

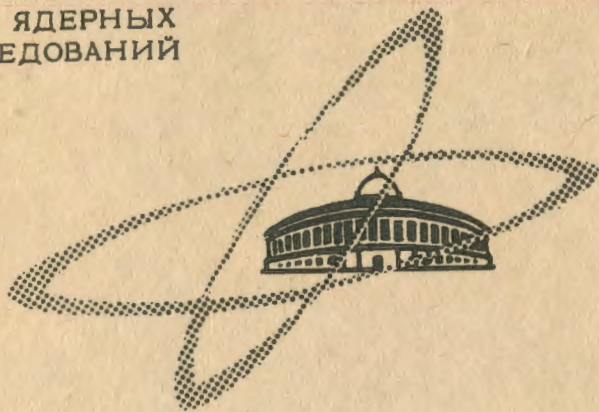
3-84

ЯФ, 1968, т. 7, в. 6,
с. 1316-1324

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2791



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.А. Зоя, М.И. Широков

КОРРЕЛЯЦИЯ ВРЕМЕН ИСПУСКАНИЯ
И ПОГЛОЩЕНИЯ ОБМЕННОГО ФОТОНА

1966

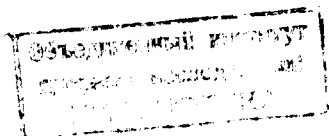
P-2791

4330/2 нр.

Б.А. Зок, М.И. Широков

КОРРЕЛЯЦИЯ ВРЕМЕН ИСПУСКАНИЯ
И ПОГЛОЩЕНИЯ ОБМЕННОГО ФОТОНА

Направлено в журнал "Ядерная физика"



В в е д е н и е

Обычная постановка нестационарных задач в квантовой механике сводится к задаче Коши: по известному начальному условию в момент времени t_0 найти вероятности будущих состояний системы в момент t . В работе^{1/} Гольдбергера и Ватсона предложен аппарат, позволяющий учесть дополнительную информацию о состоянии системы, которая может быть получена в интервал времени между t_0 и t .

В § 1 мы дадим изложение этого аппарата, несколько обобщающее^{1/} и позволяющее легко применять теорию возмущений. В § 2 аппарат применяется к конкретному квантово-электродинамическому эффекту обмена возбуждением между двумя атомами, причем сначала расчет производится по формуле Гольдбергера-Ватсона и приближено. Результат сравнивается с тем, чего можно было ожидать. В § 3 излагается расчет по формуле, более соответствующей экспериментальным возможностям. В рамках первого не исчезающего приближения квантово-электродинамической теории возмущений вычисления производятся точно. В § 4 производится вспомогательное для данной задачи вычисление перенормировочной константы. Оно имеет и самостоятельный интерес как исследование временного закона высвечивания атома при малых временах (в рамках первого приближения теории возмущений). Оказывается, что известная формула для вероятности перехода в единицу времени верна только при относительно больших временах.

§ 1. Теория временных корреляций

Волновая функция системы в момент t может быть выражена через начальную $\psi_0(t_0)$ с помощью оператора эволюции $U(t, t_0)$:

$$\psi(t) = U(t, t_0) \psi_0(t_0). \quad (1.1)$$

В шредингеровской картине $U(t, t_0) = \exp[-i H(t-t_0)]$, где H — полный гамильтониан. В картине взаимодействия $U(t, t_0) = P \exp[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt']$ (см., например,^{2/} (11.160)). В силу известного свойства $U(t, t_0) = U(t, t') U(t', t_0)$ можно формально (1.1) записать в виде:

$$\psi(t) = \sum_{\nu} U(t, t_n) | \nu_n \rangle \langle \nu_n | U(t_n, t_{n-1}) | \nu_{n-1} \rangle \dots \langle \nu_1 | U(t_1, t_0) \psi_0(t_0). \quad (1.2)$$

разбив промежутки (t, t_0) на части точками $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$. Наборы состояний $|\nu_k\rangle$, конечно, должны быть полными: $\sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu| = 1$. Сумма \sum_{ν} означает суммирование по всем $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$.

Пусть в моменты t_1, t_2, \dots, t_n получены дополнительные сведения о состоянии системы. Например, имеется прибор, который в момент t_1 измеряет некоторую физическую величину J_1 ^{/1/}. Предполагаем, что соответствующие измерения не изменяют полностью первоначальную функцию, но возмущают ее только некоторым минимальным образом. Такое измерение в^{/1/} названо "наименьшим вмешательством" (*least interference*). Мы его позже поясним на конкретном примере. Только такое вмешательство может помочь детальной изучить систему.

В дальнейшем мы будем иметь дело с такого рода информацией: в момент t_1 наша система редуцировалась (прибор ее "профильировал"^{/3/}) так, что из всех возможных состояний ν_1 осталась только часть μ_1 . Например, прибор пропустил только системы с одним фиксированным собственным значением J_1 . Тогда $\psi(t)$ меняется так:

$$\psi'(t) = \sum_{\mu} U(t, t_n) | \mu_n \rangle C_n \dots U(t_2, t_1) | \mu_1 \rangle C_1 \langle \mu_1 | U(t_1, t_0) \psi_0(t_0). \quad (1.3)$$

Константы C_1, \dots, C_n перенормируют $\psi'(t)$ в следующем смысле. В момент t_1 произведен отбор $\nu_1 \rightarrow \mu_1$. Умножение на C_1 обеспечивает, что полная вероятность обнаружить систему в каком-либо состоянии в момент $t > t_1$, например в момент t_2 , будет равна единице, но не доле $\sum_{\mu_1} |\langle \mu_1 | U(t_1, t_0) \psi_0 \rangle|^2$ "профильированных" систем.

При $n=1$ (1.3) превращается в формулу (2.14) в^{/1/}. Соответствующая квантовой формуле (1.3) классическая формула вместо амплитуд вероятностей должна была бы содержать сами вероятности^{/4/}.

Возможно разные усовершенствования формулы (1.3), учитывающие, во-первых, что всякое измерение требует конечного времени, и, во-вторых, что промежуточные вмешательства приведут к тому, что состояние перестанет быть "чистым", см.^{/1/}.

§ 2. Обмен возбуждением между двумя атомами

Под термином "атом" в этой работе можно понимать любую квантово-механическую систему, способную излучать и поглощать фотоны. Если потребуются более конкретные сведения об атоме, то будет иметься в виду атом водорода.

В момент $t_0 = 0$ атом А находится на возбужденном уровне a^* , атом В на основном или метастабильном уровне b . Фотонов нет. Расстояние R между атомами много больше их размеров.

Пусть в момент $t_1 > 0$ мы узнали, что А находится в состоянии a , т.е. в промежутке $(0, t_1)$ он испустил фотон (кулоновским взаимодействием между электронами атомов пренебрегаем). При этом соответствующий прибор никак не воздействует ни на этот фотон, ни на атом В (в этом и состоит "наименьшее вмешательство"^{x)}).

Какова при этом условии вероятность того, что к моменту $t > t_1$ атом В окажется в возбужденном состоянии b^* ? Соответствующие амплитуды вероятности вычисляются по формуле Голдбергера-Ватсона (1.3) с $n=1$:

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_1; \lambda_f) &\equiv \langle b^* \lambda_f | \psi'(t) \rangle = \\ &= C \sum_{\lambda} \langle b^* \lambda_f | U(t, t_1) | a \lambda \rangle \langle a \lambda | U(t_1, 0) | a^* b \rangle, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а сама вероятность равна сумме $|\varphi|^2$ по всем возможным конечным состояниям λ_f , лишь бы атом В был в состоянии b^* . Начальное состояние обозначено a^*b . Под $a\lambda$ можно было бы понимать состояния, о которых известно только, что А находится в состоянии a ^{xx)}. Однако для простоты расчет будет производиться лишь для случаев, когда дополнительно известно, что до момента t_1 атом В не переходил в состояние b^* (т.е. в соответствующем эксперименте другие случаи отбрасываются вместе с фоновыми). В состояниях $a\lambda$ в принципе может быть сколько угодно фотонов. Однако мы ограничимся вычислениями в первом исчезающем приближении квантовоэлектродинамической теории возмущений.

x) Например, прибор регистрирует отдачу А. В случае атомов водорода можно предложить другой эксперимент. Пусть a^* есть уровень $2S_{1/2}$, b - тоже один из уровней $2S_{1/2}$, но в таком магнитном поле, что $E_{2S} < E_{2P}$, см. рис. 33 на стр. 452 в^{/5/}. Осуществляется обмен радиочастотным фотоном перехода $2S \rightarrow 2P$. Испустил его, А переходит на $2P$ и после этого быстро, за время $\sim 10^{-9}$ сек, испускает оптический фотон $2P \rightarrow 1S$. Факт регистрации именно этой частоты означает, что примерно за 10^{-8} сек до момента регистрации произошло испускание радиофотона (для атома В - поглощение радиофотона).

xx) В случае примера предыдущего замечания под ab^* следует понимать состояние $2P_A, 2P_B$. Испускание оптических фотонов для нас является только индикатором испускания или поглощения радиофотона. За время $\sim 10^{-9}$ сек этот оптический переход происходит с вероятностью, почти равной 1, и его мы не описываем.

Подставляя в (2.1) обычные разложения U по степеням e

$$U = 1 + e U^{(1)} + e^2 U^{(2)} + \dots, \quad (2.2)$$

мы получим в первом несходящем приближении для амплитуды $\varphi(t, t_1) \equiv \langle \delta^* a | \psi'(t) \rangle$:

$$\varphi(t, t_1) = C e^2 \sum_{\kappa \epsilon} \langle a b^* | U^{(1)}(t, t_1) | a b \bar{\kappa} \epsilon \rangle \langle a b \bar{\kappa} \epsilon | U^{(1)}(t_1, 0) | a^* b \rangle. \quad (2.3)$$

В (2.3) кроме суммирования по поляризации ϵ обменного фотона и интегрирования по всем его импульсам \vec{k} должны подразумеваться и другие нужные суммирования (например, по проекциям орбитального момента состояния). Константа C вычисляется из условия

$$1 = |C|^{-2} \sum_{\kappa \epsilon} |\langle a b \bar{\kappa} \epsilon | e U^{(1)}(t_1, 0) | a^* b \rangle|^2. \quad (2.4)$$

Как видно, $|C|^{-2}$ равно просто вероятности излучения фотона атомом A к моменту t_1 . В качестве μ_1 (см. (1.3)) взяты индексы собственных функций свободного гамильтониана. В данном случае на этом языке легко выражается промежуточная информация и вместе с тем легко применять теорию возмущений в представлении взаимодействия. Остальные амплитуды $\varphi(t, t_1; \lambda_f)$ меньше, чем (2.3), см. приложение.

Матричные элементы в (2.3) вычисляются по обычным правилам квантовой электродинамики, см., например, ¹⁶⁾. Все дополнительные подробности (например, выбор калибровки) см. в ¹⁷⁾. Используем систему единиц $\hbar=1$ и $c=1$. Для простоты считаем, что $E_{a^*} - E_a = E_{b^*} - E_b = \Delta$.

$$\varphi(t, t_1) = -e^2 C \sum_{\epsilon} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\kappa}$$

$$\left[\int d\vec{x}_b \bar{w}_{b^*}(\vec{x}_b) (\bar{\epsilon} \vec{d}) e^{i\vec{k}\vec{x}_b} w_b(\vec{x}_b) \int_{t_1}^t e^{-i(\kappa-\Delta)t'} dt' \right]$$

$$\left[\int d\vec{x}_a \bar{w}_a(\vec{x}_a) (\bar{\epsilon} \vec{d}) e^{-i\vec{k}\vec{x}_a} w_{a^*}(\vec{x}_a) \int_0^{t_1} e^{i(\kappa-\Delta)t''} dt'' \right].$$

(2.5)

Здесь K обозначает $|\vec{k}|$, $w(\vec{x})$ - волновую функцию атома. Центр атома A помещен в начало координат, атом B - в точку R . В нерелятивистском пределе, в дипольном приближении и считая $R\Delta \gg 1$, после интегрирования по углам \vec{k} и суммирования по ϵ ¹⁷⁾ получаем:

$$\varphi(t, t_1) = C \frac{-ie^2 \Delta^2}{2(2\pi)^2 R} [(\bar{d}_a \bar{d}_b) - (\bar{d}_a \bar{R})(\bar{d}_b \bar{R})/R^2].$$

$$\int_0^\infty dk \frac{e^{i\kappa R} - e^{-i\kappa R}}{(k-\Delta)^2} [e^{i(\Delta-\kappa)(t-t_1)} - 1] [e^{i(\Delta-\kappa)t_1} - 1].$$

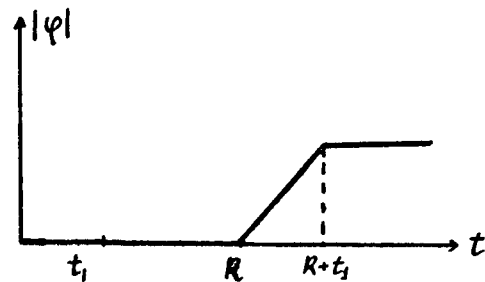
(2.6)

Через d_a и d_b обозначены дипольные моменты атомов. Если применить приближение замены $\int dk$ в (2.6) на $\int_{-\infty}^{\infty} dk$, см. ¹⁷⁾, то интеграл в (2.6) можно вычислить с помощью теории вычетов. Мы приведем только конечное выражение в случае $t_1 < R$. Обозначим $t - t_1 = T$.

$$\varphi(t, t_1) = C(t) \frac{id\Delta^2}{R} [(\bar{d}_a \bar{d}_b) - (\bar{d}_a \bar{R})(\bar{d}_b \bar{R})/R^2] Q_0(T, t_1, R) \quad (2.7)$$

$$Q_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } T < R - t_1 \\ -2\pi \exp(iR\Delta) \cdot [T - R - t_1] & \text{при } R - t_1 < T < R \\ -2\pi t_1 \exp(iR\Delta) & \text{при } T > R \end{cases}$$

(2.8)



Р и с. 1.

Зависимость $|\varphi(t, t_1)|$ от t_1 изображена на рис. 1. Это приближенное поведение совпадает с ожидаемым. До момента R/c атом B еще не возбуждился: никакой фотон от A еще не успел до него дойти. После $t=0$ начинает высвечиваться и соответственно появляется некоторая вероятность, что B после $t=R/c$ будет возбужденным, см. участок $(R, R+t_1)$ на рис. 1. Нам известно, что к моменту t_1 A высветился, следовательно, после $R/c + t_1$ вероятность возбуждения B уже не может увеличиваться (последний возможный фотон уже прошел мимо B). Таким образом, на основании расчета мы получили, что скорость фотона лежит в пределах $R/(R/c)$ и $R/(R/c + t_1)$. Расчет без промежуточной информации дает в принципе только верхнюю границу этой скорости, см. ^{17/}.

Интересно еще отметить, что хотя $Q_0 \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow 0$, максимальная величина $C(t_1) Q_0$ не стремится к нулю из-за того, что вероятность излучения $|C(t_1)|^{-2}$ при крайне малых t_1 пропорциональна не t_1 , но t_1^2 , см. § 4. И это опять правдоподобно: по условию задачи A излучает фотон в промежутке $(0, t_1)$ как бы ни было мало t_1 и должна быть ненулевая вероятность того, что B этот фотон "перехватывает".

§ 3. Регистрация времени испускания

Прибор, регистрирующий факт излучения фотона атомом A (по его отдаче или по сопутствующему излучению, см. прим. ^x на стр. 5) на самом деле сообщает нам большую информацию, чем может освоить формула (2.14) в ^{1/}. Получив выходной импульс в момент t_1 (с учетом известной задержки в приборе), мы можем заключить, что A до некоторого момента времени $t_1 - \tau$ еще не излучил фотон (интервал τ равен, например, времени жизни атома в состоянии $2P$, см. то же примечание). Формула же (2.14) в ^{1/} предполагает, что прибор только сообщает, что атом излучил до момента t_1 . В схеме формулы (1.3) такая большая информация может быть учтена как случай $n=2$. Нам известно, что в интервале $(0, t_1 - \tau)$ атом A все еще находится в исходном состоянии, к моменту же t_1 он уже излучил:

$$\langle ab^* | \psi'(t) \rangle = \sum_{\lambda, \lambda'} \langle ab^* | \mathcal{U}(t, t_1) | a \lambda_2 \rangle C_2.$$

$$\langle a \lambda_2 | \mathcal{U}(t_1, t_1 - \tau) | a^* \lambda_1 \rangle C_1 \langle a^* \lambda_1 | \mathcal{U}(t_1 - \tau, 0) | a^* b \rangle. \quad (3.1)$$

Как и раньше, расчет производится только для случаев, когда до t_1 атом B еще не перешел в состояние b^* .

Вставляя (2.2) в (3.1), мы получаем много членов, но наименьший исчезающий порядок опять второй и он опять представлен одним членом:

$$\varphi(t, t_1, \tau) = C_2 C_1 \sum_{k \varepsilon} e^{i k \varepsilon} \langle ab^* | \mathcal{U}^0(t, t_1) | ab \bar{k} \varepsilon \rangle \langle ab \bar{k} \varepsilon | \mathcal{U}^0(t_1, t_1 - \tau) | a^* b \rangle \quad (3.2)$$

$$1 = |C_1|^2 \sum_{\lambda} |\langle a^* \lambda | \mathcal{U}(t_1 - \tau, 0) | a^* b \rangle|^2 \cong |C_1|^2 \sum_{\lambda} |\langle a^* \lambda | 1 | a^* b \rangle|^2 = |C_1|^2 \quad (3.3)$$

$$1 = |C_2|^2 \sum_{k \varepsilon} |\langle ab \bar{k} \varepsilon | e^{i k \varepsilon} \mathcal{U}^0(t_1, t_1 - \tau) | a^* b \rangle|^2. \quad (3.4)$$

Как видно, можно положить $C_1 = 1$ и в дальнейшем C_1 не писать; C_2 вычисляется в § 4.

Вычисляя (3.2) так же, как и $\varphi(t, t_1)$ в предыдущем параграфе, мы скоро убедимся, что (3.2) зависят только от τ и от разности $T = t - t_1$. Мы придем к той же формуле (2.8), только интеграл по k имеет теперь вид:

$$Q = \int_0^{\infty} dk \frac{2i \sin k R}{(k - \Delta)^2} [e^{-i(k-\Delta)T} - 1] [e^{-i(k-\Delta)\tau} - 1]. \quad (3.5)$$

Теперь мы его вычислим точно.

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^0 = Q_0 + 2i \int_{\Delta}^{\infty} dk \frac{\sin(k-\Delta) R}{k^2} [e^{i k T} - 1] [e^{i k \tau} - 1] \equiv Q_0 + Q_1. \quad (3.6)$$

Интеграл Q_0 мы уже выписывали для случая $\tau < R$, см. (2.8). Интеграл Q_1 сводится к интегральным показательным функциям:

$$Q_1 = -ie^{-i R \Delta} \{ F(R+T+\tau) - F(R+T) - F(R+\tau) + F(R) \} + ie^{i R \Delta} \{ F(-R+T+\tau) - F(-R+T) - F(-R+\tau) + F(-R) \}. \quad (3.7)$$

Здесь $F(x) = x \text{Ei}(i k \Delta)$. Тот факт, что $Q \neq 0$ до момента $T = R - \tau$ означает, что амплитуда (3.2) имеет релятивистски непричинное поведение. Можно показать, что когда все аргументы у Ei в (3.7) большие по модулю — $(T-R)\Delta \gg 1$ и $R\Delta \gg 1$,

то Q_1 в $(T-R)\Delta$ раз или в $R\Delta$ раз меньше $Q_0 (T>R) = -2\pi\tau \exp iR\Delta$. Но около интервала времен $(R/c - \tau, R/c)$ непрямой член Q_1 может даже превосходить $Q_0 (T>R)$. В частности, в точке $T=R-\tau$ в случае $\tau\Delta \ll 1$

$$Q_1 \approx \frac{1}{2} e^{iR\Delta} [\tau(0,577 - 1) + \tau \ln \tau\Delta]. \quad (3.8)$$

Это поведение качественно не представляет чего-либо нового по сравнению с аналогичным явлением в задаче об обмене без временных корреляций (см. ^{17/}) и не будет более здесь обсуждаться.

Независимость амплитуды (3.2) от t_1 означает, что не важно, когда было приготовлено начальное состояние. В соответствующем эксперименте можно даже непрерывно возбуждать высветившиеся атомы A . В то же время для измерения скорости фотона в задаче без корреляции было важно, чтобы процесс приготовления начального состояния длился короткое время. В частности, для наблюдения непрямой эффекта оно должно быть много меньше $1/\Delta$ (период колебания, соответствующий частоте фотона). В настоящей задаче такое требование заменяется условием: неопределенность во времени наблюдения факта перехода $\alpha^* \rightarrow \alpha$ должна быть много меньше $1/\Delta$.

Присутствие перенормировочной константы $C_2(\tau)$ в (3.2) означает, что $|\varphi(t-t_1, \tau)|^2$ есть вероятность нахождения B в возбужденном состоянии в момент t , при условии, что в интервале τ высветился один атом A . В задаче без корреляции мы имели соответствующую вероятность при условии, что A был только возбужден в момент $t=0$. В то время как последняя вероятность имела порядок 10^{-49} при некоторых значениях параметров R и Δ и для атома водорода (см. стр. 20 в ^{17/}), грубые оценки дают для перенормированной вероятности величину $10^{-24} \div 10^{-28}$ при тех же значениях R, Δ и при $\tau = 10^{-8}$ сек.

§ 4. Временной закон высвечивания

Величину $|C_2|^{-2}$, определяемую формулой (3.4), можно назвать вероятностью высвечивания атома, если другие (не одофотонные) каналы перехода $\alpha^* \rightarrow \alpha$ менее вероятны.

$$|C_2|^{-2} = \sum_{\epsilon} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left| e \int W_{\alpha^*}(\vec{x}) (\vec{\alpha} \vec{\epsilon}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} W_{\alpha^*}(x) d^3x \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{2k} \int_{t_1-\tau}^{t_1} dx_0 e^{i(E_{\alpha} x_0 - E_{\alpha^*} x_0 + k x_0)} \right|^2 = \\ = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} k dk \frac{1 - \cos(k-\Delta)\tau}{(k-\Delta)^2} \iint d\Omega_k \left[(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2) - \frac{(\vec{\alpha}_1 \vec{k})(\vec{\alpha}_2 \vec{k})}{k^2} \right] \\ \cdot \int d^3x_1 \int d^3x_2 e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} W_{\alpha^*}(x_1) W_{\alpha^*}(x_1) W_{\alpha}(x_2) W_{\alpha^*}(x_2). \quad (4.1)$$

От t_1 C_2 не зависит, а от τ C_2 зависит так же, как величина C , определяемая (2.4), зависит от t_1 . В дальнейшем будем пользоваться обозначением $C(\tau)$.

Способ вычисления (4.1), излагаемый в учебниках (см., например, Шифф ^{18/}), является, строго говоря, некорректным. Мы покажем, что он дает правильный результат лишь при достаточно больших τ .

Прежде всего подчеркнем, что надо и можно доказать возможность перемены порядка интегрирования в (4.1). Далее отметим, что нельзя сразу применять обычное дипольное приближение $\exp i\vec{k}\vec{x} \rightarrow 1$ и интегрировать по K : тогда интеграл по K оказывается расходящимся.

Применим следующее приближение: ограничимся первым членом из разложения $\exp i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ в ряд по сферическим функциям (см. (4.24) в ^{18/}):

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx \sin k\Gamma / k\Gamma; \quad \vec{r} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \quad (4.2)$$

Следующие члены разложения малы при $k\Gamma \ll 1$. В нашей задаче это условие будет выполнено, если, во-первых, предположить, что основной вклад в интеграл все же вносят K не на много превышающие Δ . Во-вторых, пусть $|x_1|$ и $|x_2|$ эффективно принимают значения порядка размера d системы. Тогда условие $k\Gamma \ll 1$ будет выполнено, если $d\Delta \ll 1$. Для атома водорода условие $d\Delta \ll 1$ выполняется очень хорошо.

Интеграл по $d\Omega_k$ дает теперь $\frac{2}{3} 4\pi (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2)$. В отличие от $\exp i\vec{k}\vec{r} \rightarrow 1$, приближение (4.2) обеспечивает обрезание при больших K , и интеграл по K можно вычислять.

$$J = \int_0^{\infty} dk \frac{1 - \cos(k-\Delta)\tau}{k-\Delta} \sin k\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^0 = \\ = J_0 + \int_{\Delta}^{\infty} dk' \frac{\sin(k'-\Delta)\Gamma}{k'^2} (1 - \cos k'\tau) \equiv J_0 + J_1. \quad (4.3)$$

Интеграл J_0 вычисляется, например, с помощью (3.786.3) в ^{19/}:

$$J_0 = \pi \sin r \Delta (\tau - r) \theta(\tau - r). \quad (4.4)$$

Интеграл J_1 может быть выражен через интегральные синус и косинус (см. (2.841) в ^{19/}):

$$J_1 = -r [\cos r \Delta \operatorname{ci} r \Delta + \sin r \Delta \operatorname{si} r \Delta] + \\ + \frac{r + \tau}{2} [\cos r \Delta \operatorname{ci} (r + \tau) \Delta + \sin r \Delta \operatorname{si} (r + \tau) \Delta] + \\ + \begin{cases} \frac{r - \tau}{2} [\cos r \Delta \operatorname{ci} (r - \tau) \Delta + \sin r \Delta \operatorname{si} (r - \tau) \Delta] & \text{при } \tau < r \\ \frac{\tau - r}{2} [-\cos r \Delta \operatorname{ci} (\tau - r) \Delta + \sin r \Delta \operatorname{si} (\tau - r) \Delta] & \text{при } \tau > r. \end{cases} \quad (4.5)$$

Пусть $\tau < r$. Поскольку $r \Delta \ll 1$ (и, следовательно, $\tau \Delta \ll 1$), то можно использовать соотношения:

$$\operatorname{ci} x \cong 0,577 + \ln x - \frac{x^2}{4}; \quad \operatorname{si} x \cong -\frac{\pi}{2} - x; \quad (4.6)$$

и получить

$$J_1 \cong \tau^2/2r + \tau^4/12r^3. \quad (4.7)$$

Выражение для J_1 в следующей области $\tau > r$, но $\tau \Delta \ll 1$ оказывается слишком громоздким для анализа. В случае $\tau \Delta \sim 1$ или $1/10$ и $\tau \rightarrow r$ можно воспользоваться

$$\operatorname{ci}(\tau \pm r) \Delta \cong \operatorname{ci} \tau \Delta \pm \frac{r}{\tau} \cos \tau \Delta; \quad \operatorname{si}(\tau \pm r) \Delta \cong \operatorname{si} \tau \Delta \pm \frac{r}{\tau} \sin \tau \Delta \quad (4.8)$$

и получить для J_1 , отбрасывая члены порядка единицы по сравнению с $\ln r \Delta$,

$$J_1 \cong -r \ln r \Delta. \quad (4.9)$$

Наконец, в случае $\tau \Delta \gg 1$ с помощью асимптотических представлений для ci и si получим:

$$(J_0 + J_1)/r \cong \frac{\pi}{r} \sin r \Delta \cdot (\tau - r) - (\ln r \Delta + 0,577 + \cos \tau \Delta) \cong \pi \tau \Delta - \ln r \Delta. \quad (4.10)$$

Во всех выписанных случаях зависимость от τ выделяется как множитель, поэтому оставшееся интегрирование по X_1 и X_2 ее не изменит.

При совсем малых τ , $\tau < r \sim d$ (что составляет 10^{-17} сек для атома водорода) $|C|^{-2} \sim \tau^2$. Такое поведение не зависит от приближения (4.2). А именно, можно доказать, что допустимо дважды проинтегрировать по τ под знаком интеграла (4.1). Значение интеграла в точке $\tau = 0$ и его первая производная в этой точке равна нулю и поэтому $|C(\tau)|^2 \sim \tau^2$ при $\tau \rightarrow 0$.

Затем наступает переходная область, после которой в районе $\tau \sim 1/\Delta$ $|C|^{-2}$ выходит на плато: $|C(\tau)|^2 \sim \text{const}$. Наконец, при больших τ

$$|C(\tau)|^{-2} \sim \text{const} + \frac{e^2}{3\pi} |\vec{d}_a|^2 \Delta^3 \cdot \tau. \quad (4.11)$$

При получении (4.11) использована независимость от r члена $\mathcal{P}\mathcal{E}\Delta$ в (4.10). Легко увидеть, что это обстоятельство позволяет вычислить оставшиеся интегралы по X_1 и X_2 как дипольные (после замены $\vec{d} \rightarrow -\vec{p}/m$, см. ^{18/}). Это и дает $|\vec{d}_a|^2$ в (4.11).

Прделанные вычисления годятся для τ , много меньших времени жизни (затухание не учитывалось). Пропорциональность $|C|^{-2}$ времени τ поэтому соответствовала бы экспоненциальному закону распада. Мы установили, однако, что она имеет место, только если второй член в (4.11) много больше первого. Более грубая оценка: если $\tau \Delta \gg \ln d \Delta$, см. (4.10). Для атома водорода это означает, что область отклонения от пропорциональности τ не превышает 10^{-14} сек, если Δ соответствует оптическому диапазону. Только в случае фотонных длин волн порядка метра, когда эта область составляет уже 10^{-8} сек, можно ставить вопрос о том, можно ли заметить полученное отклонение от экспоненциальности. Отметим, что оно лежит внутри области применимости обычных вычислений. Последняя соответствует настолько большим τ , при которых первым членом в (4.11) можно пренебречь, так что вероятность перехода в единицу времени оказывается не зависящей от τ и равной $\frac{4}{3} \alpha \Delta^3 |\vec{d}_a|^2$, ср. формулу (50.17), в ^{18/}.

Приложение

В эксперименте факт обмена излучением регистрируется по переходу атома B в возбужденное состояние. Не исключено, что при этом в момент t кроме β^a имеется еще и один-два фотона, вероятнее всего мягких (и поэтому трудно регистрируемых). Соответствующие амплитуды $\varphi(t, t_i; \lambda_i)$ (см. (2.1)), большей частью третьего и выше порядка по e . Это относится к конечным состояниям вида β^a , один фотон; $\beta^2 \alpha$, три фотона и т.д. Однако амплитуда

$$\langle b^* a_{\gamma_1 \gamma_2} | \psi'(t) \rangle =$$

$$= c e^2 \sum \langle b^* a_{\gamma_1 \gamma_2} | U^{(1)}(t, t_1) | a b \gamma_1 \rangle \langle a b \gamma_1 | U^{(0)}(t_1, 0) | a^* b \rangle$$

имеет второй порядок, как и (2.3). Она содержит матричный элемент перехода $b \rightarrow b^* + \gamma_2$: в конечном интервале времени, согласно теории возмущений, B может возбудиться и к тому же испустить фотон. По этой же причине в задаче без корреляции переход $a^* b \rightarrow b^* \lambda$ возможен в первом порядке по e : случай $b^* \lambda = b^* a^*$.

Рассмотрим начальное состояние типа: атом водорода в основном состоянии (или один свободный электрон) и фотонов нет.

Такое физическое состояние следует описывать одноэлектронной собственной функцией (стационарным состоянием) полного гамильтониана задачи с наименьшей энергией. Точнее, надо так определить физическое ("одетое") одноэлектронное состояние (ср. обычные предположения о спектре масс, см. ^{/2/} гл. 17, § 2). Из стационарного состояния не может быть переходов ни в какие другие состояния.

В частности, электрон в наименьшем состоянии не может излучать фотон даже на короткое время. Получающаяся по теории возмущений ненулевая вероятность излучения фотона таким электроном является заведомо неверным результатом (если только его не трактовать как физически ненаблюдаемое "одевание" соответствующего "голого" состояния ^{/10/}).

В нашей задаче начальное состояние b является либо стабильным, либо метастабильным (см. примечание 1). В последнем случае можно ожидать, что оно может перейти в более высокое состояние с испусканием фотона с гораздо меньшей вероятностью, чем это получается по теории возмущений. Поэтому мы пренебрегаем амплитудой $\langle b^* a_{\gamma_1 \gamma_2} | \psi'(t) \rangle$ по сравнению с $\langle b^* a | \psi'(t) \rangle$.

Л и т е р а т у р а

1. M.L. Goldberger, K.M. Watson, Phys. Rev. 1964, 134B, 919.
2. С. Швевбер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, Москва, 1963.
3. A. Messiah, Quantum Mechanics, v. 1, Ch. V, § 13, Amsterdam, 1963.
4. R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, New York, 1965; R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 1948, 20, 367.
5. Г. Бете и Э. Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. ГИМФЛ, Москва, 1959.
7. М.И. Широков. Преприят ОИЯИ Р-1719, Дубна 1964.

8. Л. Шифф. Квантовая механика, § 50, ИИЛ, Москва, 1957.

9. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИМФЛ, Москва, 1962.

10. Е.Л. Фейнберг. ЖЭТФ 1966, 50, 202.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1966 г.