ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2869

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.А. Хелашвили

ОБ УСЛОВИИ ПОЛНОТЫ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

1966

P - 2869

А.А. Хелашвили

ОБ УСЛОВИИ ПОЛНОТЫ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

1. В недавней работе [1] было исследовано условие полноты волновых функций $\{\psi_k^{\pm}(\bar{r})\}$ в рамках нерелятивистской теории потенциального рассеяния двух частиц. Автору удалось показать, что условие ортогональности волновых функций ведет к условию унитарности амплитуды рассеяния, а условие полноты накладывает на амплитуду рассеяния ограничение, которое можно понимать как выражение некоторых аналитических свойств амплитуды рассеяния, т.е. дисперсионные соотношения. Однако для доказательства автор использовал асимптотический вид волновых функций, справедливый только на больших расстояниях, в то время как в условии ортогональности происходит интегрирование во всем пространстве. Поэтому представляет интерес проверить справедливость полученных результатов, пользуясь точным видом волновых функций. Ниже мы проведем точное рассмотрение для парциальных волн и покажем, что полученные в работе [1] результаты остаются в силе.

Мы будем следовать обозначениям, используемым в книге Гольдбергера и Ватсона [2]. Для парциальных амплитуд имеем следующее условие унитарности:

$$i(T_\ell(k) - T_\ell^*(k)) = 2\pi\rho_\epsilon T_\ell(k) T_\ell^*(k) \quad , \tag{1}$$

где

$$\rho_\epsilon = \frac{k^2}{d\epsilon / dk} \quad , \tag{2}$$

а амплитуда $T_\ell(k)$ связана с матрицей $S_\ell(k)$ следующим образом:

$$S_\ell(k) = 1 - 2\pi i \rho_\epsilon T_\ell(k) \quad .$$

Нетрудно видеть, что из (1) получается для $S_\ell(k)$ условие унитарности

$$S_\ell(k) S_\ell^*(k) = 1 \quad .$$

2. Рассмотрим теперь условие ортогональности для радиальных волновых функций:

$$\int_0^\infty r^2\, dr\, [\Psi^+_{k',\ell}(r)]^* [\Psi^+_{k,\ell}(r)] = \frac{1}{k^2}\,\delta(k'-k) \quad . \tag{3}$$

Как хорошо известно (см., например, /2/), радиальные волновые функции связаны с амплитудой рассеяния следующим образом:

$$\Psi^+_{k,\ell}(r) = i^\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\, j_\ell(kr) + \int_0^\infty \frac{q^2\, dq\, j_\ell(qr)\, T_\ell(q,k)}{\epsilon(k) + i\eta - \epsilon(q)}\,] \quad , \tag{4}$$

где $T_\ell(q,k)$ на энергетической поверхности $q=k$ совпадает с физической амплитудой рассеяния

$$T_\ell(k,k) = T_\ell(k) \quad . \tag{5}$$

Подставим теперь выражение (4) в соотношение (3) и проведем интеграцию по r, пользуясь свойством сферических функций Бесселя

$$\int_0^\infty r^2\, dr\, j_\ell(pr)\, j_\ell(qr) = \frac{\pi}{2pq}\,\delta(p-q) \quad .$$

Имеем

$$\frac{1}{k^2}\,\delta(k'-k) = \frac{1}{k'k}\,\delta(k'-k) + \frac{T^*_\ell(k,k')}{\epsilon(k') - i\eta - \epsilon(k)} + \frac{T_\ell(k',k)}{\epsilon(k) + i\eta - \epsilon(k')} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{q^2\, dq\, T^*_\ell(q,k')\, T_\ell(q,k)}{[\epsilon(k') - i\eta - \epsilon(q)]\,[\epsilon(k) + i\eta - \epsilon(q)]} \quad . \tag{6}$$

Преобразуем теперь последний член:

$$\int_0^\infty \frac{q^2\, dq\, T^*_\ell(q,k')\, T_\ell(q,k)}{[\epsilon(k') - i\eta - \epsilon(q)]\,[\epsilon(k) + i\eta - \epsilon(q)]} = \int_0^\infty \frac{q^2\, dq\, T^*_\ell(q,k')\, T_\ell(q,k)}{\epsilon(k) + 2i\eta - \epsilon(k')} \quad \times$$

$$\times \{ \frac{P}{\epsilon(k') - \epsilon(q)} - \frac{P}{\epsilon(k) - \epsilon(q)} + \pi i\,\delta(\epsilon(k') - \epsilon(q)) + \pi i\,\delta(\epsilon(k) - \epsilon(q)) \} \quad .$$

Используя это в (6) и переходя к пределу $k' \to k$, получаем соотношение:

$$T_\ell(k,k) - T^*_\ell(k,k) = -2\pi i \int_0^\infty q^2 dq\, T^*_\ell(q,k)\, T_\ell(q,k)\, \delta(\epsilon(k) - \epsilon(q)) =$$

$$= -2\pi i \int_0^\infty \frac{q^2}{d\epsilon / dq}\, d\epsilon(q)\, T^*_\ell(q,k)\, T_\ell(q,k)\, \delta(\epsilon(k) - \epsilon(q)) =$$

$$= -2\pi i \frac{k^2}{d\epsilon / dk}\, T^*_\ell(k,k)\, T_\ell(k,k) \quad .$$

Вспоминая (2) и (5), получаем

$$i(T_\ell(k) - T^*_\ell(k)) = 2\pi\rho_\epsilon\, T_\ell(k)\, T^*_\ell(k) \quad ,$$

что является условием унитарности (1). Это условие получено нами уже точно.

Полученный результат можно понимать очень просто, если вспомнить, что обычно условие унитарности S -матрицы следует из инвариантности нормы векторов состояний. Условие ортогональности (3) равносильно такому требованию, поскольку для волновых функций рассеяния и свободных волновых функций мы имеем одинаковое условие ортогональности.

Аналогично можно рассмотреть условие унитарности для полной амплитуды рассеяния. При этом удобно пользоваться импульсным представлением. Нетрудно убедиться, что условие ортогональности волновых функций ведет к условию унитарной полной амплитуды рассеяния. Проиллюстрируем это на примере квазипотенциальной амплитуды /3/, исходя из следующего определения волновых функций /4/:

$$\Phi_{\vec{k}}(\vec{p}) = \delta(\vec{k} - \vec{p}) + \frac{T(\vec{p},\vec{k})}{\sqrt{p^2 + m^2}\,(k^2 - p^2 + i0)} \quad . \tag{7}$$

Эти волновые функции ортогональны /4/

$$\int \Phi^*_{\vec{k}}(\vec{p})\, \Phi_{\vec{k}'}(\vec{p})\, d\vec{p} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad . \tag{8}$$

Подставляя (7) в условие (8) и переходя к пределу $k' = k$, получаем

$$\mathrm{Im}\,T_k(\hat{\vec{k}},\hat{\vec{k}}')=\frac{\pi}{2}\frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}}\int d\Omega_{\vec{p}}\,T^*_k(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{k}})\,T_k(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{k}}') \quad . \tag{9}$$

Это есть условие унитарности квазипотенциальной амплитуды [4]. Заметим, что, опуская в соотношении (9) кинематический корень, получаем условие унитарности нерелятивистской амплитуды рассеяния на энергетической поверхности.

3. Рассмотрим теперь следствие условия полноты:

$$\int_0^\infty [\Psi^+_{k,\ell}(r')]^*[\Psi^+_{k,\ell}(r)]k^2\,dk=\frac{1}{r^2}\delta(r'-r)+P_B \quad , \tag{10}$$

где P_B означает проекцию на связанные состояния двух частиц. Используем в этом выражении формулу (4) и возьмем $r'=r$, получим соотношение

$$P_B\big|_{r'=r}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2\,dk\,j_\ell(kr)\int_0^\infty\frac{q^2\,dq\,j_\ell(qr)\,T^*_\ell(q,k)}{\epsilon(k)-i\eta-\epsilon(q)}\;+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2\,dk\,j_\ell(kr)\int_0^\infty\frac{q^2\,dq\,j_\ell(qr)\,T_\ell(q,k)}{\epsilon(k)+i\eta-\epsilon(q)}\;+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k\;\;dk\int_0^\infty\frac{q^2\,dq\,j_\ell(qr)\,T^*_\ell(q,k)}{\epsilon(k)-i\eta-\epsilon(q)}\cdot\int_0^\infty\frac{p^2\,dp\,j_\ell(pr)\,T_\ell(p,k)}{\epsilon(k)+i\eta-\epsilon(q)} \quad . \tag{11}$$

Теперь интегрировать по импульсам удается только при больших r, но здесь это допустимо, поскольку по r нет интеграции. Для $r\to\infty$ можем использовать формулу (65) из книги [2] (стр. 235):

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty\frac{q^2\,dq\,j_\ell(qr)\,T_\ell(q,k)}{\epsilon(k)+i\eta-\epsilon(q)}=-\pi\rho_\epsilon\,\frac{e^{ikr}}{kr}\cdot e^{-i\frac{\ell\pi}{2}}\,T_\ell(k) \quad ,$$

где $T_\ell(k)$ – уже физическая амплитуда рассеяния. Ясно, что

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty\frac{q^2\,dq\,j_\ell(qr)\,T^*_\ell(q,k)}{\epsilon(k)-i\eta-\epsilon(q)}=-\pi\rho_\epsilon\,\frac{e^{-ikr}}{kr}\,e^{-i\frac{\ell\pi}{2}}\,T^*_\ell(k) \quad .$$

Тогда формула (11) примет вид:

$$P_B\big|_{r'=r\to\infty} = \frac{1}{r^2}\int_0^\infty dk\rho_\epsilon\,[-i(T_\ell(k)-T^*_\ell(k))+2\pi\rho_\epsilon T_\ell(k)T^*_\ell(k)]-$$

$$-\frac{i(-1)^\ell}{r^2}\int_0^\infty dk\rho_\epsilon\,[e^{-2ikr}\,T^*_\ell(k)-e^{2ikr}\,T_\ell(k)]\quad. \tag{12}$$

Согласно только что доказаноому условию унитарности (1), первый член в этом выражении исчезает. Используя свойство

$$T^*_\ell(-k)=T_\ell(k)\quad,$$

которое следует из симметрии уравнения Шредингера, выражение (12) можно привести к виду

$$P_B\big|_{r'=r\to\infty} = \frac{i(-1)^\ell}{r^2}\int_0^\infty dk\rho_\epsilon\,e^{2ikr}\,T_\ell(k)\quad. \tag{13}$$

Это и есть искомое выражение, из которого при отсутствии связанных состояний получается соотношение (25) работы /1/. Соотношение (13) выражает некоторые аналитические свойства амплитуды рассеяния $T_\ell(k)$. Из него, как указано в работе /1/, можно получить дисперсионное соотношение для $S_\ell(k)$ матрицы при любых значениях орбитального момента ℓ.

В заключение отметим, что такой результат в некоторой мере не является неожиданным, поскольку, если проследить за доказательством дисперсионных соотношений в теории поля, то видно, что основную роль в изучении аналитических свойств амплитуды рассеяния играют причинность и спектральность /5/ (или полнота* набора асимптотических состояний). С другой стороны, в нерелятивистской теории рассеяния доказываются дисперсионные соотношения без какого-нибудь явного привлечения условия причинности. Поэтому можно ожидать, что в нерелятивистской теории рассеяния условие полноты набора собственных функций гамильтониана плюс асимптотическое условие окажется достаточным для изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить проф. А.Н. Тавхелидзе за ценные обсуждения.

Литература

1. I. Saavedra. Preprint, IC/66/29, Trieste, 1966.
2. M. Goldberger, K. Watson. Collision Theory, New. York, 1964.
3. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidse. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
4. А.Т. Филиппов. Международная зимняя школа при Объединенном институте ядерных исследований, Дубна, 1966.
5. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1966 г.