ЖЭТФ, 1967, т.52, N3, с.903-905

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2856

В.И.Журавлёв, Л.Д.Соловьёв

ИНФРАКРАСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАЛИБРОВКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P - 2856

В.И.Журавлёв, Л.Д.Соловьёв[x/]

ИНФРАКРАСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАЛИБРОВКЕ

Направлено в ЖЭТФ

x/ Институт физики высоких энергий (Серпухов)

Ранее[1] для функции Грина заряженной частицы в фейнмановской калибровке был найден явный вид членов, сингулярных в инфракрасной области. Поскольку эти формулы являются точными (не связаны с разложениями по теории возмущений), то желательно получить их в возможно более общем виде, т.е. для произвольной калибровки электромагнитных потенциалов. Рассмотрим калибровку, в которой свободная функция распространения фотона имеет вид

$$\frac{1}{k^2-\lambda^2}\left(g_{mn}-\frac{d(k^2)-1}{k^2-\lambda^2}k_m k_n\right), \tag{1}$$

где λ – малая фотонная масса, которую следует стремить к нулю ранее всех физических переменных. Эта функция соответствует потенциалу $A_n^F(x)+\partial_n\Lambda(x)$ (A_n^F отвечает фейнмановской калибровке), где в случае $d(0)\neq 1$ $\Lambda(x)$ не удовлетворяет свободному уравнению[2]. В этом случае мы фактически должны иметь дело со скалярными фотонами, для которых $k^2\neq 0$. Это значит, что при разложении по полной системе асимптотических состояний необходимо выйти за массовую поверхность $k^2=0$. Способ этого выхода нетрудно установить из рассмотрения диаграмм с функцией распространения (1). Чтобы найти скачок такой диаграммы на разрезе, нужно сделать замену

$$\frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2}\to-2\pi i\delta'(k^2-\lambda^2). \tag{2}$$

Таким образом, переход от фейнмановской калибровки к калибровке (1) соответствует следующей замене векторов поляризации и фазовых объёмов фотонов[3]:

$$\begin{gathered}\epsilon\to\tilde{\epsilon}=\epsilon+(\sqrt{d}-1)\frac{\epsilon k}{k^2-\lambda^2}k, \\ \int d^4k\,\frac{\delta(k^2-\lambda^2)}{k^2-\lambda^2}\to-\int d^4k\,\delta'(k^2-\lambda^2).\end{gathered} \tag{3}$$

После этого замечания найдём особенности функций Грина в инфракрасной области. Для скалярной частицы (частица со спином 1/2 обсуждается в конце) имеем

$$G(p^2)=\int_{m^2}^{(m+\delta)^2}\frac{g(r^2)\,dr^2}{r^2-p^2-i0}\quad, \tag{4}$$

$$g(p^2)=(2\pi)^3\sum_N \delta(p-p_N)\langle 0|\Phi|N\rangle\langle N|\Phi^+|0\rangle\quad, \tag{5}$$

где δ сколь угодно мало и в (4) опущен член, который равен константе при $p^2=m^2$. В дальнейшем мы будем опускать все выражения, которые приводят к таким членам в функции Грина. Можно показать /1/, что при этом

$$\langle 0|\Phi|N\rangle=\langle 0|\Phi|r,k_1\ldots k_n\rangle=\prod_{i=1}^{n} e\,\frac{(2r+k_i)\,\tilde{\epsilon}_i}{2rk_i+k_i^2}\,Z\quad, \tag{6}$$

где r – импульс заряженной частицы, k_i – импульсы мягких фотонов и $Z=\langle 0|\Phi|r\rangle$. Подставляя (6) в (5) и суммируя по всем фотонам, получаем

$$g(p^2)=\frac{Z^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\int\frac{d\vec r}{2r^0}\,e^{-i(p-r)x+F}\quad, \tag{7}$$

где

$$F=-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(k^0)\delta(k^2-\lambda^2)\Big[\frac{(2r+k)^2}{(2rk+k^2)^2}+\frac{d(k^2)-1}{k^2-\lambda^2}\Big]e^{ikx}=$$

$$=-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec k}{2k^0}\Big[\frac{m^2}{(rk)^2}+\frac{1}{rk}+\frac{d(0)-1}{2}\,\frac{\partial}{\partial k^0}\,\frac{1}{k^0}\Big]e^{ikx}\quad. \tag{8}$$

Здесь мы предположили, что $d'(0)<\infty$. Вычисляя интегралы (7), получаем обобщённую функцию от $x=p^2m^{-2}-1$:

$$g(p^2)=\frac{Z^2}{m^2}\Big(\frac{m}{\lambda}\Big)^{\beta}e^{(\alpha/\pi-C\beta)}\,\frac{x_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\Big[1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{4}\Big)x\Big]\quad, \tag{9}$$

где α – постоянная тонкой структуры, C – постоянная Эйлера, Γ–Г – функция и

$$\beta = \frac{\alpha}{2\pi}(d(0)-3), \tag{10}$$

Подставляя (9) в спектральное представление (4), получаем инфракрасную асимптотику функции Грина:

$$G(p^2) = \frac{Z_1}{m^2}(-x)^{\beta-1}[1-(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{4})x] + \mathrm{const}, \tag{11}$$

$$Z_1 = Z^2(\frac{m}{\lambda})^{\beta} e^{\alpha/\pi - c\beta}\Gamma(1-\beta). \tag{12}$$

Это выражение отличается от соответствующего выражения в фейнмановской калибровке /1/ ($d=1$) заменой $-\alpha/\pi$ на β и добавлением множителя $\exp\{\frac{\alpha}{2\pi}(d(0)-1)\}$ в Z_1. Такая замена справедлива и для функции Грина частицы со спином 1/2.

В случае $d(0)=3$ функция Грина имеет полюс в инфракрасной области, однако вычет в этом полюсе при $Z=1$, вообще говоря, отличен от единицы и зависит от способа стремления λ к нулю во втором множителе в (1). Если $k^2-\lambda^2$ в этом множителе заменить на $k^2-a\lambda^2$, то $e^{\alpha/\pi}$ в (9) и (12) заменится на

$$\exp\{\frac{\alpha}{\pi}[1+\frac{d(0)-1}{4}(1-\frac{a\ln a}{a-1})\}. \tag{13}$$

Следовательно, при $d(0)=3$ вычет в полюсе равен единице, если $a\ln a = 3a-3$ ($a \approx 17$).

Один из авторов (Л.Д.С.) признателен М.Брауну за сообщение о том, что этот вопрос рассмотрен также в его работе, и В.В.Анисовичу за обсуждение.

Литература

1. Л.Д.Соловьев. ЖЭТФ, 48, 1740 (1965).
2. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов. ЖЭТФ, 40, 926 (1961).
3. В.Д.Мур, В.Д.Скаржинский. ЖЭТФ, 40, 1076 (1961)

Рукопись поступила в издательский
отдел 2 августа 1966 г.