

E-601

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2829



Г.А. Емельяненко, К.П. Ломов, Г.И. Макаренко,
В.И. Мороз, И.С. Саитов, А.П. Стельмах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ
В ТОРМОЗЯЩЕЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ,
ПОМЕЩЕННОЙ В НЕОДНОРОДНОЕ
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

P-2829

Г.А. Емельяненко, К.П. Ломов, Г.И. Макаренко,
В.И. Мороз, И.С. Саятов, А.П. Стельмах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ
В ТОРМОЗЯЩЕЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ,
ПОМЕЩЕННОЙ В НЕОДНОРОДНОЕ
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

4489/3 нр.

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Введение	3
II. Схема применения метода максимума правдоподобия к задаче определения параметров частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле	4
III. Явный вид уравнений связи, накладываемых измерениями на функцию правдоподобия	8
IV. Явный вид условия максимума функции правдоподобия	12
Приложение 1. Угол поворота трека частицы, останавливающейся в камере	13
Приложение 2. Вывод уравнений связи	15
Приложение 3. Условие применимости распределения Ферми в криволинейных координатах	21
Приложение 4. Сравнение информации об импульсе частицы за счет искривления ее траектории в магнитном поле с информацией об импульсе, получаемой при изучении многократного рассеяния	22
Приложение 5. Решение системы линейных уравнений, вычисление дисперсий и корреляций	24
Приложение 6. Определение начальных оценок импульса, кривизны и угла β	28
Приложение 7. Численная оценка дисперсий кривизны и угла β	33

I . В в е д е н и е

В работе рассматривается определение начального импульса и углов неизлучающей частицы, движущейся в тормозящей и рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле.

Траектория частицы считается заданной системой точек, которые предполагаются измеренными независимо друг от друга. Импульс и углы вычисляются из условия обращения в максимум функции правдоподобия, за независимые стохастические переменные принимаются измерительные ошибки и углы многократного рассеяния.

В работе показано, что действительную непрерывно рассеивающую среду можно заменить системой тонких рассеивающих слоев, расположенных между измеренными точками, если число измеренных точек достаточно велико.

Решение уравнений движения заряженной части в неоднородном магнитном поле с учетом ионизационных потерь получается путем интегрирования с крупным шагом.

В практически важных случаях водородной и пропановой пузырьковых камер условия максимума функции правдоподобия сводятся к системе линейных уравнений, для которой предлагается алгоритмическое решение.

При изучении событий методикой пузырьковых камер требуется, исходя из известных координат точек трека на фотографиях, определять импульс и углы частицы в начальной точке ее траектории (для краткости эти кинематические величины будем называть параметрами частицы).

Определение параметров частицы непосредственно по проекциям, как это делается в /1 и 2/ для следов, направленных вдоль стереобазы, требует на вычислительных машинах значительных затрат времени из-за нелинейности задачи. Поэтому часто решают задачу в два этапа. На первом этапе в пространстве камеры вычисляют координаты точек, лежащих на треке. На втором этапе подбирают к этим точкам аппроксимирующую кривую (обычно - винтовую линию), определяя ее параметры из условия минимума суммы квадратов расстояний между кривой и измеренными точками /2-5/.

В настоящей работе рассматривается определение параметров трека по заранее определенным пространственным координатам точек трека, которые мы предполагаем измеренными независимо друг от друга.

Если бы в камере не было многократного рассеяния и измерения производились бы без ошибок, то по измеренным точкам можно было бы однозначно определить параметры частицы. Траектория при этом однозначно определяется решением уравнения движения, учитывающего неоднородность магнитного поля и торможение среды.

Многократное рассеяние приводит к тому, что траектория частицы не может однозначно определяться ее параметрами и уравнением движения. Для одних и тех же начальных условий в этом случае существует бесконечно большая совокупность траекторий. Измерительные ошибки не меняют траектория, но они приводят к тому, что задача определения параметров частицы по измеренным точкам не имеет точного решения. В случае электрона, подробное определение параметров которого будет дано авторами отдельно, есть еще один стохастический процесс - излучение, который существенно увеличивает неоднозначность определения параметров частицы по точкам ее траектории.

Поэтому для реального случая измерения координат частицы, движущейся в рассеивающей среде, может ставиться только задача наилучшей оценки параметров частицы, которую и дает метод максимума правдоподобия^{/10/}.

Определение оценки параметров производится в два этапа.

На первом этапе определяем приближенные оценки начальных параметров частицы при учете торможения и неоднородного магнитного поля (см. Приложение 8). На втором этапе учитываем в дополнение к вышеуказанным факторам и многократное рассеяние.

В качестве начального приближения для второго этапа используем оценки, полученные на первом этапе.

II. Схема применения метода максимума правдоподобия к задаче

определения параметров частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле

Рассмотрим схему применения метода максимума правдоподобия к этой задаче.

Каждая измеренная координата на следе y_i ($i = 0, 1, \dots, N$) может быть представлена в виде^{x)}:

x) Будем для простоты исследовать практически важный случай проекции следа на плоскость XOY, считая магнитное поле направленным в основном по оси OZ, и систему координат, выбранную так, что у измеренных точек $x_0 = y_0 = y_N = 0$ (см. рис. 1). При этом можно считать на всей траектории $|\beta| \ll 1$ (см. Приложение 1).

$$y_i = y_i(P_0, \beta_0, T_0, \epsilon_1, \delta_1, \dots, \delta_i, \eta_1, \dots, \eta_i, a_1, \dots, a_i). \quad (1)$$

Здесь

- P_0 - импульс частицы в начальной (нулевой) точке траектории;
- β_0 - угол между осью OX и проекцией импульса частицы в начальной точке на плоскость XOY;
- T_0 - истинное значение y -ой координаты в начальной точке;
- ϵ_1 - измерительная ошибка в координате y_1 ;
- δ_i - проекция на плоскость XOY угла многократного рассеяния на интервале между точками $i-1$ и i (i -тый интервал);
- η_i - превышение смещения в многократном рассеянии на i -том интервале над средним при заданном δ_i ;
- a_i - текущий параметр (длина дуги проекции траектории на плоскость XOY).

Координата x не рассматривается, так как при условии $|\beta| \ll 1$ и равенстве (по порядку величины) дисперсий измерительных ошибок $(\Delta x)^2$ и $(\Delta y)^2$ ошибки в координате x почти не сказываются на точности определения параметров следа. Координата z могла быть учтена аналогично (1), но относительно слабая корреляция оценок ($P_0 \cdot \cos \alpha_0$) и угла β_0 с оценкой угла α_0 позволяет рассматривать эти задачи порознь^{x)}. В нашем случае оценка α_0 получается при аппроксимации развертки следа.

Из (1) следует, что мы имеем $(N+1)$ значений величины y_i , зависящих от $(3N+4)$ параметров ($P_0, \beta_0, T_0, \epsilon_0, \dots, \epsilon_N, \delta_1, \dots, \delta_N, \eta_1, \dots, \eta_N$). Вероятность встретить какое-либо значение величины ϵ, δ, η задается законом нормального распределения, тогда как для величин P_0, β_0, T_0 мы в настоящей работе считаем априори равновероятными любые значения. Поэтому функция правдоподобия запишется в виде

$$L = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i^2}{D_{\epsilon_i}} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}} + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{D_{\eta_i}} \right] \right\}. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

- D_{ϵ_i} - дисперсия ϵ_i ;
- D_{δ_i} - дисперсия δ_i ;
- D_{η_i} - дисперсия η_i .

x) Данное утверждение справедливо постольку, поскольку

$$\left| \frac{H_x}{H_z} \right| \ll 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{H_y}{H_z} \right| \ll 1.$$

Простой вид функции правдоподобия получен за счет того, что в качестве стохастических переменных выбраны взаимно независимые величины.

Назовем наиболее правдоподобной траекторией такую, для которой L обращается в максимум при соблюдении $N+1$ уравнения связи (1)^х.

Таким образом, задача отыскания наиболее правдоподобной траектории, а следовательно, и наилучших оценок ($P'_0, \beta'_0, T'_0, \epsilon', \eta', \delta'$) параметров ($P_0, \beta_0, T_0, \epsilon, \eta, \delta$) траектории сводится к задаче на условный экстремум функции правдоподобия L с условиями связи (1)^{хх}.

Учитывая, что уравнения (1) легко разрешаются относительно $T_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$, мы вместо (1) получаем систему (3)

$$\begin{aligned} T_0 &= T_0(y_1, y_0, \epsilon_0, P_0, \beta_0, \delta_1, \dots, \delta_N, \eta_1, \dots, \eta_N, s_1, \dots, s_N) = y_0 - \epsilon_0, \\ \epsilon_i &= \epsilon_i(y_1, y_0, \epsilon_0, P_0, \beta_0, \delta_1, \dots, \delta_N, \eta_1, \dots, \eta_N, s_1, \dots, s_N), \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), сводим задачу поиска условного экстремума функции L к поиску безусловного экстремума функции L_1 , где

$$L_1 = L(y_0, \dots, y_N, s_1, \dots, s_N; (P_0, \beta_0, \epsilon_0, \delta_1, \dots, \delta_N, \eta_1, \dots, \eta_N)). \quad (4)$$

Система уравнений, соответствующая условиям экстремума, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial L_1}{\partial P_0} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \beta_0} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \epsilon_0} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \eta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

х) Точнее говоря, мы определяем не саму траекторию, а только $N+1$ точку на ней, однако мы можем ввести между измеренными точками еще сколь угодно много точек, в которых мы будем предполагать многократное рассеяние. Такая процедура позволяет получить координаты наиболее правдоподобной траектории в любой точке.

хх) В дальнейшем, в тех случаях, когда это не может вызвать затруднений в понимании формул, штрих (') будет опускаться.

В достаточно общих предположениях (см. Приложение 2) уравнения (7,8,9) оказываются линейными относительно ϵ_0, δ, η . Выражая импульс P_0 через кривизну a_0 и вводя приближенные значения a^* и β_0^* и искомые малые поправки A и b

$$P_0 = P_0(a_0), \quad (10)$$

$$a_0 = a^* + A, \quad |A| \ll a_0, \quad (11)$$

$$\beta_0 = \beta_0^* + b, \quad |b| \ll 1, \quad (12)$$

получим вместо (5-9) систему линейных уравнений (13-16):

$$\frac{\partial L_1}{\partial A} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial b} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \epsilon_0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Уравнения (9) отброшены, так как их учет при $N \gg 1$ очень слабо повышает точность решения системы (5-9) по сравнению с (13-16) (см. (37-41)). Под L_1 подразумевается (4) с учетом (10-12).

Решение системы (13-16) в силу ее линейности может быть записано в виде линейных функций от y (см. Приложение 5):

$$A' = A'' + \sum_{i=1}^N A_i y_i, \quad (17)$$

$$b' = b'' + \sum_{i=1}^N b_i y_i, \quad (18)$$

$$\epsilon'_0 = \epsilon''_0 + \sum_{i=1}^N \epsilon_i y_i, \quad (19)$$

$$\delta'_i = \delta''_i + \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} y_j, \quad (20)$$

где $A'', b'', \epsilon'', \delta''_i$ - константы.

Из (17) и (18) получаем:

$$(\Delta \alpha'_0)^2 = D_\epsilon \sum_{i=0}^N (A_i \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon_1})^2 + \sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^j A_i \frac{\partial y_i}{\partial \delta_j})^2 D \delta_j, \quad (21)$$

$$(\Delta \beta'_0)^2 = D_\epsilon \sum_{i=0}^N (b_i \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon_1})^2 + \sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^j b_i \frac{\partial y_i}{\partial \delta_j})^2 D \delta_j, \quad (22)$$

$$\Delta \beta'_0 \Delta \alpha'_0 = D_\epsilon \sum_{i=0}^N A_i b_i (\frac{\partial y_i}{\partial \epsilon_1})^2 + \sum_{j=1}^N [(\sum_{i=1}^j b_i \frac{\partial y_i}{\partial \delta_j})(\sum_{i=1}^j A_i \frac{\partial y_i}{\partial \delta_j})] D \delta_j, \quad (23)$$

где $\alpha'_0 = \alpha^* + \alpha'$, $\beta'_0 = \beta^* + \beta'$.

Производные $\frac{\partial y_i}{\partial \epsilon_1}$, $\frac{\partial y_i}{\partial \delta_j}$ и величины A_i и b_i вычисляем из (1) или из матрицы R (см. Приложение 5), полагая $\eta = 0$ и заменяя остальные величины на вычисленные по формулам (17-20). Так как в дисперсию ϵ входит "личная дисперсия" лаборанта-измерителя, то целесообразно для каждого трека вычислять оценку D_ϵ - величину D'_ϵ x):

$$D'_\epsilon = \frac{1}{N-2} \sum_{i=0}^N (\epsilon'_i)^2. \quad (24)$$

Легко видеть, что применяемый в работах /2-5/ метод определения импульса по условию минимума суммы квадратов расстояний от измеренных точек до аппроксимирующей кривой соответствует допущению $\eta = \delta = 0$, которое из системы (5-9) оставляет только три уравнения (5-7). Работы /6/ и /7/ по смыслу совпадают с данной работой в той части, в которой рассматривается эффект кулоновского рассеяния. Однако в /6/ и /7/ остается открытым вопрос об одновременном учете как эффекта кулоновского рассеяния, так и уравнений движения заряженной частицы в тормозящей среде и неоднородном магнитном поле.

III. Явный вид уравнений связей, накладываемых измерениями на функцию правдоподобия

Найдем соотношение между хордой $\Delta \ell_i$ и элементом дуги Δs_i , учитывая, что из элементов Δs_i составлен параметр s_i в (1)

х) Если окажется, что D'_ϵ значительно превышает D_ϵ , то это будет свидетельствовать либо о некачественном измерении, либо о наличии ядерного рассеяния на следе.

$$\Delta \ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (25)$$

Обозначая средний радиус кривизны проекции на i -том интервале через R_i , мы можем записать:

$$\Delta s_i = \Delta \ell_i \left[1 - \frac{(\delta \ell_i)_\parallel}{\Delta \ell_i} - \frac{(\delta \ell_i)_\perp^2}{2(\Delta \ell_i)^2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{(\Delta \ell_i)^2}{(R_{i-1})^2} \right], \quad (26)$$

$$s_i = \sum_{j=1}^i \Delta s_j = \sum_{j=1}^i \Delta \ell_j - (\delta \ell_{0,i})'' + \sum_{j=1}^i \{(\Delta \ell_j)_\perp^2 \cdot [\frac{1}{24} \cdot \frac{(\Delta \ell_j)^2}{R_{j-1}^2} - \frac{(\delta \ell_j)_\perp^2}{2(\Delta \ell_j)^2}]\}. \quad (27)$$

Здесь $(\delta \ell_i)_\parallel$ - ошибка в измерении $\Delta \ell_i$ вдоль направления хорды $\Delta \ell_i$ $[(\delta \ell_i)_\parallel = \sqrt{D_\epsilon}]$, $(\delta \ell_i)_\perp$ - ошибка в измерении $\Delta \ell_i$ по направлению, перпендикулярному хорде $[(\delta \ell_i)_\perp = \sqrt{D_\epsilon}]$; $(\delta \ell_i)_{0,i}$ - разность измерительных ошибок, взятых вдоль трека в точках 0 и i $[(\delta \ell_i)_{0,i} = \sqrt{D_\epsilon}]$.

Из (26) и (27) следует, что для большинства треков с высокой точностью можно положить:

$$\Delta s_i = \Delta \ell_i, \quad s_i = \sum_{j=1}^i \Delta \ell_j. \quad (28)$$

Действительно, для $(\delta \ell_i)_\parallel = (\delta \ell_i)_\perp = 0,005$ см, $\Delta \ell_i = 1$ см, $R_i = 100$ см и $N = 10$ вторая формула (28) справедлива с точностью до сотых долей процента.

Проинтегрировав уравнение движения от $(i-1)$ -ой до i -той точки (см. Приложение 2) в предположении отсутствия на этом интервале многократного рассеяния, получим с учетом (11-12)

$$y_i = y_{i-1} + \Phi_i \Delta \ell_i + A C_i \cdot \Delta \ell_i \cdot \cos \beta_{i-1}^* + b \Delta \ell_i \cdot \cos \beta_{i-1}^* + (\Delta \ell_i) (\cos \beta_{i-1}^*) \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j. \quad (29)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi_i = \left\{ 1 - \frac{a^2 f_{i-1}^2}{6} (\Delta \ell_i)^2 \left[1 + \frac{3}{4} C_{i-1} \Delta \ell_i + \frac{3}{20} C_{i-1}^2 (\Delta \ell_i)^2 \right] \right\} \sin \beta_{i-1}^* + \frac{a^2 f_{i-1}}{2} \left(1 + \frac{1}{3} C_{i-1} \Delta \ell_i \right) \cos \beta_{i-1}^* \cdot \Delta \ell_i, \quad (30)$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{i-1} [q_{j-1} f_{j-1} \Delta \ell_j (1 + \frac{1}{3} C_{j-1} \Delta \ell_j)] + q_{i-1} \frac{f_{i-1}}{2} (\Delta \ell_i) (1 + \frac{1}{3} C_{i-1} \Delta \ell_i). \quad (31)$$

$$i_{i-1} = \frac{P_0^* \cdot \cos \alpha_0^*}{P_{i-1}^* \cdot \cos \alpha_{i-1}^*} \cdot \left(\frac{H_{x_{i-1}}}{H_{x_0}} - \frac{H_{y_{i-1}} \cdot \sin(\beta_{i-1}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j) + H_{z_{i-1}} \cdot \cos(\beta_{i-1}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j)}{H_{z_0}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{i-1}^* \right), \quad (32)$$

$$a^* = 300 \cdot \frac{H_{x_0}}{P_0^* \cdot \cos \alpha_0^*}, \quad (33)$$

$$\beta_{i-1}^* = \beta_0^* + a^* \cdot \sum_{j=1}^{i-1} [t_{i-1} (1 + \frac{1}{2} C_{j-1} \Delta l_j) \Delta l_j], \quad (34)$$

q_{j-1} определяется формулой (83),

β_i^* - угол в i -ой точке, согласно интегралу от уравнения Лоренца, с начальным значением β_0^* ;

P_0^* и P_{i-1}^* - оценки импульса в начальной и $(i-1)$ -ой точках соответственно;

$\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j$ - угол многократного рассеяния, накопленный при движении от начальной до $(i-1)$ -ой точки;

y_{i-1} и $\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j$ отражают влияние многократного рассеяния на интервале от начальной до $(i-1)$ -ой точки;

$$G_1 = \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} \right) \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^{-1} = \frac{1}{P_1 \cdot \cos \alpha_1} \cdot \frac{dP_1}{ds}, \quad (35)^x$$

$$|H_x| = |H_y| \ll |H_z \cdot \operatorname{ctg} \alpha|, \quad (36)$$

$$\left| \frac{dH_x}{ds} \right| \ll |H_z \cdot \operatorname{ctg} \alpha|, \quad \left| \frac{dH_y}{ds} \right| \ll |H_z \cdot \operatorname{ctg} \alpha|.$$

H_x, H_y, H_z - компоненты магнитного поля,

α - угол касательной к траектории в i -той точке с плоскостью XOY.

Условия (35) и (36) соответствуют случаю слабо неоднородного поля.

Учтем многократное рассеяние на i -том интервале.

Распределение Ферми ^{/8/} для частицы, прошедшей в рассеивающей среде расстояние x , имеет вид:

^{x)} Полное выражение для G приведено в Приложении 2.

$$w(y, \delta, x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{Dx^2} \cdot \exp\left[-\frac{4}{D} \left(\frac{\delta^2}{x} - \frac{3y\delta}{x^2} + \frac{3y^2}{x^3} \right)\right] \quad (37)$$

(предполагается, что в начальной точке частица движется вдоль оси Oх и смещение у перпендикулярно Oх).

Сделав замену $y = \eta + \frac{1}{2} \delta$, $x = l$, получим для показателя экспоненты в (37) следующее выражение:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{Dl} + \frac{\eta^2}{24} \right), \quad (38)$$

из которого видно, что η и δ являются независимыми стохастическими переменными.

Рассмотрим среднеквадратичное смещение $\sqrt{y^2}$ на следе длиной L, на котором измерена $(N+1)$ - точка, получаемое при учете δ и η и только η :

$$(\sqrt{y^2})_{\delta, \eta} = \frac{\sqrt{DL}^{3/2}}{\sqrt{6}}, \quad (39)$$

$$(\sqrt{y^2})_{\eta} = \frac{\sqrt{D \cdot L}^{3/2}}{N \cdot \sqrt{24}}. \quad (40)$$

Сопоставляя (39) и (40), получим

$$\frac{(\sqrt{y^2})_{\eta}}{(\sqrt{y^2})_{\delta, \eta}} = \frac{1}{2N} \ll 1 \quad (41)$$

для $N \gg 1$. Поэтому при построении функции правдоподобия и рекуррентных формул перехода от y_i к y_{i+1} можно ограничиться только учетом членов с δ и исключить члены с η , положив $\eta_i = \bar{\eta} = 0$. Исключение η соответствует тому, что реальную однородную рассеивающую среду мы заменяем нерассеивающей средой с тонкими рассеивающими слоями, расположенными в серединах интервалов.

Включив на i -том интервале многократное рассеяние и ошибки измерения, мы получим из (29) следующую рекуррентную формулу:

$$y_i = y_{i-1} + \Phi_1 \Delta l_i + A \cdot C_1 \cdot \Delta l_i \cdot \cos \beta_{i-1}^* + b \Delta l_i \cdot \cos \beta_{i-1}^* + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j + \frac{1}{2} \delta_i \right) \cdot \Delta l_i \cdot \cos \beta_{i-1}^* + \epsilon_i - \epsilon_{i-1}. \quad (42)$$

Выражение ϵ_i с учетом (42) запишется в явном виде следующим образом:

$$\epsilon_i = y_i - (y_0 - \epsilon_0) - \sum_{j=1}^i \Delta l_j \Phi_j - \Lambda \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}) - bx_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \delta_j (x_{j-1} + x_j - 2x_i), \quad (43)$$

где $x_i = \sum_{n=1}^i (\Delta l_n) \cdot \cos \beta_{n-1}^*$.

Следует отметить, что выражение (42) получено из (29) с использованием распределения ферми, которое справедливо для рассматриваемого случая криволинейного движения лишь постольку, поскольку

$$\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{\Delta l_1}{R_{i-1}} \right)^2 \ll 1, \quad (44)$$

что совпадает по порядку величины с условием справедливости выражения (99) (см. Приложение 3).

IV. Явный вид условий максимума функции правдоподобия

Учитывая (43), можно получить явный вид L_1 из формулы

$$L_1 = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i^2}{D_\epsilon} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}} \right] \right\}, \quad (45)$$

при этом мы использовали (41) и положили $D_{\epsilon_i} = D_\epsilon$. Выражения (13-16) запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \epsilon_i \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}) \right\} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_1}{\partial \Lambda} = 0 \right), \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \epsilon_i (x_i - x_0) \right\} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_1}{\partial b} = 0 \right), \quad (47)$$

$$\left\{ \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \right\} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_1}{\partial \epsilon_0} = 0 \right), \quad (48)$$

$$\frac{1}{D_\epsilon} \sum_{i=1}^N \epsilon_i (x_{i-1} + x_i - 2x_i) + \frac{2\delta_i}{D_{\delta_i}} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_1}{\partial \delta_i} = 0 \right), \quad (49)$$

(i=1, ..., N).

При выводе уравнения (46) мы опустили член с $\frac{\partial D_\delta}{\partial \Lambda}$, что соответствует пренебрежению информацией об Λ (т.е. об импульсе частицы), даваемой многократным рассеянием, по сравнению с информацией, даваемой изучаемым искривлением траектории в магнитном поле (см. Приложение 4).

Выражения (46-49) являются линейными функциями относительно неизвестных Λ , b , ϵ_0 , δ_1 , ..., δ_N и экспериментальных величин y_0, \dots, y_N .

В Приложении 5 излагается специальный алгоритм для решения системы (46-49). Определение исходных оценок a^* , β_0^* и a_0^* изложено в Приложении 6.

Определив все величины ϵ_i и δ_i , мы можем вычислить для следа χ_{\min}^2 (45)

$$\chi_{\min}^2 = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i^2}{D_\epsilon} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}}.$$

При этом можно провести анализ вкладов в χ_{\min}^2 величин $\frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}}$.

Если какой-либо из вкладов окажется очень большим, то это будет указывать на то, что частица имела на своем пути ядерное рассеяние. В этом случае можно повторить вычисления (46-49), значительно увеличив дисперсию D_{δ_i} на указанном интервале.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Угол поворота трека частицы, останавливающейся в камере

Обозначения:

Ω - угол (в радианах) между проекциями на плоскость XOY касательных к траектории в начальной точке и конечной точке (точке остановки);

$H = H_z$ - магнитное поле (гс), предполагается однородным и направленным по оси z;

S - пространственная дуга следа (см.), отсчитываемая от начальной точки до точки остановки;

$P(S)$ - импульс ($\frac{M_{эВ}}{c}$) частицы, соответствующий пробегу S ;

E_0 - масса покоя частицы (Мэв);

d - плотность тормозящей среды ($\frac{\Gamma}{\text{см}}$).

Очевидно, что для траектории, лежащей в плоскости XOY,

$$\Omega = 300 \text{ Н} \cdot 10^{-6} \int_0^S \frac{dS}{R(S)} \quad (50)$$

Из работы /8/ для пробега S имеем формулу

$$S = \frac{43}{d} \cdot \frac{E_0}{100} \left(\frac{\sqrt{P^2 + E_0^2} - E_0}{E_0} \right)^{1,75} \quad (51)$$

справедливую для среды со средним атомным номером 7,75 при условиях:

$$P \leq \sqrt{3} E_0, \quad S \leq \frac{0,43 E_0}{d} = k$$

(в случае равенства точность формулы (51) порядка 15%).

Из (50) и (51) имеем

$$P = E_0 \sqrt{\left(\frac{S}{k}\right)^{\frac{8}{7}} + 2\left(\frac{S}{k}\right)^{\frac{4}{7}}} \quad (52)$$

$$\Omega = k_1 \int_0^S \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{8}{7}} + 2y^{\frac{4}{7}}}} \quad (53)$$

где

$$k_1 = \frac{300 \text{ Н} \cdot 10^{-6} \cdot 0,43}{d} \quad (\text{в радианах}), \quad (54)$$

$$k = \frac{0,43 \cdot E_0}{d} \quad (\text{в см}). \quad (55)$$

Т а б л и ц а 1

	П р о п а н			В о д о р о д		
	Протон	K-мезон	π -мезон	Протон	K-мезон	π -мезон
k(см)	943	487	140,5	6900	3630	1026
k ₁ (радианы)	5,41	5,41	5,41	39,7	39,7	39,7

В таблице 1 приведены коэффициенты k и k₁ для разных частиц в пропановой

пузырьковой камере ($d = 0,427 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$) и водородной пузырьковой камере ($d = 0,0585 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$) для магнитного поля $H = 18$ кгс. На рис. 2 представлена зависимость Ω от S для разных частиц и камер.

Из рис. 2 видно, что для пропановой камеры размером 200 x 60 x 40 см³ и водородной камерой размером 100 x 35 x 30 см³ угол поворота большинства треков может считаться малым.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вывод уравнений связи

Вывод уравнений связи начнем с интегрирования уравнения движения в окрестности (1-1)-ой точки.

Уравнения Лоренца в тормозящей среде можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \frac{\vec{P}}{P} \frac{dP}{dt} \quad (56)$$

где \vec{P} - импульс частицы,
 \vec{v} - скорость,
 e - заряд,
 c - скорость света.

Векторное уравнение (56) может быть записано в виде

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dS^2} = \frac{e}{Pc} \left[\frac{d\vec{R}}{dS}, \vec{H} \right] \quad (57)$$

если перейти к дифференцированию по пространственной дуге S (\vec{R} - радиус-вектор траектории).

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= P(i \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + j \cos \alpha \cdot \sin \beta + k \cdot \sin \alpha), \\ \alpha &= \alpha(S), \\ \beta &= \beta(S), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

выражение (57) можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dS} (\cos \alpha \cdot \cos \beta) &= \frac{e}{Pc} (\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot H_x - \sin \alpha \cdot H_y), \\ \frac{d}{dS} (\sin \alpha) &= \frac{e}{Pc} (\cos \beta \cdot H_y - \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot H_x), \\ \frac{d}{dS} (\cos \alpha \cdot \sin \beta) &= \frac{e}{Pc} (\sin \alpha \cdot H_x - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot H_x). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Откуда

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{e}{Pc} (\cos \beta \cdot H_y - \sin \beta \cdot H_x), \quad (60)$$

$$\frac{d\beta}{dS} = \frac{e}{Pc} [-H_x + \operatorname{tg} \alpha (H_x \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta)]. \quad (61)$$

Дифференцируя (60) и (61) по S и имея в виду, что $\frac{dH}{dS} = \frac{dH}{ds} \cos \alpha$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dS^2} &= -\frac{e}{P^2 c} \left(\frac{dP}{dS} \right) (\cos \beta \cdot H_y - \sin \beta \cdot H_x) + \\ &+ \frac{e}{Pc} \left\{ \cos \alpha \left(\frac{dH_y}{ds} \cos \beta - \frac{dH_x}{ds} \cdot \cos \beta \right) - \frac{d\beta}{dS} (H_y \cdot \sin \beta + H_x \cdot \cos \beta) \right\}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta}{dS^2} &= -\frac{e}{P^2 c} \cdot \frac{dP}{dS} [\operatorname{tg} \alpha (H_y \cdot \sin \beta + H_x \cdot \cos \beta) - H_x] + \\ &+ \frac{e}{Pc} \left(\frac{dH_y}{ds} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \frac{dH_x}{ds} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \right) + \frac{d\alpha}{dS} \cdot \frac{d\beta}{dS} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$+ \frac{e}{Pc} \left\{ -\frac{dH_x}{ds} \cdot \cos \alpha + \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} [H_y \cdot \sin \beta + H_x \cdot \cos \beta] \right\};$$

$$\frac{dH_x}{ds} = \frac{\partial H_x}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial H_x}{\partial y} \cdot \sin \beta + \frac{\partial H_x}{\partial z} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (64)$$

$$\frac{dH_y}{ds} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot \cos \beta + \frac{\partial H_y}{\partial y} \cdot \sin \beta + \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (65)$$

$$\frac{dH_x}{ds} = \frac{\partial H_x}{\partial x} \cdot \cos \beta + \frac{\partial H_x}{\partial y} \cdot \sin \beta + \frac{\partial H_x}{\partial z} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (66)$$

Перейдем от дифференцирования по пространственной дуге S к дифференцированию по ее проекции s на плоскость XOY :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dS}, \quad (67)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{d\beta}{dS}, \quad (68)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{d^2 \alpha}{dS^2} + \left(\frac{d\alpha}{dS} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \right], \quad (69)$$

$$\frac{d^2 \beta}{ds^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{d^2 \beta}{dS^2} + \frac{d\alpha}{dS} \cdot \frac{d\beta}{dS} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (70)$$

Выпишем

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} \right) \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^{-1}, \\ G &= -\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dS} + \frac{e}{Pc \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \frac{H_x \cdot H_y \cdot \cos 2\beta - \frac{H_x^2 - H_y^2}{2} \cdot \sin 2\beta}{[-H_x + \operatorname{tg} \alpha (H_y \cdot \sin \beta + H_x \cdot \cos \beta)]} + \\ &+ \frac{\operatorname{tg} \alpha \left[\frac{dH_y}{ds} \cdot \sin \beta + \frac{dH_x}{ds} \cdot \cos \beta \right] \cdot \frac{dH_x}{ds}}{[-H_x + \operatorname{tg} \alpha (H_y \cdot \sin \beta + H_x \cdot \cos \beta)]} + \frac{2e}{Pc} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} [H_y \cdot \cos \beta - H_x \cdot \sin \beta]. \end{aligned} \quad (71)$$

Мы считаем, что точки на траектории измерены столь часто, что в силу малости $\Delta s_1 = s_1 - s_{1-1}$ можно ограничиться в окрестности $(i-1)$ -ой точки линейным и квадратичным членами в разложении $\beta(s)$ по степеням $(s - s_{1-1})$

$$\beta(s) = \beta_{1-1} + \frac{d\beta_{1-1}}{ds} (s - s_{1-1}) \left[1 + \frac{1}{2} G_{1-1} (s - s_{1-1}) \right], \quad (72)$$

где β_{1-1} - угол β в точке $(i-1)$.

Из выражения (72) получаем с учетом поворота трека на угол δ_i на интервале Δs_1 из-за многократного рассеяния:

$$\beta_1 = \beta_{1-1} + s_0 i_{1-1} \cdot \Delta s_1 \left(1 + \frac{1}{2} G_{1-1} \Delta s_1 \right) + \delta_i; \quad (73)$$

где

$$s_0 = -\frac{e}{c} \cdot \frac{H_{s_0}}{P_0 \cdot \cos \alpha_0}, \quad (74)$$

$$f_i = \frac{P_0}{P_i} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_i} \left(\frac{H_{y_1}}{H_{s_0}} - \frac{H_{y_1} \cdot \sin \beta_i + H_{x_1} \cdot \cos \beta_i}{H_{s_0}} \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \right), \quad (75)$$

α_0 - угол между касательной к траектории в начальной точке и плоскостью XOY.

Обычно в пузырьковых камерах выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} |s_0 \cdot f_{i-1} \Delta s_i (1 + \frac{3}{4} G_{i-1} \Delta s_i)| &\ll 1, \\ |G_{i-1} \Delta s_i| &\ll 1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (76)$$

Независимые величины δ_i в этих условиях могут считаться распределенными по нормальному закону (см. Приложение 3).

Координата y_i с учетом многократного рассеяния на интервале Δs_i (см. (37) и далее) запишется как

$$y_i = y_{i-1} + \int_0^{\Delta s_i} \sin[\beta_{i-1} + s_0 f_{i-1} \cdot (1 + \frac{3}{4} G_{i-1} \cdot s)] dt + (\frac{\delta_i}{2} \Delta s_i + \eta_i) \cos \beta_i. \quad (77)^x$$

Выполним указанное интегрирование, считая

$$\begin{aligned} \sin(\beta_i - \beta_{i-1}) &= \beta_i - \beta_{i-1}, \\ \cos(\beta_i - \beta_{i-1}) &= 1 - \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (78)$$

и вводя измерительные ошибки ϵ :

$$\begin{aligned} y_i = y_{i-1} + \Delta s_i [1 - \frac{s_0^2 f_{i-1}^2}{6} (\Delta s_i)^2 (1 + \frac{3}{4} G_{i-1} \Delta s_i + \frac{3}{20} G_{i-1}^2 \Delta s_i^2)] \sin \beta_{i-1} + \\ + \frac{s_0 f_{i-1}}{2} (\Delta s_i)^2 [1 + \frac{1}{3} G_{i-1} \Delta s_i] \cos \beta_{i-1} + (\frac{\delta_i}{2} \Delta s_i + \eta_i) \cos \beta_i - \epsilon_{i-1} + \epsilon_i. \end{aligned} \quad (79)$$

Для получения уравнений связи в удобном для дальнейших расчетов линеаризованном виде проведем ряд преобразований.

Рассматривая (73) как рекуррентную формулу, получим

$$\beta_{i-1} = \beta_0 + s_0 \sum_{j=1}^{i-1} [f_{j-1} (1 + \frac{3}{4} G_{j-1} \Delta s_j) \Delta s_j] + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j. \quad (80)$$

^{x)} Через η_i обозначено превышение смещения, возникающего при многократном рассеянии на интервале Δs_i над средним смещением (при фиксированном δ), определяемым как $\frac{\delta_i}{2} \Delta s_i$.

Последний член в (80) представляет накопленный на пути от начальной до i -той точки угол поворота из-за многократного рассеяния, который включается в начальный угол на каждом интервале. Выделив в выражении (79) с учетом (80) линейные члены относительно s_0, β_0 и $\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j$, для чего получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial s_0} = \Delta s_i \{ - \frac{s_0 f_{i-1}}{3} f_{i-1}^2 \Delta s_i^2 [1 + \frac{3}{4} G_{i-1} \Delta s_i + \frac{3}{20} G_{i-1}^2 (\Delta s_i)^2] \sin \beta_{i-1} + \\ + \Delta s_i \{ 1 - \frac{s_0^2 f_{i-1}^2}{6} (\Delta s_i)^2 [1 + \frac{3}{4} G_{i-1} (\Delta s_i) + \frac{3}{20} G_{i-1}^2 (\Delta s_i)^2] \} \times \\ + \cos \beta_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} [q_{j-1} f_{j-1} \Delta s_j (1 + \frac{3}{4} G_{j-1} \Delta s_j)] + q_{i-1} \cdot \frac{f_{i-1}}{2} (\Delta s_i)^2 \times \\ \times [1 + \frac{1}{3} G_{i-1} \Delta s_i] \cos \beta_{i-1} - \frac{s_0 \cdot f_{i-1}}{2} (\Delta s_i)^2 (1 + \frac{1}{3} G_{i-1} \Delta s_i) \times \\ \times \sin \beta_{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} [q_{j-1} f_{j-1} (1 + \frac{3}{4} G_{j-1} \Delta s_j) \Delta s_j], \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial \beta_0} = \Delta s_i \{ 1 - \frac{s_0^2 f_{i-1}^2}{6} (\Delta s_i)^2 [1 + \frac{3}{4} G_{i-1} \Delta s_i + \frac{3}{20} G_{i-1}^2 (\Delta s_i)^2] \} \cdot \cos \beta_{i-1} - \\ - \frac{s_0 f_{i-1}}{2} (\Delta s_i)^2 [1 + \frac{1}{3} G_{i-1} \Delta s_i] \sin \beta_{i-1}, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial (\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j)} = \frac{\partial y_i}{\partial \beta_0},$$

$$q_i = \frac{P_0 + s_0 \cdot \frac{d}{ds_0} (P_0 - P_i)}{P_i} = \frac{P_0}{P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial P_0}. \quad (83)$$

^{x)} Линейное приближение по Δ дает

$$q_i = 1 + \frac{P_0 - P_i}{P_i} [1 + \frac{3 M^2 C^4}{E_0^2} - \frac{2 V_1}{v_0^3 (\frac{dP}{dS})|_{P=P_0}}]$$

где M, V_1, E_0 и v_0 определены в (146).

После отбрасывания малых членов выражения (81-82) примут вид:

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial a_0} = \Delta s_1 \cdot \cos \beta_{1-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} [q_{j-1} f_{j-1} \Delta s_j (1 + \frac{1}{2} C_{j-1} \Delta s_j)] + \frac{1}{2} q_{i-1} \Delta s_i (1 + \frac{1}{2} C_{i-1} \Delta s_i) \right\} \quad (84)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial (\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j)} = (\Delta s_1) \cos \beta_{1-1} \quad (85)$$

Пусть в результате расчета на первом этапе получены оценки a^* и β_0^* неизвестных параметров a_0 и β_0 .

Введем обозначения:

$$a_0 - a^* = A \quad (86)$$

$$\beta_0 - \beta_0^* = b \quad (87)$$

$$\beta_1^* = \beta_0^* + a^* \sum_{j=1}^i [f_{j-1} (1 + \frac{1}{2} C_{j-1} \Delta s_j) \Delta s_j] \quad (88)$$

считая

$$|A| \ll |a^*| \quad (89)$$

$$|b| \ll 1 \quad (90)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \right| \ll 1 \quad (91)$$

Определение оценок a^* и β_0^* изложено в Приложении 6. Запишем (79) с учетом (81-85) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \gamma_{1-1} + \Delta s_1 \Phi_1 + A \Delta s_1 \cdot \cos \beta_{1-1}^* \cdot C_1 + b \Delta s_1 \cdot \cos \beta_{1-1}^* + \\ & + \Delta s_1 \cdot \cos \beta_{1-1}^* \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j + \Delta s_1 \cos \beta_{1-1}^* \cdot \frac{\delta_i}{2} + \epsilon_1 - \epsilon_{i-1} \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \left\{ \left[1 - \frac{a^{*2} f_{i-1}^2}{6} (\Delta s_1)^2 \left(1 + \frac{3}{4} C_{i-1} \Delta s_1 + \frac{3}{20} C_{i-1}^2 (\Delta s_1)^2 \right) \right] \sin \beta_{1-1}^* + \right. \\ & \left. + \frac{a^* f_{i-1}}{2} \left(1 + \frac{1}{3} C_{i-1} \Delta s_1 \right) \cdot \cos \beta_{1-1}^* (\Delta s_1) \right\} \quad (93) \end{aligned}$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^{i-1} [q_{j-1} f_{j-1} \Delta s_j (1 + \frac{1}{2} C_{j-1} \Delta s_j)] + \frac{1}{2} q_{i-1} \Delta s_i (1 + \frac{1}{2} C_{i-1} \Delta s_i) \quad (94)$$

Рассматривая (92) как рекуррентную формулу, можно получить уравнения связи (49). В выражениях (92)-(94) функция вычислится при оценочных значениях параметров и имеет вид (82). Аналогичное положение имеет место и для γ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Условие применимости распределения Ферми $^{18}\gamma$ в криволинейных координатах

Рассмотрим движение не тормозящейся частицы в плоскости XOY в однородном магнитном поле, направленном по оси Z (см. рис. 3). Пусть в точке O' произошло отклонение частицы на малый угол ψ от начальной траектории (окружности) 2, и она начала двигаться по траектории 1.

В полярной системе координат с полюсом в точке C, лежащей посередине между центрами окружностей C_1 и C_2 , и осью CO' для $\psi \ll 1$ уравнения траекторий запишутся в следующем виде:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} R \psi \sin \phi + \sqrt{0,25 R^2 \psi^2 \sin^2 \phi + R^2 (1 - 0,25 \psi^2)} \quad (95)$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{2} R \psi \sin \phi + \sqrt{0,25 R^2 \psi^2 \sin^2 \phi + R^2 (1 - 0,25 \psi^2)} \quad (96)$$

В этом же предположении можно считать, что единичный вектор касательной \vec{e}^0 (s - дуга, отсчитываемая по траектории 2 от точки O') и $\vec{y} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ ортогональны. Однако

$$\rho_1 - \rho_2 = R \psi \sin \phi = s \cdot \psi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{R^2} + \dots \right) \quad (97)$$

Таким образом, отсчитывая отклонение y от траектории 2, будем иметь

$$y = s \psi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{R^2} + \dots \right) \quad (98)$$

Распределение Ферми было выведено для случая зависимости отклонения y от ψ и s , которое записывается как

$$y = s \psi \quad (99)$$

Поэтому распределение Ферми для случая рассматриваемого криволинейного движения будет справедливо постольку, поскольку $\frac{1}{6} \frac{a^2}{R^2}$ меньше чем 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Сравнение информации об импульсе частицы за счет искривления ее траектории в магнитном поле, с информацией об импульсе, получаемой при изучении многократного рассеяния

Дифференцируя функцию правдоподобия L_1 (45) по приращению кривизны A и приравнявая производную нулю, получим

$$\frac{\partial L_1}{\partial A} = E_1 + E_2 = 0, \quad (100)$$

где

$$E_1 = \sum \frac{\epsilon_i}{D_\epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon_i}{\partial A}, \quad E_2 = - \sum \frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}} \left(\frac{1}{D_{\delta_i}} \cdot \frac{\partial}{\partial A} D_{\delta_i} \right), \quad (101)$$

причем E_1 учитывает информацию об импульсе частицы, получаемую при исследовании общего поворота траектории в магнитном поле, E_2 учитывает информацию об импульсе частицы, получаемую за счет исследования среднего угла многократного рассеяния.

Следует отметить, что если в выражения E_1 и E_2 подставить действительные встретившиеся в эксперименте величины ϵ_i и δ_i , то сумма $E_1 + E_2$, вообще говоря, не будет равна 0. Выполняя процедуру отыскания максимума функции правдоподобия, мы вместо экспериментальных значений ϵ_i и δ_i ставим их оценки, причем такие, что $E_1 + E_2 = 0$. Поэтому мы можем рассматривать процедуру отыскания оценок, обращающих функцию правдоподобия в максимум, как процедуру компенсации экспериментального значения суммы $E_1 + E_2$.

Рассмотрим относительный вклад в эту (экспериментальную) сумму членов E_1 и E_2 . Для выполнения численных оценок сделаем следующие предположения:

- I) На следе длиной L (см) измерены $(N+1)$ равномерно распределенные точки.
- II) Движение частицы происходило без потерь энергии (но с многократным рассеянием) в однородном магнитном поле, направленном по оси OZ .
- III) Траектория частицы целиком лежит в плоскости XOY .

$$IV) |A| \ll |a_0|, \quad a_0 = a^* + A, \quad |a_0 L| \ll 1, \quad N \gg 1, \quad [D_\epsilon] = \text{см}^2$$

В этих предположения (43) запишется как

$$\epsilon_i = \gamma_1 + \epsilon_0 - \gamma_0 - (1-1)(\beta_0^* + b)\Delta\ell - \frac{i^2}{2}(a^* + A)(\Delta\ell)^2 - (\Delta\ell) \cdot \sum_{j=1}^i \frac{2j+1-2j}{2} \delta_j, \quad (102)$$

где $\Delta\ell = \frac{L}{N}$.

Из (102) следует, что

$$\frac{\partial \epsilon_i}{\partial A} = -(\Delta\ell)^2 \cdot \frac{i^2}{2}. \quad (103)$$

Обозначим экспериментальное значение E_1 через $E_{1\text{эксп}}$, тогда

$$E_{1\text{эксп}} = - \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i}{D_\epsilon} \cdot \frac{i^2}{2}, \quad (104)$$

$$|\bar{E}_{1\text{эксп}}| \approx \frac{L^2 \sqrt{N}}{\sqrt{10\pi} \cdot \sqrt{D_\epsilon}}. \quad (105)$$

Определим $\bar{E}_{2\text{эксп}}$. Для этого установим, что

$$\frac{1}{D_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial A} D_\delta = (PV)^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{PV} \right) = 2 \frac{2M^2 + P^2}{M^2 + P^2} \cdot R, \quad (106)$$

где M - масса покоя частицы $\left(\frac{M_{\text{эв}}}{c} \right)$,

P - импульс частицы ($M_{\text{эв}}/c$),

V - скорость частицы в единицах c ,

R - радиус кривизны в начальной точке (см)

$$\left(R = \frac{1}{a_0} = \frac{P}{300H} \right).$$

Из (106) и (101) следует

$$\bar{E}_{2\text{эксп}} = 2 \cdot \frac{2M^2 + P^2}{M^2 + P^2} R \cdot N. \quad (107)$$

Рассмотрим отношение оценок (105), (107):

$$\frac{\overline{E}_2 \text{ эксп.}}{|\overline{E}_1 \text{ эксп.}|} = 2\sqrt{10\pi} \frac{2M^2 + P^2}{M^2 + P^2} \cdot \frac{R\sqrt{N}}{L^2} \sqrt{D_\epsilon} \quad (108)$$

Для случая $M \ll P$, $R = 10^3$ см, $L = 50$ см, $\sqrt{D_\epsilon} = 5 \cdot 10^{-3}$ см, $N = 20$

$$\frac{\overline{E}_2 \text{ эксп.}}{|\overline{E}_1 \text{ эксп.}|} = 0,1 \quad (109)$$

Из (108) следует, что для большинства треков, не допуская большой ошибки, можно отказаться от информации об импульсе частицы, вносимой изучением многократного рассеяния, и использовать уравнение (100) в виде

$$\sum_{i=0}^N \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \Lambda} = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Решение системы линейных уравнений, вычисление дисперсий и корреляций

В матричной форме система линейных уравнений записывается в виде:

$$(Q)(\Gamma) = (S), \quad (110)$$

где

- (Γ) - столбец из неизвестных величин,
- (Q) - квадратичная матрица из коэффициентов при этих неизвестных величинах,
- (S) - столбец из свободных членов.

Решение системы находим по формуле

$$(\Gamma) = (Q)^{-1}(S), \quad (111)$$

где $(Q)^{-1}$ - матрица, обратная к (Q).

В нашем случае в силу линейности (S) относительно Y_1 можно записать:

$$(Q)(\Gamma) = (K)(Y), \quad \text{где} \quad (112)$$

$$(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_0 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}, \quad Y_1 - \text{измеренная величина,}$$

а (K) - матрица из коэффициентов при Y_1 и членов, не содержащих Y_1 .

Тогда решение примет вид

$$(\Gamma) = (R)(Y), \quad \text{где} \quad (R) = (Q)^{-1}(K). \quad (113)$$

Элементы матрицы (R) равны производным от неизвестных величин (Γ) по измеренным координатам Y :

$$R_{1k} = \frac{\partial \Gamma}{\partial Y_{k-2}} \quad \text{для} \quad k \geq 2. \quad (114)$$

Запишем систему (112) в обычной форме. Для этого систему уравнений (13) - (18) запишем в виде

$$\frac{\partial L_1}{\partial T_0} = 0, \quad (115)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (116)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial b} = 0, \quad (117)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \Lambda} = 0, \quad (118)$$

где

$$T_0 = Y_0 - \epsilon_0. \quad (119)$$

T_0 имеет смысл точной координаты начальной точки следа. Такая связь между ϵ_0 и T_0 позволяет произвести замену уравнения (15) на эквивалентное ему уравнение (115).

С учетом (45) и (43) и введя обозначения

$$\begin{aligned} (-2T_0) &= \xi, \\ (-2b) &= \omega, \\ (-2\Lambda) &= \kappa, \end{aligned} \quad (120)$$

получим систему уравнений:

$$\xi(N+1) + \sum_{j=1}^N \delta_j \sum_{i=1}^N (x_{j-1} + x_j - 2x_i) + \omega \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) + \quad (121)$$

$$+ \kappa \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_j (x_j - x_{j-1}) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \ell_j \Phi_j - 2 \sum_{i=0}^N y_i$$

$$\xi \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i) + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i)(x_j + x_{j-1} - 2x_i) +$$

$$+ \delta_k \left\{ \frac{4D_\epsilon}{D\delta_k} + \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i)^2 \right\} + \sum_{j=k+1}^N \delta_j \sum_{i=j}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i)(x_{j-1} + x_j - 2x_i) +$$

$$+ \omega \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i)(x_i - x_0) + \kappa \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i) \sum_{\ell=1}^i C_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) =$$

$$= 2 \sum_{i=k}^N (x_{k-1} + x_k - 2x_i) \sum_{j=1}^i \ell_j \Phi_j - 2 \sum_{i=k}^N y_i (x_{k-1} + x_k - 2x_i), \quad (122)$$

(k = 1, 2, ..., N).

$$\xi \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) + \sum_{j=1}^N \delta_j \sum_{i=1}^N (x_{j-1} + x_j - 2x_i)(x_i - x_0) + \omega \sum_{i=1}^N (x_i - x_0)^2 + \quad (123)$$

$$+ \kappa \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}) = 2 \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) \sum_{j=1}^i \ell_j \Phi_j - 2 \sum_{i=1}^N y_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$\xi \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^N \delta_j \sum_{i=j}^N (x_{j-1} + x_j - 2x_i) \sum_{\ell=1}^i C_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) +$$

$$+ \omega \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) \sum_{\ell=1}^i C_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) + \kappa \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\ell=1}^i C_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right\}^2 =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}) \right\} \sum_{j=1}^i \ell_j \Phi_j - 2 \sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^i C_j (x_j - x_{j-1}), \quad (124)$$

которая, благодаря замене (120), имеет матрицу (Q) в симметрической форме. Столбец (Г) имеет вид

$$(\Gamma) = \begin{pmatrix} \xi \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \omega \\ \kappa \end{pmatrix} \quad (125)$$

Дисперсия D_ω величины ω запишется как

$$D_\omega = D_\epsilon \sum_{i=0}^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \omega}{\partial \delta_i} \right)^2 D\delta_i, \quad (126)$$

где

$$\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_i} = \sum_{j=0}^N \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \epsilon_i}, \quad (127)$$

учитывая (43), получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial \omega}{\partial y_i} = R_{N+2, i+2}, \quad (128)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \delta_i} = \sum_{j=0}^N \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i} = \sum_{j=0}^N \frac{R_{N+2, j+2}}{R_{i+1, j+2}}, \quad (129)$$

Аналогично вычисляются

$$D_\kappa = D_\epsilon \sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \delta_i} \right)^2 D\delta_i, \quad (130)$$

где

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial \kappa}{\partial y_i} = R_{N+2, i+2}, \quad (131)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \delta_i} = \sum_{j=0}^N \frac{\partial \kappa}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i} = \sum_{j=0}^N \frac{R_{N+2, j+2}}{R_{i+1, j+2}}, \quad (132)$$

$$k_{\omega\kappa} = D \sum_{i=0}^N \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_i} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega}{\partial \delta_i} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \delta_i} D\delta_i. \quad (133)$$

Окончательно дисперсия D_α и D_β искомого величин $\alpha = \alpha^* + A$ и $\beta = \beta^* + b$ и корреляция $k_{\beta\alpha}$ запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} D_a &= \kappa D_\kappa \\ D_\beta &= \kappa D_\omega \\ \kappa \beta_a &= \kappa \kappa_{\omega\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Определение начальных оценок импульса, кривизны и угла β .

Излагаемый ниже метод вычисления поправок ранее был успешно применен для частного случая в работе /11/.

Интегрируя уравнение движения в неоднородном магнитном поле с учетом торможения, мы получаем (см. (72)) зависимость между углом поворота β и плоской дугой s в виде разложения

$$\beta = \left(\frac{d}{ds}\beta\right)_a s + \kappa \left(\frac{d^2}{ds^2}\beta\right)_a s^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3}{ds^3}\beta\right)_a s^3. \quad (135)^x$$

Отсюда траектория, касательная к оси Ox_1 и проходящая через точку $(0,0)$, может быть записана как

$$\left. \begin{aligned} y_1(s) &= \int_0^s \sin \beta ds, \\ x_1(s) &= \int_0^s \cos \beta ds. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Перейдем в систему координат трека, в которой ось Ox проходит через первую и последнюю точки трека. Переход от системы координат $X_1 OY_1$ к системе координат XOY состоит просто в повороте на угол ϕ , как показано далее:

$$x = x_1 \cos \phi + y_1 \sin \phi,$$

где

$$y = -x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi,$$

$$\cos \phi = x_1(s_k) \cdot L^{-1},$$

$$\sin \phi = y_1(s_k) \cdot L^{-1},$$

$$L = [x_1^2(s_k) + y_1^2(s_k)]^{1/2}.$$

^{x)} Производные от β по s зависят от импульса, величины и неоднородности магнитного поля и ионизационных потерь частицы.

Аппроксимируем полученную траекторию параболой вида

$$y = a \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + c, \quad (137)$$

потребовав обращения в минимум функционала Q^2 :

$$Q^2 = \int_0^{s_k} \left[\gamma(s) - a \left(x(s) - \frac{L}{2}\right)^2 - c \right]^2 ds. \quad (138)$$

Следовательно, для определения параметров a и c имеем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q^2}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial Q^2}{\partial c} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Решая систему (139), получим

$$a = \frac{s_k \int_0^{s_k} \gamma(s) \left(x(s) - \frac{L}{2}\right)^2 ds - \int_0^{s_k} \gamma(s) ds \int_0^{s_k} \left(x(s) - \frac{L}{2}\right)^2 ds}{s_k \int_0^{s_k} \left(x(s) - \frac{L}{2}\right)^4 ds - \left[\int_0^{s_k} \left(x(s) - \frac{L}{2}\right)^2 ds \right]^2}. \quad (140)$$

Проведем аппроксимацию методом наименьших квадратов экспериментально измеренных точек $(x_i, y_i) i = 0, \dots, N$, параболой вида (137).

В результате аппроксимации получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{\text{э}} &= \frac{(N+1) \sum_{i=0}^N y_i \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2 - \sum_{i=0}^N y_i \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2}{(N+1) \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^4 - \left[\sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2 \right]^2}, \\ c_{\text{э}} &= \frac{\sum_{i=0}^N y_i \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^4 - \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2 \sum_{i=0}^N y_i \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2}{(N+1) \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^4 - \left[\sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{L}{2}\right)^2 \right]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

(значком "э" отмечено значение a , получаемое экспериментально при аппроксимации измеренных точек).

Если измеренные точки располагаются достаточно равномерно (в среднем) на треке, а относительная неоднородность магнитного поля и относительные потери импульса на ионизацию малы, то без большой ошибки можно положить

$$a_{\text{э}} = a. \quad (142)$$

Учитывая, что правая часть (142) есть функция от импульса, магнитного поля и потерь на ионизацию, получим, обозначая

$$a = F(P, H_x, H_y, \frac{d}{ds} H_x, \frac{d}{ds} H_x, \frac{d}{ds} H_y, \dots, \frac{dP}{ds}, \frac{d^2 P}{ds^2}, s_k), \quad (143)$$

неявно заданную функцию от P в виде

$$a_{\ominus} = F(P, H_x, H_y, \dots, \frac{dP}{dS}, \frac{d^2P}{dS^2}, a_k), \quad (144)$$

где магнитное поле и его производные берутся в первой точке траектории, а производные $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ - при начальном импульсе.

Разрешая выражение (144) относительно P , получим после несложных, но весьма громоздких выкладок

$$\begin{aligned} P = P_{\ominus} &+ \left\{ \frac{0,15}{\cos^2 a} (H'R + \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{BD}{H} + 2B \cdot \sin a) - \frac{1}{2 \cos a} \cdot \left(\frac{dP}{dS} \right) \right\} a_k + \\ &+ \frac{0,3}{7 \cos^2 a} \left\{ \frac{2}{\cos^2 a} \cdot \frac{BD'}{H} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot \frac{BH'}{H} + 3 \operatorname{tg} a \cdot B' + \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{B'D}{H} - \frac{5}{6} \left(\frac{dP}{dS} \right) \frac{H'}{H} + \right. \\ &+ \left. \frac{25}{9} \cdot \frac{\cos a}{R_{\ominus}} \left(\frac{dP}{dS} \right)^2 \frac{1}{H} - \frac{10}{3} \cdot \frac{d^2P}{dS^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{BDH'}{H^2} + \frac{R_{\ominus}}{\cos a} \cdot H'' + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R_{\ominus}} \left(\frac{2}{\cos a} + \cos a \right) \frac{B^3}{H} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{R_{\ominus} \cdot \cos^2 a} \cdot \frac{B^2 D^2}{H^2} - \frac{\operatorname{tg} a \cdot B^2 D}{R \cdot \cos a \cdot H^2} - \frac{1}{R_{\ominus} \cdot \cos a} \cdot \frac{D^2}{H} - \right. \\ &- \left. \frac{2 \sin a}{R_{\ominus}} \cdot D + \frac{3}{8} \cdot \frac{\cos a}{R_{\ominus}} \cdot H + \frac{5}{8 R_{\ominus} \cdot \cos a} \cdot \left(\frac{dP}{dS} \right) \frac{BD}{H^2} \right\} a_k^2, \quad (145) \end{aligned}$$

где

$$P_{\ominus} = \frac{0,3 R_{\ominus}}{\cos a} [H_x \cdot \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta] \operatorname{tg} a - H_x,$$

$$R_{\ominus} = \frac{1}{2 a_{\ominus}},$$

$$B = H_y \cdot \cos \beta - H_x \cdot \sin \beta,$$

$$B' = \frac{dH_y}{dS} \cdot \cos \beta - \frac{dH_x}{dS} \cdot \sin \beta,$$

$$D = H_x \cdot \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta,$$

$$D' = \frac{dH_x}{dS} \cdot \cos \beta + \frac{dH_y}{dS} \cdot \sin \beta,$$

$$H = (H_x \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta) \operatorname{tg} a - H_x,$$

$$H' = \left(\frac{dH_x}{dS} \cdot \cos \beta + \frac{dH_y}{dS} \cdot \sin \beta \right) \operatorname{tg} a - \frac{dH_x}{dS},$$

$$H'' = \left(\frac{d^2 H_x}{dS^2} \cos \beta + \frac{d^2 H_y}{dS^2} \cdot \sin \beta \right) \operatorname{tg} a - \frac{d^2 H_x}{dS^2}.$$

$$[H] = \kappa r c$$

Пренебрегая малыми членами в (145), получаем:

$$\begin{aligned} P = P_{\ominus} &+ \left[\frac{0,15}{\cos^2 a} (H'R_{\ominus} + \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{BD}{H} + 2B \cdot \sin a) - \frac{1}{2 \cos a} \left(\frac{dP}{dS} \right) \right] a_k + \\ &+ \frac{0,3}{7 \cos^2 a} \left[\frac{R_{\ominus}}{\cos a} H'' - \frac{10}{3} \cdot \frac{d^2P}{dS^2} + 3 \operatorname{tg} a \cdot B' - \frac{2 \sin a}{R_{\ominus}} \cdot D + \frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot \frac{BH'}{H} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{B'D}{H} + \frac{2}{\cos^2 a} \cdot \frac{BD'}{H} + \frac{3}{8} \frac{\cos a}{R_{\ominus}} \cdot H \right] a_k^2. \quad (145)^* \end{aligned}$$

При вычислении импульса P по формулам (145) или (145^{*}) следует иметь в виду, что величины $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ должны быть взяты при неизвестном начальном значении импульса P_0 . Но в нашем распоряжении есть только величина P_{\ominus} . Поэтому можно построить итерационный процесс:

1. Вычислить $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ при значении импульса P_{\ominus} и для этих значений $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ по формуле (145) или (145^{*}) вычислить $P^{(1)}$.
2. Вычислить $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ при значении импульса $P^{(1)}$ и для этих значений $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ вычислить по формуле (145) или (145^{*}) значение $P^{(2)}$ и т.д., пока не будет выполнено неравенство:

$$|P^{(1)} - P^{(1+1)}| < \epsilon,$$

где ϵ - некоторое малое число.

Практически достаточно делать только одну итерацию и то только для медленных частиц.

Если же производные $\frac{dP}{dS}$ и $\frac{d^2P}{dS^2}$ разложить в точке $P = P_0$ с удержанием только линейных членов, затем решить полученное линейное уравнение относительно P и пренебречь малыми членами, то (145*) примет вид:

$$P = P_0 + \left[\frac{0,15}{\cos^2 \alpha} (H' R_0 + \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{BD}{H} + 2B \cdot \sin \alpha) - \frac{\tilde{L}}{2 \cos \alpha} \right] s_k + \frac{0,3}{7 \cos^2 \alpha} \left(\frac{R_0}{\cos \alpha} H'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \frac{BH'}{H} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{B'D}{H} + 3 \operatorname{tg} \alpha \cdot B' - \frac{2 \sin \alpha}{R_0} \cdot D + \frac{2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{BD'}{H} + \frac{3}{8} \frac{\cos \alpha}{R_0} H + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \tilde{L} M + \frac{7}{4} \frac{R_0}{\cos \alpha} H' M \right) s_k^2, \quad (146)$$

где

$$\tilde{L} = \frac{dP}{dS} \Big|_{P=P_0} = - \frac{P_0}{|P_0|} \left| \frac{B_1}{v_0} (B_2 + 2 \ln \frac{v_0 E_0}{M} - v_0^2) \right|,$$

$$\tilde{M} = \frac{\frac{d^2P}{dS^2} \Big|_{P=P_0}}{\frac{dP}{dS} \Big|_{P=P_0}} = \frac{2 B_1 (v_0^2 M^2 - E_0^2)}{E_0^3 v_0^4} - \frac{3 M^2}{v_0 E_0^3} \tilde{L},$$

$$v = \frac{P_0}{E_0},$$

$$E_0 = \sqrt{P_0^2 + M^2}.$$

M - масса покоя частицы в Мэв/с²,

B_1 и B_2 - константы в известной формуле ионизационных потерь (ср., например, с /8/), $B_1 > 0$.

Выражения для углов α и β , используемых в (145-146), могут быть получены по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum_{i=0}^N x_i \sum_{i=0}^N \theta_i - (N+1) \sum_{i=0}^N x_i \theta_i}{R_0 \left[\left(\sum_{i=0}^N \theta_i \right)^2 - (N+1) \sum_{i=0}^N \theta_i^2 \right]}, \quad (147)$$

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{L}{2(L_0 + c)}, \quad (148)$$

β берется в системе координат трека (рис. 1),

$$\text{где } R_0 = \frac{1}{2a}, \\ \theta_1 = \operatorname{arcsin} \frac{x - \frac{L}{2}}{R_0}.$$

За начальные параметры (отмеченные * в формулах (11), (12) и (32)) принимаем:

1) Импульс $P_0^* = P$ - по формуле (145*) (если нужно, то после одной итерации, как указано выше).

2) Кривизну a^* - по формуле

$$a^* = P^{-1} \cdot 0,3 \cdot H \cdot \cos^{-1} \alpha,$$

где H определено в (145).

3) Угол $\beta_0^* = \beta$ - по формуле (148).

4) Угол $\alpha_0^* = \alpha$ - по формуле (147).

Замечание: Дальнейшее уточнение начальной оценки импульса и начальной оценки угла β можно получить, решая систему уравнений (121), (123) и (124), положив все $\delta_i = 0$, что равносильно решению уравнений движения без учета многократного кулоновского рассеяния. Уточнение начальной оценки угла α можно провести по аналогичной схеме.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Численная оценка дисперсий кривизны и угла

Для определения оценок рассмотрим следующую модель:

1. Измеренные точки расположены на треке, на расстоянии l друг от друга.
2. В отсутствие многократного рассеяния траектория описывается уравнением

$$y = x \beta_0 + \frac{1}{2} a x^2, \quad (149)^x \\ y_0 = T_0 + \epsilon_0 = 0.$$

x) Напоминаем, что в выбранной системе координат (см. сноску на стр. 4) экспериментальное значение координаты $y_0 = 0$.

3) Величину $(\beta_0 + ax)$ считаем настолько малой для рассматриваемых X , что можем положить

$$\begin{aligned} \cos(\beta_0 + ax) &\approx 1, \\ \sin(\beta_0 + ax) &\approx \beta_0 + ax. \end{aligned} \quad (150)$$

Из выражения (149) с учетом (150) следует, что можно положить

$$R_0 = \frac{1}{a}.$$

где R_0 - радиус кривизны траектории (в начальной точке).

В сделанных предположениях выражения для условий связи (сравни с (43)) будут

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= -T_0, \\ \epsilon_1 &= \gamma_1 + \epsilon_0 - l\beta_0 - \frac{l^2 a}{2} - \frac{1}{2} l \delta_1, \\ \epsilon_2 &= \gamma_2 + \epsilon_0 - 2l\beta_0 - 2\frac{l^2 a}{2} - \frac{3}{2} l \delta_1 - \frac{1}{2} l \delta_2, \\ \epsilon_3 &= \gamma_3 + \epsilon_0 - 3l\beta_0 - 4,5\frac{l^2 a}{2} - \frac{5}{2} l \delta_1 - \frac{3}{2} l \delta_2 - \frac{1}{2} l \delta_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (151)$$

где δ_i - угол многократного рассеяния на интервале между точками $(i-1, i)$.

Функция правдоподобия L_1 имеет вид (45)

$$L_1 = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i^2}{D_\epsilon} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{D_\delta} \right] \right\},$$

где под ϵ_i понимается (151).

Условия экстремума L_1 имеют вид (46-49)

$$\frac{\partial L_1}{\partial \epsilon_0} = 0, \quad (152)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \beta} = 0, \quad (153)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial a} = 0, \quad (154)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (155)$$

Выполнив указанные дифференцирования и разрешив (155) относительно ϵ , приведем систему (152-155) к виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^N \epsilon_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^N i \epsilon_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} i^2 \epsilon_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= g(1\delta_1 - 3\delta_2 + 4\delta_3 - 4\delta_4 + 4\delta_5 - \dots), \\ \epsilon_2 &= g(0 + 1\delta_2 - 3\delta_3 + 4\delta_4 - 4\delta_5 + \dots), \\ \epsilon_3 &= g(0 + 0 + 1\delta_3 - 3\delta_4 + 4\delta_5 - \dots), \\ \epsilon_4 &= g(0 + 0 + 0 + 1\delta_4 - 3\delta_5 + \dots), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

где

$$g = \frac{2D_\epsilon}{lD_\delta},$$

$$D_\delta = \left(\frac{12}{P^2 v}\right)^2 \frac{l}{X_0},$$

$$[Pv] = \text{Мэв/с}$$

v - скорость частицы в единицах c ,

X_0 - радиационная длина (для жидкого пропана ≈ 105 см).

Подставляя в (156) выражения (157) и в (157) выражения (151), получим систему

$$0 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4,$$

$$0 = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4,$$

$$0 = \delta_1 - 2\delta_2 + 2\delta_3 - 2\delta_4,$$

$$\gamma_1 = -\epsilon_0 + l\beta_0 + \frac{1}{2} l^2 a + \left(\frac{l}{2} + g\right) \delta_1 - 3g\delta_2 + 4g\delta_3 - 4g\delta_4,$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= -\epsilon_0 + 2l\beta_0 + 2l^2 a + \frac{3}{2}l\delta_1 + (\frac{l}{2} + g)\delta_2 - 3g\delta_3 + 4g\delta_4, \\
 y_3 &= -\epsilon_0 + 3l\beta_0 + 4,5l^2 a + \frac{5}{2}l\delta_1 + \frac{3}{2}l\delta_2 + (\frac{l}{2} + g)\delta_3 - 3g\delta_4, \\
 y_4 &= -\epsilon_0 + 4l\beta_0 + 8l^2 a + \frac{7}{2}l\delta_1 + \frac{5}{2}l\delta_2 + \frac{3}{2}l\delta_3 + (\frac{l}{2} + g)\delta_4,
 \end{aligned}
 \tag{158}^x$$

Решение системы (158) представляется в виде

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{i=1}^N A_i \cdot y_i, \\
 \beta_0 &= \sum_{i=1}^N B_i \cdot y_i,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{D^{(1,8)}}{\text{Det}}, \\
 B_i &= \frac{D^{(1,2)}}{\text{Det}},
 \end{aligned}$$

Det - определитель системы (158),

$D^{(1,2)}$, $D^{(1,8)}$ - адьюнкты, полученные из (158).

Учитывая, что измеренные величины (y_i) выражаются в виде

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \epsilon_1 - \epsilon_0 + l\beta_0 + \frac{l^2 a}{2} + \frac{1}{2}l\delta_1, \\
 y_2 &= \epsilon_2 - \epsilon_0 + 2l\beta_0 + 2l^2 a + \frac{3}{2}l\delta_1 + \frac{1}{2}l\delta_2, \\
 y_3 &= \epsilon_3 - \epsilon_0 + 3l\beta_0 + 4,5l^2 a + \frac{5}{2}l\delta_1 + \frac{3}{2}l\delta_2 + \frac{1}{2}l\delta_3, \\
 y_4 &= \epsilon_4 - \epsilon_0 + 4l\beta_0 + 8l^2 a + \frac{7}{2}l\delta_1 + \frac{5}{2}l\delta_2 + \frac{3}{2}l\delta_3 + \frac{1}{2}l\delta_4.
 \end{aligned}$$

получим для дисперсии $D_a = (\Delta a)^2$ следующее выражение:

$$D_a = \left[\left(\sum_{i=1}^N A_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N A_i^2 \right] D_\epsilon + \left[\sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=j+1}^N A_i \frac{2(i-j)-1}{2} \right)^2 \right] (l^2 D_\delta). \tag{158}$$

Дисперсия $(\Delta\beta)^2$ может быть найдена аналогично.

^{x)} Из (158) сразу видно, что $\delta_1 = 0$.

Таблица 2

$\frac{D(\Delta a)}{S^2(\epsilon)}$	1	2	4	8	15	30
25	$\frac{0,587 \cdot 10^{-8}}{0,674 \cdot 10^{-7}}$ $\frac{0,733 \cdot 10^{-7}}{0,211 \cdot 10^{-7}}$	$\frac{0,294 \cdot 10^{-8}}{0,182 \cdot 10^{-7}}$ $\frac{0,561 \cdot 10^{-9}}{0,816 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,238 \cdot 10^{-8}}{0,472 \cdot 10^{-8}}$ $\frac{0,246 \cdot 10^{-9}}{0,219 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,233 \cdot 10^{-8}}{0,121 \cdot 10^{-8}}$ $\frac{0,587 \cdot 10^{-9}}{0,745 \cdot 10^{-9}}$	$\frac{0,233 \cdot 10^{-8}}{0,348 \cdot 10^{-9}}$ $\frac{0,147 \cdot 10^{-9}}{0,172 \cdot 10^{-9}}$	$\frac{0,233 \cdot 10^{-8}}{0,872 \cdot 10^{-10}}$ $\frac{0,242 \cdot 10^{-8}}{0,189 \cdot 10^{-9}}$
50	$\frac{0,133 \cdot 10^{-8}}{0,311 \cdot 10^{-7}}$ $\frac{0,324 \cdot 10^{-7}}{0,872 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,130 \cdot 10^{-9}}{0,382 \cdot 10^{-8}}$ $\frac{0,395 \cdot 10^{-8}}{0,104 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,538 \cdot 10^{-10}}{0,993 \cdot 10^{-9}}$ $\frac{0,128 \cdot 10^{-10}}{0,471 \cdot 10^{-9}}$	$\frac{0,229 \cdot 10^{-10}}{0,263 \cdot 10^{-9}}$ $\frac{0,286 \cdot 10^{-9}}{0,924 \cdot 10^{-10}}$	$\frac{0,120 \cdot 10^{-10}}{0,804 \cdot 10^{-10}}$ $\frac{0,237 \cdot 10^{-11}}{0,360 \cdot 10^{-10}}$	$\frac{0,939 \cdot 10^{-11}}{0,212 \cdot 10^{-10}}$ $\frac{0,103 \cdot 10^{-11}}{0,967 \cdot 10^{-11}}$
100	$\frac{0,745 \cdot 10^{-10}}{0,731 \cdot 10^{-8}}$ $\frac{0,740 \cdot 10^{-8}}{0,188 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,313 \cdot 10^{-10}}{0,185 \cdot 10^{-8}}$ $\frac{0,185 \cdot 10^{-8}}{0,188 \cdot 10^{-8}}$	$\frac{0,128 \cdot 10^{-10}}{0,471 \cdot 10^{-9}}$ $\frac{0,484 \cdot 10^{-9}}{0,484 \cdot 10^{-9}}$	$\frac{0,522 \cdot 10^{-11}}{0,126 \cdot 10^{-9}}$ $\frac{0,126 \cdot 10^{-9}}{0,126 \cdot 10^{-9}}$	$\frac{0,237 \cdot 10^{-11}}{0,360 \cdot 10^{-10}}$ $\frac{0,360 \cdot 10^{-10}}{0,360 \cdot 10^{-10}}$	$\frac{0,103 \cdot 10^{-11}}{0,967 \cdot 10^{-11}}$ $\frac{0,107 \cdot 10^{-10}}{0,107 \cdot 10^{-10}}$

Для сравнения с $(\Delta a)^2$ кривизна a может быть определена по формуле

$$a = \frac{300 \text{ Н} \cdot 10^{-3}}{P}, \quad [a] = (\text{см.}^{-1})$$

где импульс P выражается через Pv по формуле

$$P = (Pv) \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{M^2}{(Pv)^2}}}{2}}, \quad [P] =$$

где M — масса частицы в $(\frac{\text{МэВ}}{c})$

$$[H] = (\text{кгс})$$

В таблице 2 дана зависимость дисперсии кривизны D_a (см.^{-2}) от величины Pv ($\frac{\text{ГэВ}}{c}$) и длины трека S (см.).

Приведенные значения вычислены для пропана (радиационная длина $X_0 = 105 \text{ см.}$), дисперсия измерительных ошибок в пространстве камеры принята равной $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}^2$, на следе измерена 21 равномерно расположенная точка.

Для каждого значения Pv и S приводятся три величины (в порядке следования сверху вниз),

$$\text{где } D_a = D_a^{(\epsilon)} + D_a^{(\delta)} \quad (\text{см. 159}),$$

$D_a^{(\epsilon)}$ — первый член в формуле (159),

$D_a^{(\delta)}$ — второй член в формуле (159).

Авторы признательны А.Ф. Лукьянцеву, С.Н. Соколову, Г.Н. Тентюковой за полезные обсуждения, а также В.И. Никитиной за помощь в проведении численных расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н. Говорун, И.В. Попова, Л.А. Смирнова, Т.В. Рыльцева, В.А. Никитин, А.А. Номофилов, В.А. Свиридов, Л.А. Слепец, И.М. Ситник, Л.Н. Струнов. Методика обработки следов частиц малой энергии, получаемых в камере Вильсона. Препринт ОИЯИ, 2036, Дубна, 1965.

2. В.Ф. Вишневецкий, Ду Юань-цай, А.Ф. Лукьянцев, В.И. Мороз, А.В. Никитин, Г.Н. Тентюкова, Ю.А. Троян, Цзянь Шао-цзюнь, Чжан Вэнь-юй, Б.А. Шахбазян, Янь У-гуан. Схема обработки треков в пузырьковой камере, сфотографированных двухобъективной стереоголовкой. Препринт ОИЯИ, Р-1468, Дубна, 1963;

О.В. Благородова, З.М. Иванченко, А.Ф. Лукьянцев, В.И. Мороз, Н.С. Новикова, Г.Н. Тентюкова, Шень Чун-хуа. Программа геометрической реконструкции для пропановой камеры, сфотографированной двухобъективной стереоголовкой. Препринт ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.

3. Е.Н. Кладницкая. Программа для анализа событий на электронно-счетной машине "Киев". Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.

4. Н.А. Бузлавина, З.М. Иванченко, В.Г. Иванов, И. Паточка, М.И. Попов. Геометрическая программа для метровой пропановой пузырьковой камеры. Препринт ОИЯИ, 2095, Дубна, 1965;

Р.В. Малышев. Методика определения импульса заряженной частицы в неоднородном магнитном поле. Препринт ОИЯИ, Р-2371, Дубна, 1965.

5. THRESH. CERN, DD|EXP|63|12, 22.4. 1963. The IBN-709 Program for the Geometrical Reconstruction of Events in Bubble Chambers.

6. И.М. Граменицкий, Л.А. Тихонова, П.В. Шляпников. Новый метод учета кулоновского рассеяния при обработке камерных треков. Препринт ОИЯИ, Р-2146, Дубна, 1965

7. Ю.А. Будагов, В.П. Желепов, Р.В. Малышев, В.Б. Флягин, П.В. Шляпников. Определение кинематических параметров треков в пузырьковых камерах с учетом кулоновского рассеяния и тормозного излучения. Препринт ОИЯИ, 2668, Дубна, 1966.

8. Б. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, М, 1948.

9. Основные формулы физики. Составлено группой авторов под редакцией Д. Мензела. ИЛ, М, 1957.

10. Ю.В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, М., 1958.

11. В.Г. Гришин, Э.П. Кистенев, Л.И. Лепилова, В.И. Мороз, Му Цзюнь. Измерение энергетических и угловых характеристик электронов и γ -квантов в пропановой пузырьковой камере. Препринт ОИЯИ, Р-2277, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1966 г.

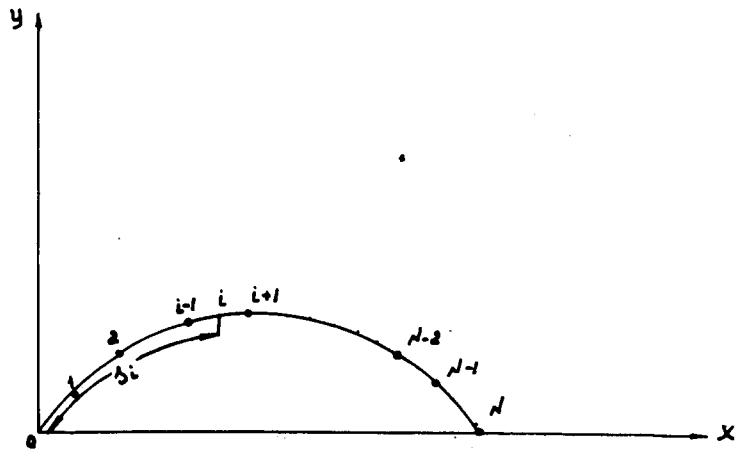


Рис. 1. Распределение точек на треке. i -тый интервал - от $(i-1)$ -ой до i -той точки).

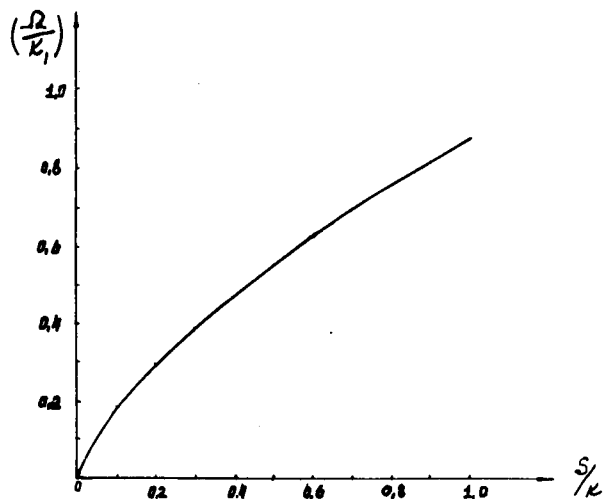


Рис. 2. Соотношение пробег (S - см) - угол поворота (Ω - радианы) для разных частиц в пропановой ($d = 0,427 \text{ г/см}^3$) пузырьковой камере в водородной ($d = 0,0585 \text{ г/см}^3$) пузырьковой камере при $H = 18 \text{ кгс}$.

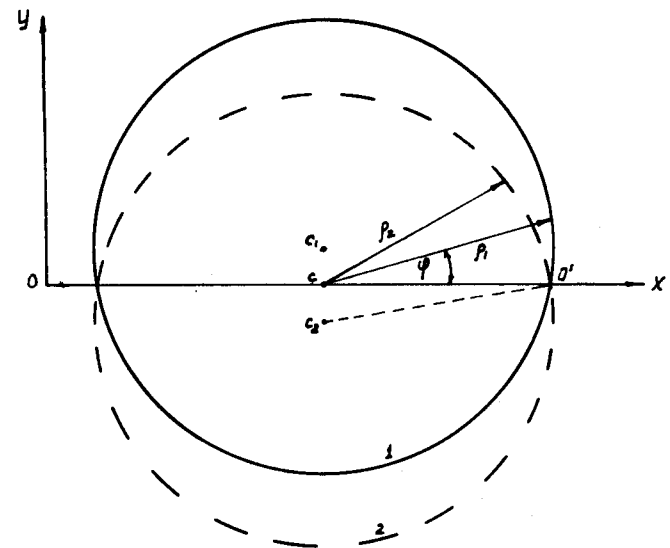


Рис. 3. Движение нетормозящейся частицы в однородном магнитном поле, направленном по оси Z . Начальная траектория - окружность 2 с центром C_2 . После рассеяния в точке O' на угол ψ частица движется по окружности 1 с центром C_1 .