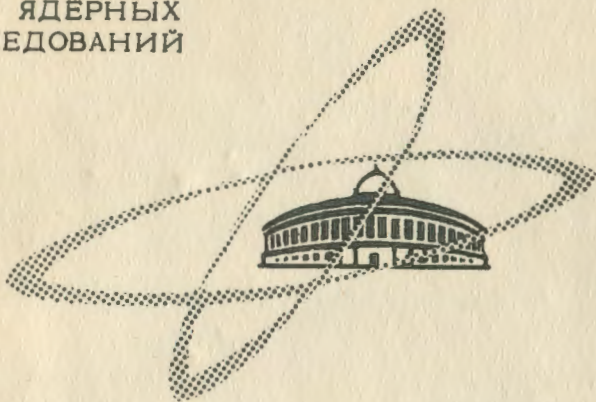


К-659

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2797



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Г.И. Копылов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА
НЕСТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПО ИХ РАСПАДАМ

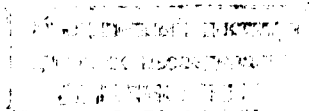
1966

P - 2787

Г.И. Копылов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА
НЕСТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПО ИХ РАСПАДАМ

Направлено в журнал "Ядерная физика"



4379/3 чр

Пусть имеется пучок нестабильных частиц A . Энергетические и угловые распределения частиц, возникающих при распаде частиц A , определяются энергетическим спектром частиц A . Получаются интегральные уравнения, из которых можно определить энергетический спектр пучка. Оказывается, вместо обычных энергетических переменных можно для этой цели воспользоваться так называемой быстротой и продольной быстротой — аргументами гиперболических функций, связываемых с энергией и продольным импульсом частицы. Тогда интегральные уравнения приобретают особо простой вид. Выводу подобных уравнений и посвящена в основном эта статья. Отметим, что спектр быстрот (энергий) восстанавливается и тогда, когда направления на первичных, на вторичных частиц не известны^{/1/}.

§ 1. Введение удобных переменных

Если ограничиться преобразованиями Лоренца для систем, движущихся в одном и том же направлении, то поперечные компоненты импульсов будут сохраняться, и вместо обычных 4-инвариантов можно ввести 2-инварианты

$$P_1 P_2 \equiv E_1 E_2 - \Pi_1 \Pi_2 = \text{Const.}, \quad (1)$$

где Π — продольная компонента импульса, E — энергия.

Рассмотрим, пользуясь 2-инвариантами, распад частицы A на частицы 1 и 2 с импульсами P, P_1, P_2 , энергиями E, E_1, E_2 и массами M, m_1, m_2 . Приравняем 2-инвариант PP_1 в лабораторной системе его значению в системе покоя частицы A

$$EE_1 - \Pi\Pi_1 = \bar{E}\bar{E}_1 - \bar{\Pi}\bar{\Pi}_1 \equiv M\bar{E}_1, \quad (2)$$

(где $\bar{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$).

Так же поступим с 2-инвариантом P_1^2

$$E_1^2 - \Pi_1^2 = \bar{E}_1^2 - \bar{\Pi}_1^2 (= m_{1\parallel}^2) \quad (3)$$

и с 2-инвариантом $P_1 P_2$

$$E_1 E_2 - \Pi_1 \Pi_2 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 - \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2. \quad (4)$$

Вместо энергии и импульса будем характеризовать движение частицы A ее скоростью u

$$E = M c h u, \quad P = M s h u, \quad (5)$$

$$u = \ln \frac{E+P}{M} = \frac{1}{2} \ln \frac{E+P}{E-P}. \quad (6)$$

Вместо энергии и продольного импульса будем характеризовать движение частицы 1 (или 2) ее продольной скоростью V_1 (V_2):

$$E_1 = m_{1\parallel} c h v_1, \quad \Pi_1 = m_{1\parallel} s h v_1, \quad (7)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{E_1 + \Pi_1}{E_1 - \Pi_1}. \quad (8)$$

Тогда из (2) и (4) следует, что при преобразованиях Лоренца вдоль направления частицы A остаются неизменными разности $v_1 - u$ и $v_1 - v_2$. В частности, сопоставление лабораторной системы отсчета с системой покоя частицы A (где $u=0$) приводит к

$$v_1 - u = \bar{v}_1, \quad (9)$$

где

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{E}_1 + \bar{\Pi}_1}{\bar{E}_1 - \bar{\Pi}_1}. \quad (10)$$

Пусть на опыте измеряется в каждом распаде только вектор импульса частицы 1 и направление частицы A . Пусть, кроме этого, известны массы частиц M, m_1, m_2 . Тогда можно по (8) вычислить продольную скорость V_1 частицы 1, а из (3) определить $\bar{\Pi}_1$ с точностью до знака. Значит, из (10) с точностью до знака определится продольная скорость \bar{v}_1 частицы 1 в системе покоя частицы A . Тогда скорость u частицы A , определяемая (см. (9)) формулой

$$u = v_1 - \bar{v}_1, \quad (11)$$

будет на самом деле определяться двузначно: так как знак \bar{v}_1 не известен^{x)}, то не ясно, равна ли скорость $v - |\bar{v}|$ или $v + |\bar{v}|$. Одна из этих формул дает истинное значение скорости u , другая - ложное u' , но какая именно - неизвестно. Однако мы видим, что между истинной и ложной скоростью существует простая связь

$$u + u' = 2v. \quad (12)$$

Прежде чем переходить к выводу уравнения, отметим еще один факт: хотя $\bar{\Pi}_1$ в каждом распаде известно с точностью до знака, это не мешает определять в каждом событии модуль косинуса угла вылета частицы 1 в системе покоя A

$$|\bar{\eta}| = \frac{\sqrt{\bar{E}_1^2 - (E_1^2 - \Pi_1^2)}}{\sqrt{\bar{E}_1^2 - m_1^2}}, \quad (13)$$

то есть, не умея однозначно переходить в систему покоя A , мы все же в состоянии получить угловое распределение в этой системе, если известно, что оно симметрично относительно $\bar{\eta} = 0$. Все это безотносительно к энергетическому распределению частиц A .

§ 2. Моноэнергетический пучок

Пусть имеется моноэнергетический пучок частиц A . Пусть угловое распределение частиц 1 в системе покоя A имеет вид $\frac{dn}{d\bar{\eta}} = f(\bar{\eta})$, где $\bar{\eta}$ - косинус угла вылета частицы 1 относительно направления частицы A . Функция $f(\bar{\eta})$ может быть известна теоретически, но если она не известна, то формула (13) позволит установить вид $f(\bar{\eta})$ и экспериментально, даже если спектр u и не известен.

Распределение $f(\bar{\eta})$ легко пересчитать на распределение частиц 1 по продольным скоростям. Для этого сперва из (10) выразим $\bar{\eta}$ через \bar{v}

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{P}_1} \text{th } \bar{v} = c \text{th } W \text{ th } \bar{v}, \quad (14)$$

где W - это предельное значение \bar{v}

$$W = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1}{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}. \quad (15)$$

^{x)} Начиная с этого места, мы не будем писать v_1, \bar{v}_1 со значком 1.

Теперь плотность распределения по \bar{v}

$$K(\bar{v}) = \frac{dn}{d\bar{v}} = \frac{dn}{d\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{v}} = f(\bar{\eta}) \operatorname{cth} W \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \bar{v}} =$$

$$= f(\operatorname{cth} W \operatorname{th} \bar{v}) \frac{2 \operatorname{cth} W}{1 + \operatorname{ch} 2\bar{v}}; \quad (-W \leq \bar{v} \leq W) \quad (16)$$

Например, при изотропии ($f = 1/2$) распределение имеет вид, показанный на рис. 1.

Распределение по V при постоянном u тоже имеет такой же вид, но сдвинуто (см. (9)) в сторону, к точке u (рис. 2):

$$\frac{dn}{dv} = K(v-u); \quad (u-W \leq v \leq u+W). \quad (17)$$

Наконец, распределение ложных значений скорости частицы A в моноэнергетическом пучке таких частиц тоже имеет такой же вид, но растянуто вдвое (рис. 3).

$$\frac{dn}{du'} = \frac{1}{2} K\left(\frac{u+u'}{2} - u\right) \equiv \frac{1}{2} K\left(\frac{u'-u}{2}\right); \quad (18)$$

$$(u-2W \leq u' \leq u+2W).$$

§ 3. Немонорезонансный пучок. Интегральные уравнения для $N(u)$.

Пусть теперь плотность (распределение) скоростей u в пучке есть $N(u)$. В каждом распаде мы измеряем продольную скорость V и строим спектр $\nu(V)$. Свяжем $\nu(V)$ с $N(u)$. Ясно, что суммарный спектр скоростей V получится как сумма спектров V для каждой отдельной скорости u , взятых с весом, пропорциональным вероятности этого значения u

$$\nu(V) = \int K(V-u) N(u) du.$$

Пределы здесь еще подлежат определению. Если спектр u простирается от $-\infty$ до $+\infty$, то с ростом u данное значение V впервые появится в спектре, когда правый конец спектра $K(V-u)$ достигнет точки V , т.е. при $u=V-W$, а в последний раз V появится тогда, когда левый конец спектра V поравняется с V , т.е. при $u=V+W$. Таким образом,

$$\nu(V) = \int_{V-W}^{V+W} K(V-u) N(u) du. \quad (19)$$

Если же спектр u заключен в пределах (α, β) , то нижним пределом интеграла будет большее из чисел α и $V-W$, а верхним - меньшее из чисел β и $V+W$. Это видно из рис. 4, где отмечена зависимость V_{\max} и V_{\min} от u .

В работе^{12/} предлагается другой путь определения $N(u)$: в каждом событии, после того как найдено V , вычисляются оба значения скорости, истинное u и ложное u' , отбрасываются те u' , которые выходят за допустимый интервал значений u и строится суммарное распределение $\nu(u)$ по оставшимся значениям u и u' . Выведем интегральное уравнение для такого спектра. Для каждого u спектр ложных значений дается формулой (18). Спектр ложных значений, проинтегрированный по всем u , примет вид

$$\frac{dn}{du'} = \int \frac{1}{2} K\left(\frac{u'-u}{2}\right) N(u) du. \quad (20)$$

Если считается, что у u, u' допустимы только значения из интервала (α, β) , то (см. рис. 5) нижний предел здесь $\max(\alpha, u'-2W)$, верхний $\min(\beta, u'+2W)$. Экспериментально замеряемый спектр $\nu(u)$ получится наложением на спектр ложных значений u истинного спектра, т.е. интегральное уравнение имеет вид

$$N(u) + \frac{1}{2} \int K\left(\frac{u-\xi}{2}\right) N(\xi) d\xi = \nu(u). \quad (21)$$

Рассмотрим для примера еще одну мыслимую процедуру построения спектра: определив в каждом событии u и u' , строить распределение по большему из них. Тогда для каждого истинного u ложный спектр тех u' , которые больше u , нормированный на 1, имеет вид $K\left(\frac{u'-u}{2}\right)$ в пределах $u \leq u' \leq u+2W$, а спектр ложных значений u' , проинтегрированный по u , будет

$$\int_{\max(u'-2W, 0)}^{u'} K\left(\frac{u'-u}{2}\right) N(u) du. \quad (22)$$

Для каждого истинного u половина u' будет меньше u и не войдет в спектр $\nu[\max(u', u)]$, вместо них войдет член $\frac{1}{2} N(u)$, а половина u' будет больше u , дав в спектре вклад (22), куда надлежит ввести вместо $N(u)$ число $\frac{1}{2} N(u)$.

В итоге получится новое уравнение

$$\frac{1}{2} N(u) + \frac{1}{2} \int_{\max(u-2W, 0)}^u K\left(\frac{u-\xi}{2}\right) N(\xi) d\xi = \nu(\max(u', u)). \quad (23)$$

Во всех этих уравнениях можно перейти от скоростей u, V к обычным энергиям, но при этом все усложнится.

§ 4. Обобщение на многочастичные распады

Такое обобщение в общем-то очевидно. Ядро K , как и прежде, будет давать спектр \bar{v} в системе покоя частицы A , усложнится только его вид; а переход в лабораторную систему отсчета будет в терминах быстрот по-прежнему прост. В простейших случаях ядро K может быть рассчитано аналитически; в принципе аналитический расчет возможен при любом виде матричного элемента распада; однако в сложных случаях лучше прибегнуть к методу Монте-Карло.

Обратимся сперва к распадам на три частицы, в которых известна масса всех частиц и регистрируются направление первичной частицы и векторы импульсов двух вторичных частиц 1 и 2 (пример: $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$). Вычислим в каждом событии суммарный импульс \bar{P}_1 и суммарную энергию E_1 двух видимых частиц, а затем их эффективную массу M_1 . Теперь уже можно говорить о распаде частицы A на две, причем масса M_1 первой из них переменна.

Пусть все первичные частицы A имели бы одну и ту же быстроту u , а из всех событий распада мы бы отобрали только те, у которых эффективная масса пары оказалась бы в узком интервале значений близ числа M_1 . Тогда распределение по продольной быстрой \bar{v} этой пары с фиксированной массой давалось бы формулой (16), где индекс 1 относится к паре частиц. Величины $\bar{E}_1, \bar{P}_1, \bar{v}$ зависят теперь от массы M_1 пары по известным формулам

$$\bar{E}_1 = \frac{M^2 + M_1^2 - m_3^2}{2M}, \quad \bar{P}_1 = \sqrt{\bar{E}_1^2 - M_1^2}, \quad \bar{v} = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1 \eta}{\bar{E}_1 - \bar{P}_1 \eta}. \quad (24)$$

Посмотрим, как зависит ширина $2W$ распределения $K(\bar{v})$ от массы M_1 . Когда масса M_1 наименьшая, $M_1 = m_1 + m_2$, то размах кривой, то есть величина $2W$, наибольший. С увеличением M_1 распределение сужается. Можно подсчитать, при каком M_1 некоторое \bar{v} окажется на краю распределения и при дальнейшем увеличении M_1 не сможет быть наблюдаемо. Это будет при

$$\frac{\bar{E}_1}{M_1} \equiv \frac{M^2 + M_1^2 - m_3^2}{2MM_1} = ch \bar{v},$$

т.е. при

$$M_1(\bar{v}) = M ch \bar{v} - \sqrt{M^2 sh^2 \bar{v} + m_3^2}. \quad (25)$$

Наконец, при $M_1 = M - m_3$ спектр вырождается в одну линию $\bar{v} = 0$.

Теперь представим, что мы суммируем распределение по \bar{v} для разных M_1 . Если M_1 распределены по закону $\omega(M_1)$, то спектр \bar{v} (обозначим его опять $K(\bar{v})$) станет таким:

$$K(\bar{v}) = \int_{m_1+m_2}^{M_1(\bar{v})} f(cth W th \bar{v}) \frac{2cth W}{1+ch 2\bar{v}} \omega(M_1) dM_1. \quad (26)$$

Остается только найти $\omega(M_1)$. Здесь-то и важен матричный элемент распада. Допустим для простоты, что он равен константе (так называемая гипотеза фазового объема). Тогда, пользуясь рекуррентной формулой для фазового объема n частиц при $n=3$

$$S_n(M_n) = \frac{2\pi}{M_n} \int_{\sum_1^{n-1} m_i}^{M_n - m_n} S_{n-1}(M_{n-1}) \bar{P}_n M_{n-1} dM_{n-1}$$

и формулой для фазового объема двух частиц, получим

$$\omega(M_1) = \frac{2\pi}{M} M_1 P_3 \frac{\pi}{2M_1^2} \sqrt{M_1^2 - (m_1+m_2)^2} \sqrt{M_1^2 - (m_1-m_2)^2}, \quad (27)$$

где

$$P_3 = \sqrt{M^2 - (M_1+m_3)^2} \sqrt{M^2 - (M_1-m_3)^2} / 2M.$$

В частности, при изотропном распределении пары в системе покоя A

$$K(\bar{v}) = \frac{1}{1+ch 2\bar{v}} \int_{m_1+m_2}^{M_1(\bar{v})} \frac{\pi^2}{MM_1} \frac{M^2 + M_1^2 - m_3^2}{2M} \sqrt{[M_1^2 - (m_1+m_2)^2]} \sqrt{[M_1^2 - (m_1-m_2)^2]} dM_1. \quad (28)$$

После нормировки K на 1 (ее лучше провести численно, так как формула для фазового объема трех частиц очень громоздка) этой функцией K можно пользоваться в качестве ядра интегральных уравнений § 3. На рис. 6 показан вид ядра K для распада $K \rightarrow 3\pi$, рассчитанного по (28)

$$K(\bar{v}) = \frac{\pi^2}{2M^2(1+ch 2\bar{v})} \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{M_1^2 - 4m^2} (2M^2 + M_1^2 - 4m^2) M_1 - 2m^2 M^2 \ln \frac{M_1 + \sqrt{M_1^2 - 4m^2}}{2m} \right\}, \quad (29)$$

где $M_1 = M_1(\bar{v})$.

Здесь стоит отметить следующее обстоятельство. Ядро $K(\vec{v})$ мы получили расчетом. Но величину $|\vec{v}|$ можно, по-прежнему, определять в каждом событии. Значит, и распределение $K(|\vec{v}|)$ можно получать из опыта. Если можно ожидать, что распределение $K(\vec{v})$ симметрично относительно $\vec{v} = 0$ (а это весьма естественное допущение), то тем самым из опыта определяется и $K(\vec{v})^x$. Таким образом, из одной и той же серии наблюдений определяется сперва $K(\vec{v})$, а затем - решением уравнений (18), и (21) - спектр $N(u)$. Такая же процедура возможна и при распаде на 4 частицы, если регистрируются три из них.

2) Спектр частот частицы A определим и тогда, когда в каждом распаде определяется вектор импульса только одной из нескольких (например, трех) вторичных частиц (частицы № 1) и направление первичной. Не входя в подробности, приведем окончательный вид ядра интегрального уравнения (19), из которого в этом случае можно определить $N(u)$. Если известный теоретически спектр масс остальных образуемых в распаде частиц есть $\omega(M_{23})$, то

$$K(\vec{v}) = \int_{m_2+m_3}^{M_{23}(\vec{v})} f(\text{cth } W \text{ th } \vec{v}) \frac{2 \text{cth } W}{1 + \text{ch } 2\vec{v}} \omega(M_{23}) dM_{23}, \quad (30)$$

где

$$M_{23}(\vec{v}) = \sqrt{M^2 + m_1^2 - 2Mm_1 \text{ch } \vec{v}}, \quad (31)$$

$$W = \frac{1}{2} \ln \frac{E_1 + P_1}{E_1 - P_1}, \quad \bar{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - M_{23}^2}{2M}, \quad \bar{P}_1 = \sqrt{\bar{E}_1^2 - m_1^2}, \quad (32)$$

а наибольшее \vec{v} получается из формулы для W при $M_{23} = m_2 + m_3$.
Опять в частном случае равномерной населенности фигуры Далица выходит

^{x)} Если же это не так, то вместо уравнений (19), (21) надо составить новые, куда будет входить только $K(|\vec{v}|)$. При этом в (19) нижний предел станет v_1 , а в (21) - $\max(\alpha, u')$. Теперь ядра уравнений целиком будут определяться экспериментально.

$$K(\vec{v}) = \frac{1}{1 + \text{ch } 2\vec{v}} \int_{m_2+m_3}^{M_{23}(\vec{v})} \frac{\pi^2}{MM_{23}} \frac{M^2 + m_1^2 - M_{23}^2}{2M} \sqrt{M_{23}^2 - (m_2 + m_3)^2} \sqrt{M_{23}^2 - (m_2 - m_3)^2} dM_{23} \quad (33)$$

Например, для $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$

$$K(\vec{v}) = \frac{1}{1 + \text{ch } 2\vec{v}} \frac{\pi^2}{2M^2} \left[\frac{1}{4} M_{23} \sqrt{M_{23}^2 - 4m^2} (2M^2 + 4m^2 - M_{23}^2) - 2m^2 M^2 \ln \frac{M_{23} + \sqrt{M_{23}^2 - 4m^2}}{2m} \right],$$

где $M_{23} = M_{23}(\vec{v})$ (рис. 7).

Но в отличие от случая, когда масса нерегистрируемых частиц считалась известной, теперь уже нет возможности в каждом наблюдаемом событии определить ни \vec{v} хотя бы с точностью до знака, ни u хотя бы двузначно. Уравнение (19) - единственное, из которого $N(u)$ можно получить.

§ 5. Иной тип уравнений

Рассмотрим теперь еще один тип уравнений, который иногда допускает и аналитическое решение. Он близок к уравнениям, исследованным нами ранее^{1/}, но в отличие от них использует информацию о направлении первичной частицы.

Пусть, как и прежде, наблюдая одну из двух вторичных частиц, измеряют ее вектор импульса, но теперь строят распределение по сумме энергии и продольного импульса частицы

$$s = E_1 + P_1 \eta. \quad (34)$$

Если обозначить сходную величину в системе покоя частицы A через

$$\bar{s} = \bar{E}_1 + \bar{P}_1 \bar{\eta}$$

и если ввести

$$\sigma = \frac{E + P}{M}, \quad (35)$$

то между s и \bar{s} будет простая связь

$$s = \sigma \bar{s}, \quad (36)$$

а распределение по S при фиксированном E и при изотропии распада будет Π -образным:

$$\frac{dn}{ds} = \frac{1}{2\bar{P}_1\sigma} \quad \text{в пределах от } \sigma(\bar{E}_1 - \bar{P}_1) \text{ до } \sigma(\bar{E}_1 + \bar{P}_1).$$

Распределение по S , когда величины σ простираются от 1 до некоторого наибольшего μ , имеет вид

$$\nu(s) = \int \frac{N(\sigma)d\sigma}{2\sigma\bar{P}_1}, \quad (37)$$

где нижний предел — это большее из чисел 1 и $s(\bar{E}_1 + \bar{P}_1)^{-1}$, а верхний — меньшее из чисел $s(\bar{E}_1 - \bar{P}_1)^{-1}$ и μ (рис. 8). Если $\mu \leq \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1}{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}$, то значение $s = \bar{E}_1 + \bar{P}_1$ будет покрыто всеми Π -образными спектрами; значит, в этой точке будет пик (или плато). По положению пика можно найти массу частицы A — свойство, давно известное для энергетических спектров. Спектр $E_1 + P_1 \eta$ дает независимое определение массы.

Восстановим спектр $N(\sigma)$. Если $s < \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1}{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}$, то из $\nu(s) = \int_1^{s(\bar{E}_1 - \bar{P}_1)^{-1}} \frac{N(\sigma)d\sigma}{2\sigma\bar{P}_1}$ следует

$$N(\sigma) = 2\bar{P}_1(\bar{E}_1 - \bar{P}_1)\sigma \nu'(\sigma(\bar{E}_1 - \bar{P}_1)),$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу ν .

Если $s > \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1}{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}$, то

$$N(\sigma) = \sigma \cdot 2\bar{P}_1 m_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}{\bar{E}_1 + \bar{P}_1} \right)^{k+1/2} \nu' \left(\sigma m_1 \left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}{\bar{E}_1 + \bar{P}_1} \right)^{k+1/2} \right), \quad (38)$$

где суммирование происходит до тех пор, пока не кончится спектр $\nu(s)$.

Эту формулу удобно выводить обходным путем. Надо провести в (37) замену $\sigma = e^u$, $s = m_1 e^v$, т.е. $u = \ln \frac{E+P}{M}$, $v = \ln \frac{E_1+P_1\eta}{m_1}$ и обозначить $\nu(m_1 e^u) = \bar{\nu}(u)$, $N(e^v) = \bar{N}(v)$. Тогда уравнение превратится в $\bar{\nu}(v) = \frac{1}{2\bar{P}_1} \int_{v-w}^{v+w} \bar{N}(u) du$, где $w = \ln \frac{\bar{E}_1 + \bar{P}_1}{m_1}$, откуда $\bar{N}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu'(u - (2k+1)w)$. Теперь надо вернуться к прежним переменным и получить (38).

Если $m_1 = 0$, то формулы немного видоизменяются.

Уравнение

$$\nu(s) = \int \frac{N(\sigma)}{2\sigma\bar{P}_1} d\sigma_{\max(1, s/2\bar{P}_1)}^{\infty} \quad (39)$$

имеет решение при $s > 2\bar{P}_1$

$$N(\sigma) = - (2\bar{P}_1)^2 \sigma \nu'(2\bar{P}_1 \sigma), \quad (40)$$

а при $s < 2\bar{P}_1$ $\nu(s) = \text{Const.}$

Зная $N(\sigma)$, легко получить спектр $\nu(s_2)$ — распределение по $s_2 = E_2 + P_2 \eta$ для другой, невидимой, частицы

$$\nu(s_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \nu \left(m_1 \left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}{\bar{E}_1 + \bar{P}_1} \right)^{k+1/2} \frac{s_2}{E_2 - P_2} \right) - \nu \left(m_1 \left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}{\bar{E}_1 + \bar{P}_1} \right)^{k+1/2} \cdot \max \left(1, \frac{s_2}{E_2 + P_2} \right) \right) \right\}; \quad (41)$$

$(m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$

$$\nu(s_2) = \nu \left(\max \left(1, \frac{s_2}{E_2 + P_2} \right) \cdot 2\bar{P}_1 \right) - \nu \left(\frac{2\bar{P}_1}{E_2 - P_2} s_2 \right); \quad (m_1 = 0, m_2 \neq 0)$$

$$\nu(s_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu \left(m_2 \left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{P}_1}{\bar{E}_1 + \bar{P}_1} \right)^{k+1/2} \cdot \max \left(1, \frac{s_2}{2\bar{P}_2} \right) \right); \quad (m_1 \neq 0, m_2 = 0).$$

В переменных s, σ легко составить уравнение и для распадов на три частицы. Его ядро уже не будет Π -образным. Если обозначить его $K(\sigma, s)$, то уравнение будет таким

$$\nu(s) = \int \frac{s(\bar{E}_1 - \bar{P}_1)^{-1}}{\max(1, s(\bar{E}_1 + \bar{P}_1)^{-1})} K(\sigma, s) N(\sigma) d\sigma, \quad (42)$$

где теперь \bar{E}_1 — максимально возможная в распаде на три частицы энергия.

Ядро $K(\sigma, s)$ равно $\frac{1}{2\sigma} \int \frac{w^2(M_{23}) dM_{23}}{P_1}$, где интеграл берется в пределах, зависящих от S . Если регистрируется пара частиц 2 и 3, то пределы будут от $m_2 + m_3$

до $\sqrt{(M - \frac{m_2^2}{M - 4\sigma}) \frac{s}{\sigma}}$; если только одна (№ 1), то пределы $m_2 + m_3$ и

$\sqrt{(M - \frac{m^2}{s/\sigma})(M - \frac{s}{\sigma})}$. Беря $W(M_{23})$ из предыдущего параграфа, получаем для распада $K \rightarrow 3\pi$

$$K(\sigma, s) \equiv \frac{1}{\sigma} \tilde{K}\left(\frac{s}{\sigma}\right) \equiv \frac{1}{\sigma} \tilde{K}(\bar{s}), \text{ где}$$

$$\tilde{K}(\bar{s}) = \frac{\pi^2}{2M} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\bar{s} \left(M - \frac{m^2}{M - \bar{s}}\right)} \sqrt{\bar{s} \left(M - \frac{m^2}{M - \bar{s}}\right) - 4m^2} - \right. \\ \left. - 2m^2 \ln \frac{\sqrt{\bar{s} \left(M - \frac{m^2}{M - \bar{s}}\right)} + \sqrt{\bar{s} \left(M - \frac{m^2}{M - \bar{s}}\right) - 4m^2}}{2m} \right) \quad (43)$$

(пара)

и такая же формула для частицы-одиночки, с заменой аргумента \bar{s} на $M - \bar{s}$. Ядра эти изображены на рис. 9.

Подчеркнем, что выведенные здесь уравнения и уравнения предыдущих параграфов не сводимы друг к другу и могут применяться для определения спектра перелетных частиц независимо. Сходные уравнения можно написать и для спектра разностей $E_1 - P_1 \eta$. Их решение даст уже не спектр σ , но спектр $1/\sigma$.

8.6. Решение уравнений

Если не считать последнего параграфа, решением выведенных уравнений мы не занимались. Можно было бы и в дальнейшем обойтись без аналитических методов решения, так как существуют стандартные приемы численного решения линейных интегральных уравнений на ЭВМ, учитывающие к тому же и разброс экспериментально наблюдаемой гистограммы $\nu(\nu)$. Наметим все же путь аналитического решения.

Нам встретились два типа уравнений

$$\nu(\nu) = \int_{\nu-W}^{\nu+W} K(\nu-u) N(u) du$$

$$N(u) = \nu(u) - \frac{1}{2} \int_{\nu-2W}^{\nu+2W} K\left(\frac{u-\xi}{2}\right) N(\xi) d\xi.$$

Уравнение (42) можно свести к первому типу, сделав замены, описанные после вывода формулы (38). Во всех случаях ядро $K(x)$ симметрично относительно $x=0$ и отлично от нуля в области $-W \leq x \leq W$. Если определить функцию $L(x)$ так

$$L(x) = \begin{cases} K(x) & \text{при } |x| \leq W, \\ 0 & \text{при } |x| > W, \end{cases}$$

то первое уравнение примет вид

$$\nu(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\nu-u) N(u) du. \quad (44)$$

Если определить функцию $L(x)$ так

$$L(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} K\left(\frac{x}{2}\right) & \text{при } |x| \leq W, \\ 0 & \text{при } |x| \geq W, \end{cases}$$

то второе уравнение примет вид

$$N(u) = \nu(u) + \int_{-\infty}^{\infty} L(u-\xi) N(\xi) d\xi. \quad (45)$$

Уравнения такого типа решаются с помощью преобразования Лапласа. Если обозначить через $\mathcal{L}(p)$, $\mathcal{N}(p)$, $\mathcal{F}(p)$ преобразования Лапласа соответственно функций $L(x)$, $N(x)$ и $\nu(x)$, то есть, например,

$$\mathcal{L}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x) e^{-px} dx,$$

то решение уравнения (44) выразится интегралом Меллина

$$N(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathcal{F}(p)}{\mathcal{L}(p)} e^{pu} dp, \quad (46)$$

а решение (45) — интегралом

$$N(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathcal{F}(p)}{1-\mathcal{L}(p)} e^{pu} dp. \quad (47)$$

Вопрос об эффективности тех или иных методов решения интегральных уравнений для энергии может явиться предметом отдельного исследования.

З а к л ю ч е н и е

Сформулируем кратко выводы статьи.

1) Когда в распадах регистрируется направление первичной частицы и векторы импульсов хотя бы части продуктов распада, то (при условии, что природа ускользающих от наблюдения частиц известна и известен матричный элемент распада) всегда есть возможность восстановить энергетический спектр первичных частиц. Для этого удобно пользоваться продольной быстротой частиц (формулы (6), (8)) либо суммой (разностью) энергии и продольного импульса частиц (формула (34)). Уравнения, которым удовлетворяет спектр быстрот, это либо (19), либо (23), либо (21), где ядро при двухчастичном распаде дается формулой (16), при распаде на три частицы - (26) при двух видимых частицах и (30) - при одной видимой. Уравнения (9) и (21) независимы и могут применяться совместно. Решение их можно производить либо численно, либо по формулам (45), (47). Может быть восстановлен и спектр второй распадающей частицы (формула (41)).

В некоторых случаях, а именно, когда регистрируются все частицы кроме одной, ядро интегрального уравнения может быть получено экспериментально. При этом сразу получается угловое распределение в системе покоя первичной частицы.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 33, 430 (1957).
2. Г. Тахтамышев. Препринт ОИЯИ 2543, Дубна 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июня 1966 г.

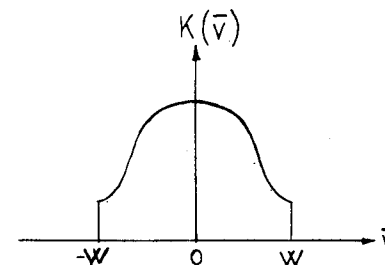


Рис. 1. Спектр продольных быстрот одной из вторичных частиц в системе покоя первичной.

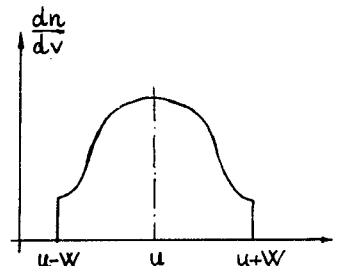


Рис. 2. Спектр продольных быстрот одной из вторичных частиц в лабораторной системе, если все первичные имеют одну и ту же энергию.

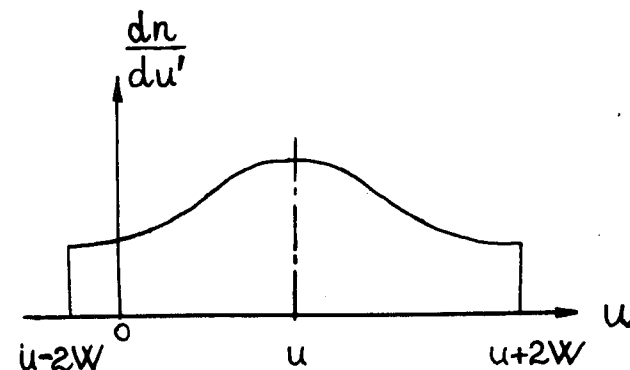


Рис. 3. Спектр ложных значений быстроты первичной частицы в лабораторной системе, если все первичные частицы имеют одну и ту же быстроту.

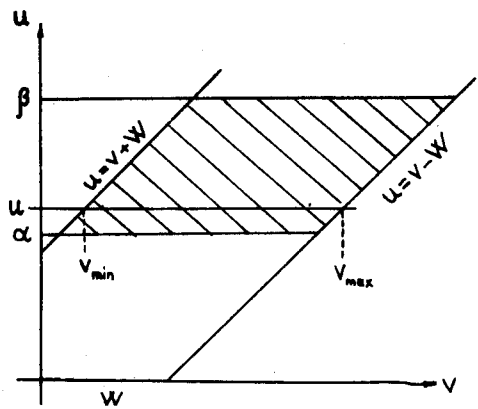


Рис. 4. Область интегрирования и задания аргументов в уравнении (19).

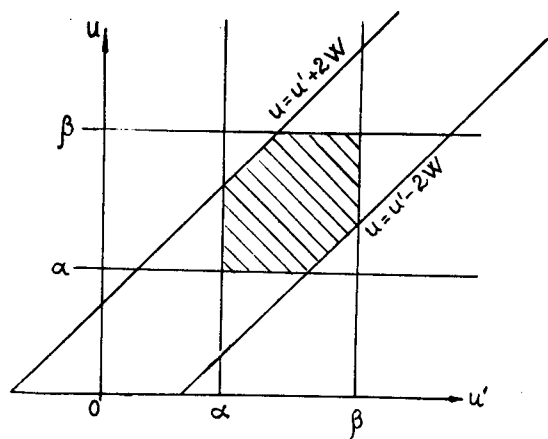


Рис. 5. Область интегрирования и задания аргументов в уравнении (21).

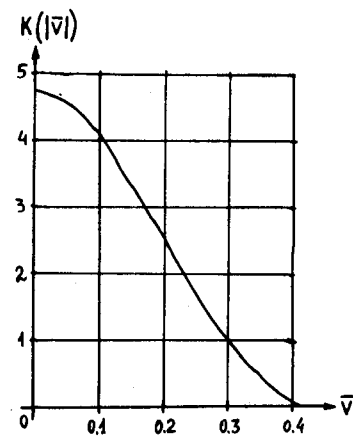


Рис. 6. Спектр продольных быстрых пар видимых вторичных частиц в системе покоя первичной (распад $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$).

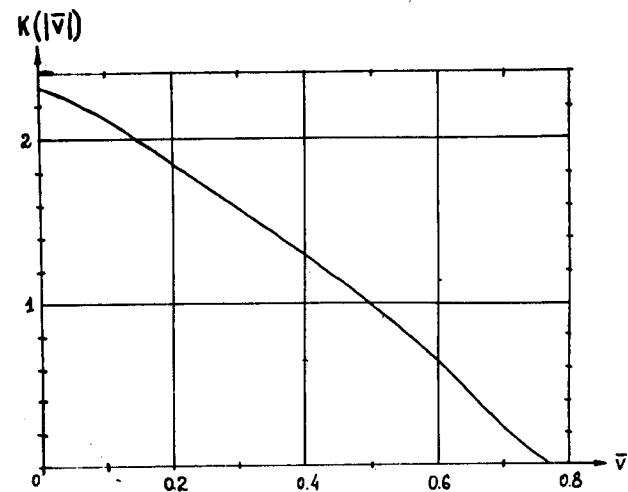


Рис. 7. Спектр продольных быстрых одной из видимых вторичных частиц в системе покоя первичной (распад $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$).

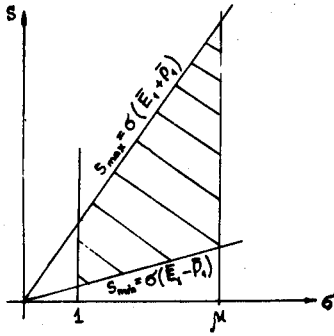


Рис. 8.

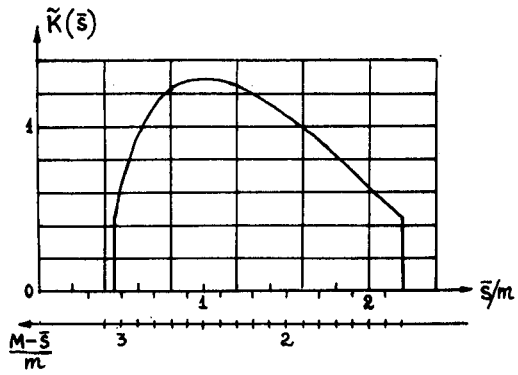


Рис. 9.