четкое требование на поведение S -матрицы, как это сделано в случае микропричинности[3].

Нам кажется, что разумным требованием макропричинности, накладываемым на S -матрицу, было бы следующее обобщение условия микропричинности[3]. Пусть $\phi(x)$ -оператор поля. Тогда S -матрица должна удовлетворять следующему условию[xx]:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}\cdot S^{-1}\right)=0 \tag{1.1}$$

---

[x] См. обзор по нелокальной квантовой теории поля[2].

[xx] Заметим, что, как следует из вывода условия причинности в[3], если $SS^{+}\neq 1$ не массовой оболочки, в условии причинности появляется S^{-1}, а не S^{+}.

вне областей G и G_ℓ , где

$$G:\ x_0 \geq y_0, \qquad (x-y)^2 > 0 \qquad \text{-причинная область,} \tag{1.2}$$

$$G_\ell:\ -\ell^2 \leq (x-y)^2 \leq \ell^2 \qquad \text{-непричинная область ,} \tag{1.3}$$

Здесь ℓ имеет смысл "элементарной" длины.

При этом необходимо наложить еще дополнительное требование, чтобы выражение (1.1) в области G_ℓ было бы пропорционально таким релятивистски-инвариантным обобщенным функциям $A_\ell(x-y)$, которые обладали бы следующим свойством. Любые функции $f(x)$, отличные от нуля в какой-либо ограниченной области пространства-времени G_f , они переводили бы в функции $F(x)=\int dy\, A_\ell(x-y) f(y)$, отличные от нуля лишь в несколько большей <u>ограниченной</u> области пространства-времени $G_F = G_f + \delta G_f$, причем область δG_f <u>ограничена</u> и целиком лежит внутри области $G_{f\ell}$, такой, что $x \in G_{f\ell}$, если $-\ell^2 \leq (x-y)^2 \leq \ell^2$, где $y \in G_f$. При этом форма этой "размазанной" области G_F должна зависеть только от характера поведения функции $f(x)$ в области G_f .

Такое определение макропричинности нам представляется весьма удовлетворительным, поскольку оно релятивистски инвариантно и свободно от обычных возражений, что зависимость выражения (1.1) вне причинной области G (1.2) от интервала $s=(x-y)^2$ допускает существование акаузальных сигналов на сколь угодно больших расстояниях.

Как показано ниже, такие обобщенные функции существуют. Однако нам не удалось удовлетворить сформулированному требованию макропричинности в полной мере. Оказалось, что при построении разложения S -матрицы по константе связи с увеличением порядка теории возмущений непричинная область G_ℓ расширяется, достигая величины $G_{(n-1)\ell}$ в n-ом порядке. Это означает, что в пределе полного ряда S -матрица, строго говоря, не удовлетворяет сформулированному условию причинности.

Однако физически задачу можно поставить таким образом, чтобы степень нарушения причинности находилась в рамках обычных требований, предъявляемых к нелокальным теориям. Действительно, нам необходимо построить по лагранжиану системы квантованных полей S -матрицу в виде ряда теории возмущений по <u>малой</u> константе связи. Подчеркнем, мы интересуемся <u>только</u> рядом теории возмущений, о свойствах всего ряда в целом в рамках современных методов ничего сказать нельзя. Поэтому можно потребовать, чтобы нарушение причинности, происходящее на макроскопических расстояниях и описываемое высшими порядками теории возмущений, было исчезающе мало.

Действительно, в обычной нелокальной теории требуется, чтобы непричинные сигналы затухали достаточно быстро со временем или с расстоянием, например, как $e^{-\Lambda t}$ где Λ – импульс обрезания. В случае, например, слабых взаимодействий, где обычно выбирается $\Lambda \approx 100$ Гэв, для времен порядка атомных размеров, т.е. для $t \approx 10^{-18}$ сек ≈ 1 эв$^{-1}$, влияние непричинного сигнала крайне мало, именно: $\approx \exp\{-10^{11}\}$. Посмотрим, что происходит в рассматриваемой схеме нелокальной теории с разложением S -матрицы по малой константе связи. Снова рассмотрим слабые взаимодействия. Малым параметром ряда теории возмущений в этом случае является величина $G\ell^{-2}$, где G – константа слабых взаимодействий, ℓ –элементарная длина. Естественно предполагать, что $G\ell^{-2} < 1$. Пусть, например, $G\ell^{-2} \simeq e^{-1}$. Нарушение причинности на расстояниях порядка атомных размеров будет описываться в порядке теории возмущений $n \approx \frac{r}{\ell} \approx 10^{11}$, если выбрать, как и ранее, величину порядка размера атома $r \approx 10^{-8}$ см ≈ 1 эв$^{-1}$, а $\ell \approx 10^{-2}$ Гэв$^{-1}$. Значит, величина эффекта, связанного с непричинным поведением на расстояниях порядка атомных, будет порядка $\approx (G\ell^{-2})^n \approx \exp\{-10^{11}\}$, т.е. столь же мала, как и в обычно допустимых вариантах нелокальных теорий.

Таким образом, предполагаемая схема построения нелокальной теории для взаимодействий, характеризующихся малой константой связи, как нам представляется, является физически приемлемой.

В настоящей работе будет рассмотрено для простоты однокомпонентное скалярное квантованное поле. Обобщение предлагаемой процедуры на фермионное поле не связано с принципиальными трудностями. В § 2 более четко сформулирована задача, в § 3 выбирается класс нелокальных опереторов, в § 4 изучаются свойства классов основных и обобщенных функций, в § 5 проводится построение ряда теории возмущений для S -матрицы, в § 6 показывается, что S -матрица унитарна, а в § 7, что она удовлетворяет сформулированному условию причинности.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать однокомпонентное скалярное поле $\phi(x)$, которое описывается лагранжианом взаимодействия следующего вида:

$$L(x) = L_0(x) + L_I(x). \tag{2.1}$$

Здесь $L_0(x)$ – обычный лагранжиан свободного поля, а $L_I(x)$ описывает самодействие поля $\phi(x)$. В случае обычной локальной теории поля лагранжиан взаимодействия является некоторым полиномом от поля $\phi(x)$, например, $L_I(x) = g\phi^4(x)$.

Мы будем рассматривать следующую задачу. Будем считать, что в лагранжиан взаимодействия входит не поле $\phi(x)$, а поле $\Phi(x)$, определенное следующим образом:

$$\Phi(x)=\int dy\, A(x-y)\phi(y)=A(\Box_x)\,\phi(x), \tag{2.2}$$

$$A(x-y)=A(\Box_x)\delta^{(4)}(x-y), \tag{2.3}$$

где $A(\Box)$ – некоторый оператор от $\Box_x=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

Проведем некоторые преобразования. Формально S –матрицу можно записать в виде T –произведения:

$$S=T\exp\{-i\int dx\, L_I(x)\}, \tag{2.4}$$

где $L_I(x)$ теперь является полиномом от поля $\Phi(x)$, например, $L_I(x)=g\Phi^4(x)$. Разложим S –матрицу в ряд по константе связи g и перейдем к N –произведению операторов поля $\Phi(x)$ согласно теореме Вика, где под хронологической сверткой операторов $\Phi(x)$ будем понимать так называемое "виково T –произведение":

$$D_c(x-y)=\overline{\Phi(x)\Phi}(y)=A(\Box_x)A(\Box_y)\phi(x)\phi(y)=$$

$$=A(\Box_x)A(\Box_y)\Delta_c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\frac{d^4p\,[A(-p^2)]^2}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{ip(x-y)}. \tag{2.5}$$

Таким образом, мы получим по структуре обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что обычные причинные функции скалярного поля заменяются на функции (2.5).

Поставим следующую задачу. Можно ли так подобрать операторы $A(\Box)$, чтобы функция $[A(-p^2)]^2$ играла роль функции обрезания, или формфактора в ряду теории возмущений, т.е., чтобы сходились интегралы, соответствующие любым графам Фейнмана, и были выполнены требования унитарности и причинности, накладываемые на S – матрицу теории ?

3. Свойства операторов $A(\Box)$

Приступим к изучению свойств операторов $A(\Box)$. Будем считать, что операторы $A(\Box)$ можно представить в виде бесконечного ряда по степеням $\Box$:

$$A(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \Box^n. \tag{3.1}$$

Тогда фурье-образ этого оператора запишется в виде:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} z^n; \qquad z = -p^2 . \tag{3.2}$$

Каким требованиям должна удовлетворять функция $A(-p^2)$? Прежде всего отметим, что $A(-p^2)$, рассматриваемая как функция комплексной переменной $z = -p^2$, должна быть целой, поскольку любые особенности функции $A(-p^2)$ при конечных p^2 приведут к появлению дополнительных нефизических особенностей у амплитуд физических процессов, а это означает, что S -матрица теории не будет унитарной.

Итак, функция $A(z)$ в (3.2) - целая. Будем различать три возможности:

$$\begin{aligned}
&(I) && \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0, \\
&(II) && \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \mathrm{Const} < \infty, \\
&(III) && \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Рассмотрим возможность (1). В том случае функции $A(z)$ являются целыми функциями конечного порядка роста $\gamma < \frac{1}{2}$, т.е.

$$|A(z)| < e^{a|z|^{\gamma}} \quad (\gamma < \frac{1}{2}), \tag{3.4}$$

где a -некоторое положительное число. Примером таких функций является функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \qquad \text{при} \quad \alpha > 2 .$$

Из теории целых функций (смотри, например,[4]) известно, что для таких функций не существует ни одного направления в комплексной плоскости z, вдоль которого они могли бы убывать. Следовательно, они не могут выполнить роль функций обрезания, и с их помощью нельзя сделать конечной теорию возмущений.

С другой стороны, можно показать, обобщая результаты работы Меймана[5] на релятивистский случай, что операторы $A(\Box)$, у которых коэффициенты c_n удовлетворяют условию (3.3. I), являются локальными, т.е., грубо говоря, поведение оператора поля $\Phi(x)$ в точке x зависит от поведения оператора поля $\phi(x)$ только в непосредственной окрестности точки x. Строгое математическое построение было бы следующим. Обобщенные функции (2.3) определяются и являются локальными на классе основных функций C_0. Функции основного класса $f(x)$ обладают следующими свойствами: 1) каждая $f(x)=f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ аналитична по каждому аргументу x_j в некоторой полосе 0_f вокруг вещественной оси, т.е. в полосе $|\mathrm{Im}\, x_j|<d_f$, где d_f зависит от функции $f(x)$; 2) функции $f(x)$ и все ее производные ограничены в 0_f; 3) функции $f(x)$ убывают при $x_j \to \pm\infty$. Операторы поля $\phi(x)$ не принадлежат классу C_0. Однако всегда можно ввести процедуру несобственного предельного перехода, т.е. ввести так некоторые операторы поля $\phi_\epsilon(x)$, что при любом $\epsilon>0$ $\phi_\epsilon(x)\in C_0$, и затем рассматривать предельный переход $\epsilon\to 0$. Определив соответствующим образом сходимость в пространстве основных функций, можно затем утверждать, что обобщенная функция $A(x-y)$ в (2.3), или операторы $A(\Box)$ в (2.2) являются локальными.

Итак, мы получили, что нельзя построить теорию возмущений без ультрафиолетовых расходимостей, вводя в лагранжиан взаимодействия вместо поля $\phi(x)$ локальное поле $\Phi(x)$.

В случае (II) функции $A(z)$ являются целыми функциями конечного порядка роста $\gamma=\frac{1}{2}$, т.е.

$$|A(z)|\le \ell^{a\sqrt{|z|}}. \tag{3.5}$$

Для таких функций может существовать лишь одно направление в комплексной плоскости z, вдоль которого они убывают. Ниже мы будем подробно исследовать именно этот случай.

В случае (III) функции $A(z)$ являются целыми функциями, порядок которых выше $\gamma=\frac{1}{2}$, т.е.

$$|A(z)|<\ell^{h(|z|)}, \tag{3.6}$$

где $h(|z|)$ – некоторая положительная функция, причем $h(|z|) > a|z|^{1/2+\epsilon}$ при $|z| \to \infty$ и произвольных $\epsilon > 0$. У таких функций могут существовать целые секторы, в которых они убывают при $|z| \to \infty$, так что их можно было бы выбрать в качестве функций обрезания и построить с их помощью конечную и унитарную теорию возмущений. Однако можно показать (мы не будем на этом останавливаться), что полевые операторы $\Phi(x)$ уже не будут в этом случае локальными, т.е. поведение оператора поля $\Phi(x)$ в точке x будет определяться поведением оператора поля $\phi(x)$ во всем x – пространстве. Иными словами, дифференциальный оператор $A(\Box)$ в (3.3. III) является на самом деле интегральным оператором, ядро которого отлично от нуля во всем x – пространстве. Поэтому условию причинности такая теория не будет удовлетворять.

4. Основной класс функций и обобщенные функции

Будем рассматривать такие обобщенные функции

$$A_\lambda(x-y) = A_\lambda(\Box_x)\delta^{(4)}(x-y), \tag{4.1}$$

для которых оператор $A_\lambda(\Box)$ типа (3.3 II) может быть представлен в виде:

$$A_\lambda(\Box) = \int_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\, e^{i\rho_0\frac{\partial}{\partial x_0}+\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}} = (2\pi)^2\int_0^\lambda d\beta\,\beta^2 a(\beta^2)\frac{J_1(\beta\sqrt{\Box})}{\sqrt{\Box}}, \tag{4.2a}$$

или

$$A_\lambda(\Box) = \int_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\, e^{\rho_0\frac{\partial}{\partial x_0}+i\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}} = (2\pi)^2\int_0^\lambda d\beta\,\beta^2 a(\beta^2)\frac{J_1(\beta\sqrt{-\Box})}{\sqrt{-\Box}}. \tag{4.2б}$$

Здесь под ρ понимается четырехмерный евклидов вектор $\rho^2 = \rho_0^2+\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$, $a(\rho^2)$ – некоторая интегрируемая функция от ρ^2, $J_1(z)$ – функция Бесселя, λ – некоторый параметр, имеющий смысл "элементарной" длины, как будет видно ниже.

В дальнейшем мы будем говорить, что операторы $A_\lambda(\Box)$ принадлежат типу (А) или типу (Б), если они представляются соответственно в виде (4.2а) или (4.2б).

Запишем операторы (4.2) в импульсном представлении

$$A_\lambda(-p^2) = (2\pi)^2\int_0^\lambda d\beta\,\beta^2 a(\beta^2)\frac{J_1(\beta\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} \qquad \text{(тип А)}, \tag{4.3a}$$

$$A_\lambda(-p^2)=(2\pi)^2\int_0^\lambda d\beta\beta\beta^2 a(\beta^2)\,\frac{J_1(\beta\sqrt{p^2})}{\sqrt{p^2}} \qquad (\text{тип Б}). \qquad (4.3б)$$

Обратим внимание на следующее. Если оператор $A_\lambda(\Box)$ принадлежит типу А, то функция $A_\lambda(-p^2)$ убывает при $p^2\to-\infty$ и растет при $p^2\to+\infty$. Если же оператор $A_\lambda(\Box)$ принадлежит типу Б, то функция $A_\lambda(-p^2)$ убывает при $p^2\to+\infty$ и растет при $p^2\to-\infty$.

Приступим к изучению свойств функций основного класса, который в дальнейшем будем обозначать через D, а класс обобщенных функций – через D'. Прежде всего потребуем, чтобы функции основного класса $f(x)\equiv f(x_0,\vec{x})\equiv f(x_0,x_1,x_2,x_3)$ были вещественными и убывали на бесконечности как некоторая обратная степень полинома. На основном пространстве функций должны быть однозначно определены функционалы

$$(A_\lambda,f)=\int dy\,A_\lambda(x-y)f(y)=A_\lambda(\Box_x)\,f(x)= \qquad (4.4а)$$

$$=\int_{\rho^2\le\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\exp\{i\rho_0\frac{\partial}{\partial x_0}+\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\}f(x)=\int_{\rho^2\le\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)f(x_0+i\rho_0,\vec{x}+\vec{\rho}),$$

$$(A_\lambda,f)=\int_{\rho^2\le\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\exp\{\rho_0\frac{\partial}{\partial x}+i\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\}f(x)= \qquad (4.4б)$$

$$=\int_{\rho^2\le\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2)f(x_0+\rho_0,\vec{x}+i\vec{\rho}).$$

Если потребовать, чтобы функционалы (A_λ,f) в (4.4а) и (4.4б) были однозначно определены в любой системе координат, полученной из исходной преобразованием Лоренца, и при любой величине параметра λ, то отсюда следует, что в качестве функций основного класса необходимо выбрать функции $f(x_0,\vec{x})$, являющиеся значениями на вещественной оси целых аналитических функций $f(z_0,z_1,z_2,z_3)$ по каждому аргументу z_0,z_1,z_2,z_3.

Будем в дальнейшем считать, что класс основных функций состоит из целых функций $f(z)$, которые убывают вдоль любого направления в плоскости z вне полосы $|\mathrm{Re}\,z|<d$, где d – некоторое число, т.е.

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0 \qquad \text{при} \qquad |\mathrm{Re}\,z|>d. \qquad (4.5)$$

Приведем пример такой функции:

$$f(z)=\int_0^{\infty}\frac{du\,\mathrm{Cos}\,u\,z}{\Gamma(\rho u+1)}\quad .$$

Здесь $f(z)=O(\frac{1}{z})$ в области $|\mathrm{Re}\,z|>\frac{\pi}{\rho}$ при $z\to\infty$,

Сформулируем окончательно определение пространства D основных функций.

1. Каждая $f(x)$ из D является целой аналитической функцией по каждому своему аргументу x_j , удовлетворяющей условию (4.5), где d вообще говоря, зависит от функции $f(x)$.

2. Каждая $f(x)$ из D вещественна на вещественной оси и убывает при $x_j\to\pm\infty$, как некоторая обратная степень полинома.

3. Последовательность функций $f_n(x)$ из D сходится к нулю в некоторой области G, если все функции последовательности равномерно стремятся к нулю в G .

Для дальнейшего нам существенно знать локальные свойства обобщенных функций $A_{\lambda}(x-y)$. Для выяснения локальных свойств обобщенных функций необходимо иметь функции основного класса, локализованные в некоторой ограниченной области x -пространства или просто в одной какой-либо точке. Таких функций нет в классе D . Однако можно выбрать такую последовательность $\{f_{\nu}(x,y)\}$, где каждая $f_{\nu}(x,y)\in D$, а предельная функция

$$f(x,y)=\lim_{\nu\to 0}f_{\nu}(x,y) \tag{4.6}$$

уже не принадлежит классу D и равна нулю для всех точек $x\neq y$. Если еще нормировать функции $f_{\nu}(x,y)$ условием

$$\int d^4x\,f_{\nu}(x,y)=1, \tag{4.7}$$

то вводимая последовательность дает представление δ - функции в рассматриваемом нами классе функций. В качестве примера такой последовательности можно выбрать

$$f_{\nu}(x,y)=f_{\nu}(x-y)=\prod_{j=0}^{3}\frac{1}{\nu_j}f\left(\frac{x_j-y_j}{\nu_j}\right), \tag{4.8}$$

где под ν понимается четыре независимых положительных параметра ν_0,ν_1,ν_2,ν_3 соответственно каждому x_j , а $f(z)\in D$ и удовлетворяет условию (4.7). Тогда

$$\lim_{\nu\to 0} f_\nu(x-y)=\delta(x-y) \quad . \qquad (4.9)$$

Рассмотрим последовательность

$$g_\nu(x-y)=\int d^4x' A_\lambda(x-x') f_\nu(x'-y)=A_\lambda(\Box_x) f_\nu(x-y) , \qquad (4.10)$$

где под функцией $f_\nu(x-y)$ понимаем (4.8). Посмотрим, где функция $g(x-y)=\lim_{\nu\to 0} g_\nu(x-y)$ отлична от нуля, если $\lim_{\nu\to 0} f_\nu(x-y)=0$ при всех $x\neq y$.

Сначала исследуем свойства операторов $A_\lambda(\Box)$ типа (А). Для простоты положим $y=0$. Получим

$$g(x)=\lim_{\nu\to 0} g_\nu(x)=\lim_{\nu\to 0}\int_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2) f_\nu(x_0+i\rho_0, \vec{x}+\vec{\rho}) . \qquad (4.11)$$

Здесь можно перейти к пределу $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0$. Согласно (4.9) получим:

$$g(x)=\lim_{\nu_0\to 0}\theta(\lambda^2-\vec{x}^2)\int_{-\sqrt{\lambda^2-\vec{x}^2}}^{\sqrt{\lambda^2-\vec{x}^2}} d\rho_0\, a(\vec{x}^2+\rho_0^2)\frac{1}{\nu_0} f\left(\frac{x_0+i\rho_0}{\nu_0}\right). \qquad (4.12)$$

Согласно свойству (4.5) функций основного класса $\lim_{\nu_0\to 0}\frac{1}{\nu_0} f\left(\frac{x_0+i\rho_0}{\nu_0}\right)=0$ для всех $x_0\neq 0$. Окончательно:

$$g(x)=\lim_{\nu\to 0} g_\nu(x)=0 \qquad (4.13)$$

вне области $x_0=0$, $\vec{x}^2<\lambda^2$. Итак, мы получили, что при действии оператора $A_\lambda(\Box)$ типа (А) на последовательность $\{f_\nu(x-y)\}$, предельная функция которой сосредоточена в точке $x=y$, получаем другую последовательность $\{g_\nu(x-y)\}$, предельная функция которой сосредоточена в некоторой ограниченной пространственно-подобной области $G_\lambda(x_0=y_0; \vec{x}=\vec{y}+\vec{\rho}$, где $\vec{\rho}^2<\lambda^2)$ вокруг точки y . Четырехмерный объем этой области равен нулю.

Рассмотрим теперь последовательность (4.10) в случае, когда оператор $A(\Box)$ принадлежит типу (Б). Имеем

$$g(x)=\lim_{\nu\to 0}\int_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho\, a(\rho^2) f_\nu(x_0+\rho_0, \vec{x}+i\vec{\rho}) . \qquad (4.14)$$

Здесь можно перейти к пределу $\nu_0 = 0$. Согласно (4.9), получим

$$g(x) = \lim_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 \to 0} \theta(\lambda^2 - x_0^2) \int_{\vec{\rho}^{\,2} < \lambda^2 - x_0^2} d\vec{\rho}\, a(x_0^2 + \vec{\rho}^{\,2}) \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{\nu_j} f\left(\frac{x_j + i\rho_j}{\nu_j}\right). \tag{4.15}$$

Согласно свойству (4.5),

$$\lim_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 \to 0} \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{\nu_j} f\left(\frac{x_j + i\rho_j}{\nu_j}\right) = 0 \qquad \text{для всех} \qquad \vec{x} \neq 0.$$

Окончательно:

$$g(x) = \lim_{\nu \to 0} g_\nu(x) = 0 \tag{4.16}$$

вне области $x_0^2 < \lambda^2$, $\vec{x} = 0$. Мы получили, что действие оператора $A_\lambda(\Box)$ типа (Б) на последовательность $\{f_\nu(x-y)\}$ приводит к последовательности $\{g_\nu(x-y)\}$, предельная функция которой отлична от нуля в ограниченной времени-подобной области G $(x_0 = y_0 + r$, где $r^2 < \lambda^2$; $\vec{x} = \vec{y})$ вокруг точки y. Четырехмерный объем этой области также равен нулю.

Существенно отметить, что существуют различные последовательности $\{f_\nu(x-y)\}$, сходящиеся к δ-функции. Таковыми будут все последовательности, которые можно получить из (4.8) преобразованиями Лоренца. Каждая такая последовательность при действии на нее оператора $A_\lambda(\Box)$ будет переходить в новую последовательность, сходящуюся к функции, отличной от нуля в ограниченной области, связанной соответствующим преобразованием Лоренца с областью, полученной для последовательности (4.8). Все эти ограниченные области, полученные из различных последовательностей $\{f_\nu(x-y)\}$, лежат внутри гиперболоида:

$$-\lambda^2 \leqslant (x-y)^2 \leqslant \lambda^2. \tag{4.17}$$

Таким образом, физический смысл обобщенных функций $A_\lambda(x-y)$ следующий. Пусть имеется некоторое поле $\phi(x)$, которое возникает и затем исчезает в момент времени y_0 в точке пространства $\vec{y}$. Тогда влияние этого импульса поля, благодаря "функции распространения" $A_\lambda(x-y)$, скажется в некоторой ограниченной области, четырехмерный объем которой равен нулю и которая целиком лежит внутри гиперболоида (4.17). Форма области влияния будет зависеть от "микроформы" импульса поля $\phi(x)$.

В заключение опишем еще одно очень важное свойство обобщенных функций (4.1), которое отсутствует у обобщенных функций умеренного порядка роста. Именно, можно однозначно определить произведение обобщенных функций (4.1) с оператором $A_\lambda(\Box)$ вида (4.2а) или (4.2б):

$$C_\lambda(x-y)=-iA^{(1)}_\lambda(x-y)A^{(2)}_\lambda(x-y)\,, \tag{4.18}$$

где индексами и 2 различаются функции $a_1(\rho^2)$ и $a_2(\rho^2)$, стоящие под интегралом в определении (4.2).

Будем строить обобщенные функции при помощи несобственного предельного перехода. Введем промежуточную регуляризацию для обобщенных функций $A_\lambda(x-y)$ вида:

$$A^\epsilon_\lambda(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ipx}\,A_\lambda(-p^2)R^\epsilon(p^2)\,, \tag{4.19}$$

$$R^\epsilon(\xi)=\exp\{-\epsilon(\xi+i)^{1/2+\nu}e^{-i\pi\sigma}\}\,, \tag{4.20}$$

где $0<\nu<\sigma<1/2$. Для регуляризующей функции $R^\epsilon(\xi)$ при больших $|\xi|$ справедлива оценка

$$|R^\epsilon(\xi)|=\exp\{-\epsilon|\xi|^{1/2+\nu}\operatorname{Cos}(\pi\sigma-(1/2+\nu)\arg\xi)\}\,. \tag{4.21}$$

Иными словами, $R^\epsilon(\xi)$ аналитична и убывает быстрее линейной экспоненты по $|\xi|^{1/2}$ в верхней полуплоскости комплексной переменной ξ. Интеграл (4.19) хорошо сходится при $\epsilon>0$ и определяет некоторую функцию $A^\epsilon_\lambda(x-y)$.

Рассмотрим теперь произведение

$$C^\epsilon_\lambda(x-y)=-i\,A^{(1)\epsilon}_\lambda(x-y)A^{(2)\epsilon}_\lambda(x-y) \tag{4.22}$$

и покажем, что существует предел при $\epsilon\to 0$ функционала (C^ϵ_λ,f), где f принадлежит пространству основных функций D. Проведем некоторые простые преобразования

$$(C^\epsilon_\lambda,f)=\int d^4y\,C^\epsilon_\lambda(x-y)f(y)= \tag{4.23}$$

$$=-i\int d^4y\, A_\lambda^{(1)\epsilon}(x-y)\, A_\lambda^{(2)\epsilon}(x-y)\, f(y)=$$

$$=-i\int d^4p\, \ell^{ipx}\, \tilde f(p)\int d^4q\, A_\lambda^{(1)\epsilon}(q^2)\, A_\lambda^{(2)\epsilon}((p-q)^2),$$

где

$$A_\lambda^\epsilon(q^2)=A_\lambda(-q^2)\, R^\epsilon(q^2).$$

Поскольку функция $f(y)\in D$, то ее фурье-образ $\tilde f(p)$ убывает вдоль вещественной оси p быстрее линейной экспоненты. В последнем интеграле по d^4q можно перейти к евклидовой метрике, повернув контур интегрирования на угол $\frac{\pi}{2}$ по q_0 или на угол $-\frac{\pi}{2}$ по $q_j\,(j=1,2,3)$ в зависимости от того, к какому типу, (А) или (Б), принадлежат операторы $A_\lambda^{(1)}(\Box)$ и $A_\lambda^{(2)}(\Box)$. Возможность поворота обеспечивается свойством (4.20) и (4.21) регуляризующей функции R^ϵ. Для определенности будем считать, что $A_\lambda^{(1)}(\Box)$ и $A_\lambda^{(2)}(\Box)$ принадлежат к типу (А). Тогда после поворота контура интегрирования по q_0 на $\frac{\pi}{2}$ получим:

$$(C_\lambda^\epsilon, f)=\int d^4p\, e^{ipx}\, \tilde f(p)\, C_\lambda^\epsilon(p^2), \tag{4.24}$$

$$C_\lambda^\epsilon(p^2)=\int d^4q_E\, A_\lambda^{(1)\epsilon}(-q_E^2)\, A_\lambda^{(2)\epsilon}(-(q_E-ip)^2), \tag{4.25}$$

где q_E - евклидов вектор $(q_E^2=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)$. Подставляя в (4.25) определение функций $A_\lambda^\epsilon(-q_E^2)$ по (4.2а), получим:

$$C_\lambda^\epsilon(p^2)=\int d^4q_E\int\limits_{\rho_1^2<\lambda^2} d^4\rho_1\, a_1(\rho_1^2)\,\ell^{iq_E\rho_1}\int\limits_{\rho_2^2<\lambda^2} d^4\rho_2\, a_2(\rho_2^2)\,\ell^{i(q_E-ip)\rho_2}\times$$
$$\times R^\epsilon(-q_E^2)\, R^\epsilon(-(q_E-ip)^2). \tag{4.26}$$

Легко видеть, что здесь уже можно перейти к пределу $\epsilon\to 0$, поскольку подинтегральное выражение в (4.25) интегрируемо, а интеграл (4.24) будет сходиться, так как $\tilde f(p)$ достаточно быстро убывает. Имеем:

$$C_\lambda(-p^2)=\lim_{\epsilon\to 0} C_\lambda^\epsilon(p^2)=\int d^4q_E\int\limits_{\rho_1^2<\lambda^2} d^4\rho_1\, a_1(\rho_1^2)\,\ell^{iq_E\rho_1}\times$$
$$\times\int\limits_{\rho_2^2<\lambda^2} d^4\rho_2\, a_2(\rho_2^2)\,\ell^{i(q_E-ip)\rho_2}=(2\pi)^4\int\limits_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho\, a_1(\rho^2)\, a_2(\rho^2)\,\ell^{p_0\rho_0+i\vec p\vec\rho}. \tag{4.27}$$

Окончательно:

$$(C_\lambda, f)=\lim_{\epsilon\to 0}(C_\lambda^\epsilon, f)=\int d^4y\, C_\lambda(x-y)\, f(y), \tag{4.28}$$

где

$$C_\lambda(x-y)=C_\lambda(\Box)\delta(x-y),$$

$$C_\lambda(\Box)=\int\limits_{\rho^2<\lambda^2} d^4\rho c(\rho^2)\exp\{i\rho_0\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\}, \quad (4.29)$$

$$c(\rho^2)=a_1(\rho^2)a_2(\rho^2).$$

Аналогичные формулы получаются, если обе обобщенные функции, $A_\lambda^{(1)}$ и $A_\lambda^{(2)}$, принадлежат к типу (Б). Если же $A_\lambda^{(1)}$ и $A_\lambda^{(2)}$ принадлежат к различным типам, то их произведение уже нельзя определить, так как никаким поворотом контура в интеграле (4.25) нельзя сделать подинтегральное выражение убывающим в пределе $\epsilon\to 0$.

5. Ряд теории возмущений для S -матрицы

Как уже говорилось во втором параграфе, ряд теории возмущений для S -матрицы (2.4) строится согласно обычной диаграммой технике Фейнмана, только вместо обычной причинной функции используется функция (2.5). В x -пространстве матричный элемент какого-либо процесса в n -ом приближении теории возмущений будет представляться суммой выражений вида:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i,j} D_c(x_i-x_j), \quad (5.1)$$

где i и j пробегают целочисленные значения от 1 до n соответственно конкретному выбору диаграммы Фейнмана. Амплитуда $F(x_1,\ldots,x_n)$ в (5.1) является обобщенной функцией из класса D', поскольку

$$D_c(x)=\Delta_c(x)+K\ell(x), \quad (5.2)$$

$$K\ell(x)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\frac{d^4p\, e^{ipx}}{p^2-m^2+i\epsilon}\{[A_\lambda(-p^2)]^2-1\}= \quad (5.3)$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, K\ell(-p^2)e^{ipx}=iK\ell(\Box)\delta(x),$$

где $\ell=2\lambda$, а оператор $K_\ell(\Box)$ принадлежит к тому же типу, что и оператор $A_\lambda(\Box)$. Мы считаем, что оператор $A_\lambda(\Box)$ нормирован следующим образом:

$$A_\lambda(-m^2)=1. \tag{5.4}$$

Амплитуда $F(x_1,\ldots,x_n)$ является интегрируемой на классе основных функций D.

Построение фурье-образа амплитуды $F(x_1,\ldots,x_n)$ в (5.1) удобно провести с помощью несобственного предельного перехода. Вместо причинной функции $D_c(x)$ введем регуляризованную функцию:

$$\operatorname{reg} D_c(x_1-x_2)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\frac{d^4p\, e^{ipx}}{p^2-m^2+i\epsilon}[A_\lambda(-p^2)]^2 R^\epsilon(p^2), \tag{5.5}$$

где $R^\epsilon(p^2)$ выбирается, как и в (4.20). Легко показать, что

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int d^4x\cdot \operatorname{reg} D_c(x)\, f(x)=\int dx\, D_c(x) f(x) \tag{5.6}$$

где $f(x)\in D$.

Итак, вместо $F(x_1,\ldots,x_n)$ в (5,1) рассмотрим регуляризованное выражение:

$$F^\epsilon(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i,j}\operatorname{reg} D_c(x_i-x_j). \tag{5.7}$$

Запишем фурье-образ этой функции

$$F^\epsilon(p_1,\ldots,p_n)=\int d^4x_1\, e^{i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)}F^\epsilon(x_1,\ldots,x_n). \tag{5.8}$$

Переходя к импульсному представлению, получим интеграл вида:

$$F^\epsilon(p_1,\ldots,p_n)=(2\pi)^4\delta(p_1+\ldots+p_n)\,\tilde F^\epsilon(p_1,\ldots,p_n), \tag{5.9}$$

$$\tilde F^\epsilon(p_1,\ldots,p_n)=\int\ldots\int\prod_i d^4\ell_i\prod_j\frac{[A_\lambda(-k_j^2)]^2}{k_j^2-m^2+i\epsilon}R^\epsilon(k_j^2). \tag{5.10}$$

Здесь k_j – 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме, ℓ_i – 4-импульсы, по которым проводится интегрирование. Интеграл (5.10) сходится при $\epsilon>0$.

Аналитические свойства $R^\epsilon(k^2)$ таковы, что в интегралах (5.16) при $\epsilon>0$ можно повернуть контур интегрирования по временной компоненте p_0 на угол $\frac{\pi}{2}$

или по пространственным компонентам p_1, p_2, p_3 — на угол $-\frac{\pi}{2}$. Однако если мы хотим получить конечный предел при $\epsilon\to 0$, то какой поворот нам надо делать, зависит от того, к какому типу, (А) или (Б), принадлежит функция $A_\lambda(-k^2)$. Если $A_\lambda(-k^2)$ принадлежит к типу (А), т.е. $A_\lambda(-k^2)\to 0$ при $k^2\to-\infty$, то необходимо сделать поворот по временной компоненте p_0, а в случае (Б), т.е. когда $A_\lambda(-k^2)\to 0$, при $k^2\to+\infty$, — по пространственным компонентам.

Пусть $A_\lambda(-k^2)$ принадлежит типу (А). Тогда в (5.10) можно повернуть контур по $(\ell_j)_0$ и затем перейти к пределу $\epsilon=0$. Получим интеграл по евклидовым четырехмерным импульсам $(\ell_j)_E$. Внешние импульсы псевдоевклидовы. Если $[A(-k^2)]^2=O(\frac{1}{k^2})$ при $k^2\to-\infty$, то сходятся интегралы, соответствующие любым диаграммам Фейнмана. Аналогично получаются выражения для амплитуды в случае, когда функция $A_\lambda(-k^2)$ принадлежит типу (Б).

Итак, амплитуда $F(p_1,\dots,p_n)$ определяется сходящимся интегралом и зависит от скалярных произведений псевдоевклидовых внешних импульсов $p_1,\dots,p_n$. Если мы теперь введем n евклидовых импульсов $q_1,\dots,q_n$ и воспользуемся тем обстоятельством, что всевозможные скалярные произведения n псевдоевклидовых и n евклидовых импульсов задаются одним и тем же числом инвариантных переменных, а также вспомним, что амплитуда $F(p_1,\dots,p_n)$ является аналитической функцией своих инвариантных переменных, то можно считать, что амплитуда $F(p_1,\dots,p_n)$ в (5.10) зависит от n евклидовых векторов $q_1,\dots,q_n$, а не n псевдоевклидовых. Полученное выражение будет совпадать с истинной амплитудой в евклидовой области пространственно-подобных или времени-подобных внешних импульсов. В силу единственности аналитического продолжения можно получить истинную амплитуду F во всей области изменения инвариантных переменных путем аналитического продолжения.

Следует заметить, что описанная процедура полностью эквивалентна обычному методу при рассмотрении диаграмм Фейнмана теории возмущений. Если положить $A_\lambda(\Box)=1$, то получим обычные выражения для амплитуд скалярной теории.

Итак, мы получили ряд теории возмущений, свободный от ультрафиолетовых расходимостей. Приступим к проверке унитарности и причинности полученного ряда.

6. Унитарность S -матрицы

Покажем, что построенная нами S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений на массовой оболочке, т.е. выполнено равенство

$$\langle\alpha|SS^+|\beta\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle, \tag{6.1}$$

где $|\alpha>$ и $|\beta>$ – произвольные физические состояния. Мы предполагаем, как обычно, что существует система амплитуд $|n,\vec{k}>$, которая вместе с амплитудой вакуума $|0>$ является замкнутой, так что для произвольных операторов A и B

$$<\alpha|AB|\beta>=<\alpha|A|0><0|B|\beta>+\sum_n\int d\vec{k}<\alpha|A|n,\vec{k}><n,\vec{k}|B|\beta> \tag{6.2}$$

и притом такая, что в состоянии $|n,\vec{k}>$ имеется определенный импульс $\vec{k}$ и энергия $E_n(\vec{k})$. В качестве такой системы выбираем систему состояний

$$|n,\vec{k}>=a^+_{\vec{k}_1}\ldots a^+_{\vec{k}_n}|0>,\quad (\vec{k}_1+\ldots+\vec{k}_n=\vec{k}), \tag{6.3}$$

поскольку мы работаем в теории возмущений. Предполагается, что состояния $|\alpha>$ и $|\beta>$ в (6.1) могут быть разложены по системе (6.3).

Для доказательства унитарности в форме (6.1) достаточно доказать правило Куткосского/6/ для нормальных порогов в произвольных диаграммах Фейнмана. Это свойство было доказано автором/7/. Таким образом, построенная нами S -матрица унитарна.

Заметим, что условие унитарности (6.1) останется справедливым, если в лагранжиан взаимодействия ввести скалярное внешнее поле $a(x)$, например, следующим образом:

$$L_I(x)=g(\Phi^4(x)+\phi^2(x)a(x)). \tag{6.4}$$

Унитарность в форме (6.1) для взаимодействия (6.4) легко доказывается в каждом порядке теории возмущений, если воспользоваться результатами работы/7/.

7. Причинность S -матрицы

Для проверки причинности нашей S -матрицы, которая является функционалом от оператора $\Phi(x)$, рассмотрим выражение

$$C(x,y)=\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\Phi(y)}S^{-1}\right). \tag{7.1}$$

В случае локального взаимодействия, когда теория микропричинна, оператор $C(x,y)$, как известно/3/, равен нулю при $x\lesssim y$. Посмотрим, чему равен оператор $C(x,y)$ в (7.1) в рассматриваемом нами случае.

Прежде всего покажем, что операторы $\Phi(x)$ в (2.2) удовлетворяют локальным перестановочным соотношениям

$$[\Phi(x_1),\Phi(x_2)]=[\phi(x_1),\phi(x_2)]=\Delta(x_1-x_2), \tag{7.2}$$

где $\Delta(x_1-x_2)$ - обычный коммутатор скалярного поля. Для этого вновь воспользуемся несобственным предельным переходом, т.е. вместо поля $\Phi(x)$ рассмотрим поле $\Phi_\epsilon(x)$, определенное согласно соотношению

$$\Phi_\epsilon(x)=\int d\ y A_\lambda^\epsilon(x-y)\phi(y)\ , \tag{7.3}$$

где $A_\lambda^\epsilon(x-y)$ берется согласно (4.19). Тогда коммутатор (7.2) вычисляется следующим образом:

$$[\Phi(x_1),\Phi(x_2)]_-=\lim_{\epsilon\to 0}[\Phi_\epsilon(x_1),\Phi_\epsilon(x_2)]_- =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int d\ y_1\int d\ y_2 A_\lambda^\epsilon(x_1-y_1)A_\lambda^\epsilon(x_2-y_2)[\phi(y_1),\phi(y_2)]_- = \tag{7.4}$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}[A_\lambda(-m^2)R^\epsilon(m^2)]^2\cdot\Delta(x_1-x_2)=\Delta(x_1-x_2)\ .$$

То же самое можно сказать и о $D^{(\pm)}$ -функциях

$$D^{(\pm)}(x_1-x_2)=\Delta^{(\pm)}(x_1-x_2)\ , \tag{7.5}$$

где через $\Delta^{(\pm)}$ обозначены соответствующие функции скалярного поля.

Рассмотрим теперь выражение (7.1) . Наша S -матрица (2.4) является функционалом только от оператора поля $\Phi(x)$. При разложении в ряд по константе связи g мы получаем ряд вида:

$$S=\sum_n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\ldots\int d^4x_n S_n(x_1,\ldots,x_n):\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n):\ ,$$

где коэффициентные функции $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ построены из причинной функции (2.5), которая равна сумме обычной причинной функции скалярного поля и обобщенной функции $K_\ell(x_1-x_2)$ (см. (5.2)). Подставим ряд (7.5) в (7.1) и перейдем вновь к N -произведению. При этом возникнут $D^{(-)}$ -функции операторов поля $\Phi(x)$. Но согласно (7.5) $D^{(-)}$ -функция точно равна $\Delta^{(-)}$ -функции обычного скалярного поля $\phi(x)$. Поэтому если не принимать во внимание обобщенные функции $K_\ell(x_1-x_2)$, мы получим обычное условие микропричинности локального скалярного поля, т.е. оператор $C(x,y)$ в (7.1) равен нулю при $x\lesssim y$. Но при наличии обобщенных функций $K_\ell(x_1-x_2)$ в (5.2) соотношение (7.1) в области $x\lesssim y$ будет пропорционально во втором порядке теории возмущений функции $K_\ell(x-y)$, а в n -ом порядке теории возмущений обобщенной функции вида:

$$\int dt_1 \ldots \int dt_{n-2} K_\ell(x-t_1) K_\ell(t_1-t_2) \ldots K_\ell(t_{n-2}-y) = Q_{(n-1)\ell}(x-y) . \qquad (7.6)$$

Здесь $Q_{(n-1)\ell}$ –обобщенная функция исследуемого нами типа с величиной "элементарной" длины $\ell_1=(n-1)\ell$ Следовательно, в n –ом порядке теории возмущений оператор $C(x,y)$ равен нулю вне областей G и $G_{(n-1)\ell}$, где

$$G: \; x_0 \geq y_0 , \; (x-y)^2 \geq 0 , \qquad (7.7)$$

$$G_{(n-1)\ell}: \; -(n-1)^2 \ell^2 \leq (x-y)^2 \leq (n-1)^2 \ell^2 . \qquad (7.8)$$

Как было показано в параграфе 4, построенная нами S –матрица допускает распространение акаузального сигнала в некоторой ограниченной области, которая целиком лежит внутри области $G_{(n-1)\ell}$ и форма которой зависит от формы импульса исследуемого поля или формы волновых пакетов падающих частиц.

Таким образом, строго говоря, для полного ряда теории возмущений оператор $C(x,y)$ в (7.1) отличен от нуля всюду. Это означает, что полученная нами S –матрица не удовлетворяет условию причинности. Однако, как говорилось в первом параграфе, в случае взаимодействий с малой константой связи нарушение причинности на больших расстояниях будет достаточно малым.

8. Заключение

Нам кажется, что преимущество развитой выше схемы состоит в следующем: во-первых, весь произвол в выборе формы обрезания и величины "элементарной" длины удалось заключить в лагранжиан взаимодействия; во-вторых, амплитуды физических процессов не имеют дополнительных особенностей в конечной области изменения инвариантных импульсных переменных по сравнению с локальной теорией.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Д.И. Блохинцеву, академику Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, докторам физ.мат.наук Б.В. Медведеву и И.Т. Тодорову за обсуждения.

Литература

1. G. Wataghin. Zs f. Phys., 88, 92 (1934).

2. Д.А. Киржниц. УФН, 89, 39 (1966).

3. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.

4. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, Москва, 1951.

5. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47 , 1966 (1964).

6. R. E. Cutkosky . J. Math Phys. I, 429 (1960).

7. Г.В. Ефимов. ЯФ, 4, 432 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1966 г.