

С 323.4
Ш-538

ЯФ, 1967, 75, 6.5, с. 1116

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2785



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.Б. Шефтель

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ
ОБОВЩЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ,
РЕАЛИЗУЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
 $L(m, n)$ И $P(m, n)$ ГРУПП

1966

P-2785

М.Б. Шефтель

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ
ОБОБЩЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ,
РЕАЛИЗУЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
 $L(m, n)$ И $P(m, n)$ ГРУПП

Направлено в журнал "Ядерная физика"

4311/3 тпр.



1. Введение

В теории унитарных представлений групп (как компактных, так и некомпактных) в основном применяются абстрактно-оперативные методы. Однако уже на примерах трехмерной группы вращений, групп Евклида, Лоренца и Пуанкаре (в наших обозначениях соответственно $L(3,0)$, $\mathcal{P}(3,0)$, $L(3,1)$, $\mathcal{P}(3,1)$) мы знаем, как полезно для физических приложений строить представления в терминах "волновых" функций, т.е. собственных функций соответствующих операторов Лапласа. В связи с указанной проблемой нас будет интересовать важный класс групп вращений $L(m,n)$ и движений $\mathcal{P}(m,n)$ в пространствах R с метрикой:

$$g_{-n+1, -n+1} = 1, \quad g_{-n+2, -n+2} = 1, \dots, \quad g_{00} = 1, \quad g_{mm} = -1, \dots, \quad g_{nn} = -1.$$

Он включает в себя помимо вышеперечисленных классических примеров группу вырождения уровней нерелятивистского атома водорода $L(4,0)$, динамическую группу одномерного осциллятора $L(2,1)$, группы де-Ситтера $L(4,1)$ и $L(3,2)$, первая из которых изоморфна динамической группе релятивистского ротатора, группу конформных преобразований пространства Минковского $L(4,2)$ ^{х)}.

В настоящей работе мы будем рассматривать класс унитарных неприводимых представлений групп $L(m,n)$ и $\mathcal{P}(m,n)$, зависящих только от одного параметра, т.е. для которых только один оператор Казимира не равен тождественно нулю^{хх)}. Этот класс представлений для любой из рассматриваемых групп реализуется в гильбертовом пространстве H функций, область определения которых R есть пространство ранга 1^{/2/}, и единственный исчезающий инвариантный оператор Δ совпадает по теореме Хелгасона^{/3/} с дифференциальным оператором Лапласа-Бельтрами пространства R .

^{х)} $L(3,2)$ и $L(4,2)$ ₁ рассматривались недавно в связи с симметриями элементарных частиц Фронсдалом.

^{хх)} Для групп $L(m,n)$ такие представления были построены для двух специальных выборов базиса в пространстве H и следовательно для двух специальных систем координат в пространстве R , содержащихся в предлагаемой классификации^{/9/}.

Как известно, выбор базиса в пространстве H определяется выбором системы координат в пространстве R , в которой разделяются переменные в уравнении Лапласа. Мы будем рассматривать здесь только системы координат, имеющие ясный групповой смысл, т.е. такие, в которых базисные функции являются не только собственными функциями лапласана, но и инвариантов подгрупп рассматриваемой группы и отмечаются собственными значениями этих инвариантов^{/4/}. Число независимых операторов полного коммутирующего набора для таких представлений, очевидно, равно размерности пространства R .

Виленкин и Смородицкий впервые рассмотрели связь между системами координат и базисом представлений группы Лоренца $L(3,1)$ ^{/5/}. Для группы Лоренца связь между координатными системами и классификацией базиса была установлена для всех возможных разбиений на подгруппы в^{/8/}. Обратная задача о построении полных коммутирующих наборов операторов по заданной системе координат в R решена в^{/7/} и доведена до конца для динамических групп $L(4,0)$ и $L(3,1)$, так как в этом случае известны системы координат, в которых разделяются переменные в уравнении Лапласа^{/8/}.

В настоящей работе мы формулируем правила для построения системы координат в R , требуемой для классификации базисных функций в H по произвольной заданной цепочке подгрупп, а также для построения самой системы базисных функций в этих координатах для групп $L(m,n)$, $P(m,n)$ ^{x)}. Нетривиальным является вопрос о нормировке базиса. Применяемые для этого методы интегральной геометрии Гельфанда-Граева-Виленкина-Смородицкого^{/5/} сформулированы только для частного случая $n=0,1$ при произвольном фиксированном m ^{/10/}. Мы приведем здесь некоторые соображения в пользу того, что эти методы могут быть без изменения перенесены на общий случай произвольных m и n .

2. Правила построения координатных систем

Вначале, следуя Бакри^{/11/}, перечислим непрерывные подгруппы, обладающие инвариантами, для любой группы $P(m,n)$, $L(m,n)$. Они получаются в качестве соответствующих стационарных подгрупп при последовательном фиксировании пространственно-подобных ($f^2 < 0$), времени-подобных ($f^2 > 0$) и изотропных ($f^2 = 0$) векторов f .

Изобразим этот процесс графически на примере конформной группы $L(4,2)$: движению вверх по наклонному лучу на диаграмме соответствуют фиксации пространственно-подобного вектора f , вниз - времени подобного f и по горизонтали - изотропного f .

x) Все базисные системы, перечисленные в^{/8/} для группы Лоренца $L(3,1)$, входят в рассматриваемый класс.

В Приложении перечислены охватываемые этим методом системы координат и соответствующих базисных функций в этих координатах для группы Пуанкаре $P(3,1)$.

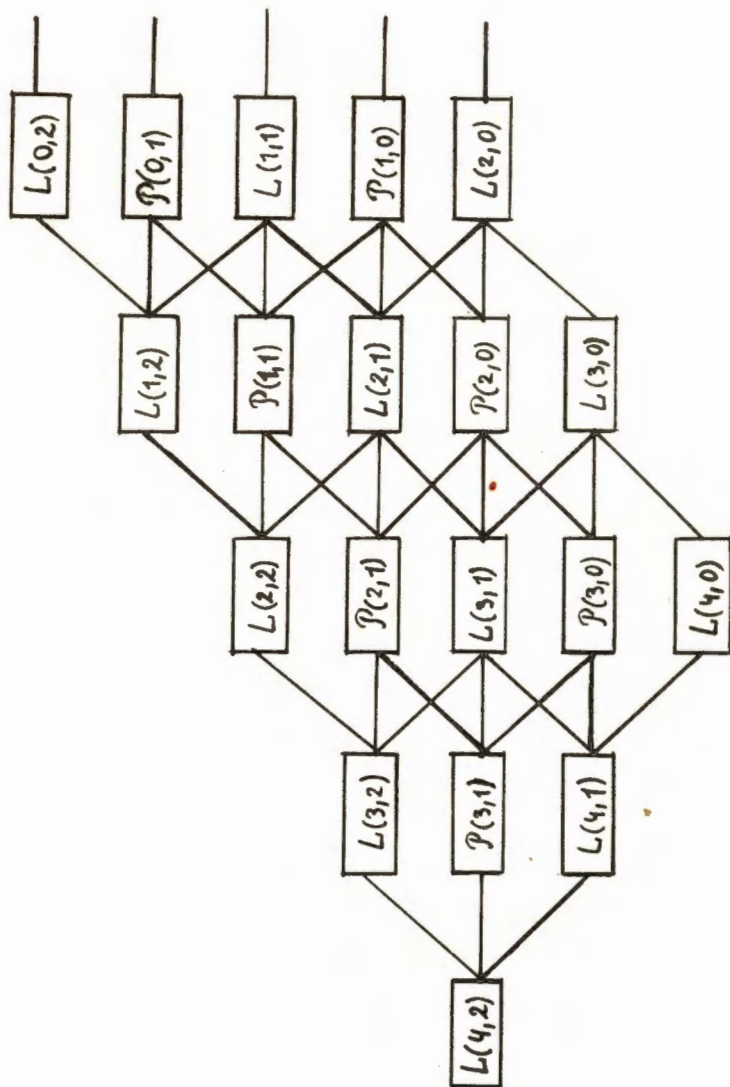


FIG. 1.

Метрическая форма в декартовых координатах имеет вид:

$$(x^{-n+1})^2 + \dots + (x^0)^2 - (x^m)^2 - \dots - (x^1)^2 = 1 \quad \text{для } L(m, n) \quad (1)$$

$$(x^{-n+1})^2 + \dots + (x^0)^2 - (x^m)^2 - \dots - (x^1)^2 = \beta^2 \quad \text{для } P(m, n). \quad (2)$$

Пусть задана цепочка подгрупп, содержащая только одну однопараметрическую подгруппу. Отыщем ее на такой диаграмме. Движение по диаграмме понимается как фиксирование соответственно "пространственных" и "временных" и разностей (или сумм) временной и пространственной координат x^i , т.е. последовательность сечений соответствующего типа (причем условимся двигаться от x^{-n+1} к x^0 и от x^m к x^1). Условимся также при переходе $L(m, n) - P(m-1, n-1)$ фиксировать разность $x^{-k} - x^e$, а при переходе $P(m, n) - L(m, n)$ - сумму $x^{-k} + x^e$. Выбор условий объясняется необходимостью установить взаимно однозначное соответствие между системами координат и классификацией базиса^{х)}.

Новые координаты вводятся так, что первая фиксируемая комбинация декартовых координат x^i зависит только от одной новой координаты, а каждая последовательно фиксируемая комбинация зависит от такой новой координаты, от которой не зависела предыдущие фиксированные комбинации. Таким образом, каждому лучу на диаграмме соответствует одна новая координата.

Если же задана цепочка подгрупп, содержащая две или более однопараметрические подгруппы, то каждому переходу типа

$$L(m, n) \begin{cases} < L(m_1, n_1) \\ < L(m-m_1, n-n_1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{соответствует фиксирование комбинации} \\ \text{Переходу } P(m, n) \begin{cases} < P(m_1, n_1) \\ < P(m-m_1, n-n_1) \end{cases} \text{ не соответствует} \end{array}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m_1} (x^\alpha)^2 + \sum_{\beta=1}^{n_1} (x^\beta)^2.$$

фиксирование каких-либо координат.

Условимся выписывать выражения x^i в новых координатах в виде таблицы, в которой x^i пишется одно под другим в порядке их фиксирования. Тогда указанная процедура приводит к следующим правилам построения координатных систем.

^{х)} Эта однозначность все же нарушается, если в цепочке содержится подряд более двух подгрупп типа $P(m, n)$: одной и той же системе координат соответствует тогда несколько полных наборов.

1. Координате x^α , фиксируемой при переходе $L(m, n) \xrightarrow{n \neq 1} L(m, n-1)$, соответствует множитель $\cos \theta$ в выражении x^α через новые координаты, всем же x^i , расположенным ниже в таблице, соответствует множитель $\sin \theta$.

2. Переходу $L(m, 1) \rightarrow L(m, 0)$ соответствует множитель cha для x^α , sha для x^i , расположенных ниже.

3. Переходу $L(m, n) \xrightarrow{n \neq 0} L(m-1, n)$ соответствует множитель sha для x^α , cha для x^i , расположенных ниже.

4. Переходу $L(m, 0) \rightarrow L(m-1, 0)$ соответствует множитель $\cos \theta$ для x^α , $\sin \theta$ для всех x^i , лежащих ниже.

5. Отметим также, что лучу $L(1, 1) \rightarrow$ соответствует множитель sha для пространственной x^1 и cha для временной x^0 .

6. Если при переходах $P(m, n) \rightarrow P(m, n-1), P(n, n) \rightarrow P(m-1, n)$ фиксируется x^α и им не предшествовало в цепочке ни одного перехода $L(m_1, n_1) \rightarrow P(m_1-1, n_1-1)$, то в качестве новой координаты выбирается сама декартова координата x^α .

7а. Переходу $L(m, n) \rightarrow P(m-1, n-1)$ соответствует выбор в качестве новой координаты комбинации $x^{-k} - x^e = \rho$, фиксируемой при этом переходе. Множитель ρ для всех x^i или их комбинаций, лежащих ниже в таблице, за исключением $x^{-k} + x^e$ (или $(x^{-k})^2 - (x^e)^2$), фиксируемой при первом же следующем переходе $P(m_1, n_1) \rightarrow L(m_1, n_1)$.

7в. m_1, n_1 , вообще говоря, не равны $m-1, n-1$, так как за переходом 7а может следовать цепочка $P(m-1, n-1) \rightarrow P(m-2, n-1) \rightarrow \dots \rightarrow P(m_1, n_1)$. Каждой координате x^α фиксируемой при переходах в этой цепочке, соответствует в выражении ее через новые координаты множитель, который обозначаем β^α , если x^α пространственная, ζ^α , если x^α - временная.

7с. Наконец, переходу $P(m_1, n_1) \xrightarrow[n_1=0]{n_1 \neq 0} L(m_1, n_1)$ тогда соответствует множитель $[1 + \rho^2 (\sum \beta_\alpha^2 - \sum \zeta_\alpha^2 + \tau^2)]$ в выражении через новые координаты для комбинации $(x^{-k})^2 - (x^e)^2$, фиксируемой при этом переходе, и множитель τ - для x^i , расположенных ниже в таблице.

7д. Если переходу $P(m, n) \rightarrow L(m, n)$ не предшествовали $L(m_1, n_1) \rightarrow P(m_1-1, n_1-1)$, то ему соответствует множитель ρ для всех x^i из (2).

8. Рассмотрим теперь случай, когда в результате ветвления цепочки имеется больше чем одна однопараметрическая подгруппа. Тогда переходу

$$L(m, n) \begin{cases} \leftarrow L(m_1, n_1) \\ \leftarrow L(m-m_1, n-n_1) \end{cases} \quad \begin{matrix} n \neq n_1, \\ \text{если } n_1 \neq 0 \end{matrix}$$

соответствует множитель $\cos \theta$ для всех x^i из комбинации $-\sum_{\alpha=1}^{m_1} (x^\alpha)^2 + \sum_{\beta=1}^{n_1} (x^\beta)^2$ фиксируемой при этом переходе, и множитель $\sin \theta$ для x^i из комбинации $-\sum_{\alpha=1}^m (x^\alpha)^2 + \sum_{\beta=1}^n (x^\beta)^2$.

8. При переходе же $L(m, n) < \begin{matrix} L(m_1, n) \\ L(m-m_1, n) \end{matrix} \quad n \neq 0$

координатам x^i из этих комбинаций в выражении их через новые координаты приписываются множители cha и sha соответственно.

10. Лучу $P(m, n) < \begin{matrix} P(m_1, n_1) \\ P(m-m_1, n-n_1) \end{matrix}$ не соответствуют новые координаты.

В качестве иллюстрации выпишем, пользуясь сформулированными правилами, систему координат для цепочки

$$L(3, 4) - P(2, 3) - L(2, 3) - L(2, 2) - P(1, 1) - P(0, 1) - .$$

Метрическая форма в декартовых координатах имеет вид:

$$(x^{-3})^2 + (x^{-2})^2 + (x^{-1})^2 + (x^0)^2 - (x^3)^2 - (x^2)^2 - (x^1)^2 = 1.$$

$x^{-3} - x^3 = \rho$ $(x^{-3})^2 - (x^3)^2 = 1 - \rho^2 \tau^2$ $x^{-2} = \rho \tau \cos \theta$ $x^{-1} - x^2 = \rho \tau \sin \theta \rho_0$ $x^1 = \rho \tau \sin \theta \rho_0 \theta$ $x^0 = \rho \tau \sin \theta \rho_0 c$ $(x^{-1})^2 - (x^2)^2 = \rho^2 \tau^2 \sin^2 \theta [1 + \rho_0^2 (\theta^2 - c^2)]$	$x^{-3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} + \rho (1 - \tau^2) \right]$ $x^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \rho (1 + \tau^2) \right]$ $x^{-2} = \rho \tau \cos \theta$ $x^{-1} = \frac{\rho \tau \sin \theta}{2} \left[\frac{1}{\rho_0} + \rho_0 (1 + \theta^2 - c^2) \right]$ $x^2 = \frac{\rho \tau \sin \theta}{2} \left[\frac{1}{\rho_0} - \rho_0 (1 - \theta^2 + c^2) \right]$ $x^1 = \rho \tau \sin \theta \rho_0 \theta$ $x^0 = \rho \tau \sin \theta \rho_0 c$
---	---

Т а б л и ц а 1.

В таблице справа мы перешли от комбинаций x^i к самим x^i .

3. Правила построения систем базисных функций

В выбранной системе координат нетрудно вычислить метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и оператор Лапласа Δ в соответствии с формулами:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial u^\beta}, \quad (3)$$

где g_{ab} - метрический тензор в декартовых координатах x^i , u^α - новые координаты.

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \quad (4)$$

где

$$g = \det g_{\alpha\beta}.$$

Запишем уравнение для собственных функций лапласиана Δ , образующих базис для неприводимого представления соответствующей группы. В системе координат, построенной по правилам п. 2, это есть уравнение с разделяющимися переменными и константы разделения связаны со спектрами инвариантов подгрупп, содержащихся в заданной цепочке. Эти спектры имеют вид:

$$\text{для } \begin{matrix} L(m, n) \\ m \neq 0 \ n \neq 0 \end{matrix} \quad -\mathcal{L}(\mathcal{L} + \mathcal{K} - 2), \text{ где } \mathcal{K} = m + n. \quad (5)$$

$$\text{для } \begin{cases} L(m, 0) \\ L(0, m) \end{cases} \quad \pm \ell(\ell + m - 2) \quad (6)$$

$$\text{для } \begin{matrix} \mathcal{P}(m, n) \\ n \neq 0 \end{matrix} \quad -p^2 \quad (7)$$

$$\text{для } \mathcal{P}(m, 0) \quad p^2. \quad (8)$$

Представления унитарны, если $-\mathcal{L}(\mathcal{L} + \mathcal{K} - 2) = \left(\frac{\mathcal{K} - 2}{2}\right)^2 + p^2$. p всюду вещественно.

Решение получаемых уравнений приводит к правилам построения базисных функций. Так как любой цепочке соответствует произведение функций, зависящих от каждой из координат в отдельности, то каждому лучу в цепочке можно сопоставить множитель, зависящий от одной переменной, и правила формулируются для отыскания таких сомножителей по произвольным заданным лучам. Полученные правила сведем в таблицу, в которой слева стоят лучи, а справа — соответствующие им функции. Индекс при символах L и \mathcal{P} связан со спектрами соответствующих инвариантов формулами (5) — (8). Параметр \mathcal{L} связан с целочисленным индексом ℓ соотношением:

$$\mathcal{L} = \frac{m-2}{2} + \ell. \quad m > 1 \quad (10)$$

Напомним, что $\mathcal{K} = m + n$, $\mathcal{K}_1 = m_1 + n_1$.

$L_p(m, n) - L_q(m, n-1)$ $n \neq 1 \quad m \neq 0$	$\frac{1}{\sin \frac{m+n-1}{2} \theta} P_{-\frac{1}{2}+ip}^{iq}(\cos \theta)$
$L_p(m, 1) - L_e(m, 0)$	$\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m-1}{2} a} P_{-\frac{1}{2}+ip}^x(\operatorname{cha})$
$L_{e_1}(0, n) - L_{e_2}(0, n-1)$ $n \geq 2$	$\frac{1}{\sin \frac{n-1}{2} \theta} P_{-\frac{1}{2}+k_1}^{k_2}(\cos \theta)$
$L_m(0, 2) -$	$e^{im\gamma}$
$L_p(m, n) - L_q(m-1, n)$ $n \neq 0 \quad m \neq 1$	$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m+n-1}{2} a} P_{-\frac{1}{2}+ip}^{iq}(i \operatorname{sha})$
$L_p(1, n) - L_e(0, n)$ $n > 1$	$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n-1}{2} a} P_{-\frac{1}{2}+ip}^x(i \operatorname{sha})$
$L_p(1, 1) -$	e^{ipa}
$L_{e_1}(m, 0) - L_{e_2}(m-1, 0)$	$\frac{1}{\sin \frac{m-1}{2} \theta} P_{-\frac{1}{2}+k_1}^{k_2}(\cos \theta)$
* $\mathcal{P}_p(m, n) - \mathcal{P}_q(m-1, n)$	$e^{i\sqrt{q^2-p^2} c^a}$
$\mathcal{P}_p(m, n) - \mathcal{P}_q(m, n-1)$ $n \neq 1$	$e^{i\sqrt{p^2-q^2} c^a}$
$\mathcal{P}_p(m, 1) - \mathcal{P}_q(m, 0)$	$e^{i\sqrt{p^2+q^2} c^0}$

Т а б л и ц а 3

x) В соответствии со сказанным выше, если в цепочке до луча $\mathcal{P}(m_1, n_1) - \mathcal{P}(m_2, n_2)$ не встречается луч $L(m, n) - \mathcal{P}(m-1, n)$, то вместо b^a, c^a пишем x^a .

$\mathcal{P}_p(m, n) \underset{n \neq 0}{=} L_q(m, n)$	$\frac{1}{r^{\frac{m+n-2}{2}}} Z_{iq}(p\tau)$
$\mathcal{P}_p(m, 0) \underset{=} L_e(m, 0)$	$\frac{1}{r^{\frac{m-2}{2}}} Z_x(p\tau)$
$L_q(m, n) \underset{n \neq 1}{=} \mathcal{P}_p(m-1, n-1)$	$\frac{1}{p^{\frac{m+n-2}{2}}} Z_{iq}\left(\frac{p}{p}\right)$
$L_q(m, 1) \underset{=} \mathcal{P}_p(m-1, 0)$	$\frac{1}{p^{\frac{m-1}{2}}} Z_{iq}\left(\frac{ip}{p}\right)$
* $L_p(m, n) \begin{cases} L_q(m_1, n_1) \\ L_s(m-m_1, n-n_1) \end{cases}$ $m \neq m_1, n \neq n_1, m_1 \neq 0, n_1 \neq 0$	$\frac{1}{\cos^{ip+\frac{k-2}{2}}\theta} \operatorname{tg}^{-\frac{(k-k_1-2)}{2}+is} F\left[\frac{1+i(p+q+s)}{2}, \frac{1+i(p-q+s)}{2}, 1+is; -\operatorname{tg}^2\theta\right]$
$L_p(m, n) \begin{cases} L_q(m_1, n) \\ L_e(m-m_1, 0) \end{cases}$ $m_1 \neq 0$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^{ip+\frac{k-2}{2}}a} \operatorname{th}^s F\left[\frac{1+i(p+q)+s}{2}, \frac{1+i(p-q)+s}{2}, 1+s; \operatorname{th}^2 a\right]$
$L_p(m, n) \begin{cases} L_{e_0}(0, n) \\ L_e(m, 0) \end{cases}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^{ip+\frac{k-2}{2}}a} \operatorname{th}^s F\left[\frac{1+ip+\frac{s_0+s}{2}}{2}, \frac{1+ip-\frac{s_0+s}{2}}{2}, 1+s; \operatorname{th}^2 a\right]$
$L_p(m, n) \begin{cases} L_e(0, n_1) \\ L_s(m, n-n_1) \end{cases}$ $m \neq 0$	$\frac{1}{\cos^{ip+\frac{k-2}{2}}\theta} \operatorname{tg}^{-\frac{(k-k_1-2)}{2}+is} F\left[\frac{1+i(p+s)+s}{2}, \frac{1+i(p+s)-s}{2}, 1+is; -\operatorname{tg}^2\theta\right]$
$L_e(0, n) \begin{cases} L_{e_1}(0, n_1) \\ L_{e_2}(0, n-n_1) \end{cases}$	$\cos^s \operatorname{tg}^{s_2} F\left(\frac{1+s_1+s_2-s}{2}, \frac{1-s_1+s_2-s}{2}, 1+s_2; -\operatorname{tg}^2\theta\right)$
$\mathcal{P}_p(m, n) \begin{cases} \mathcal{P}_q(m_1, n_1) \\ \mathcal{P}_s(m-m_1, n-n_1) \end{cases}$	1

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

x) Если имеется более одной однопараметрической подгруппы в цепочке то цепочка ветвится. Ниже формулируем правила для лучей в точках ветвления.

Укажем еще пределы изменения выбранных переменных:

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 < a, \rho, \tau < \infty, \quad -\infty < x^i, \theta^i, c^i < \infty$$

$P_\nu^{\mu}(x)$ означает решение уравнения для присоединенных функций Лежандра, $Z_\nu(x)$ – решение уравнения Бесселя, $F(a, b, c; x)$ – решение гипергеометрического уравнения Гаусса, причем остается еще произвол в выборе комбинации линейно-независимых решений этих уравнений.

В качестве иллюстраций выпишем, пользуясь таблицей 3, систему базисных функций, соответствующую цепочке

$$L_q(3,4) - P_p(2,3) - L_x(2,3) - L_\lambda(2,2) - P_\nu(1,1) - P_\mu(0,1) -$$

т.е. в системе координат, определенной в таблице 2.

$$\Phi_{(q\rho x\lambda\nu\mu)} = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} Z_{iq}\left(\frac{\rho}{\rho}\right) \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}(\rho\tau) \frac{1}{\sin\theta} P_{-\frac{1}{2}+ix}^{i\lambda}(\cos\theta) \cdot \frac{1}{\rho_0} Z_{i\lambda}\left(\frac{\nu}{\rho_0}\right) e^{i\nu\mu^2 - \nu^2\theta} e^{i\mu c} \quad (11)$$

4. Обсуждение результатов и замечания о нормировке базиса

Из вида полученных выражений для отдельных сомножителей в системах базисных функций (см. таблицу 3) нетрудно заключить, что они разбиваются на 5 больших классов в зависимости от того, соответствуют ли они лучам

$$L(m, n) - L(m_1, n_1), \quad P(m, n) - P(m_1, n_1), \quad L(m, n) - P(m-1, n-1), \\ P(m, n) - L(m, n) \quad \text{или} \quad L(m, n) < \frac{L(m_1, n_1)}{L(m-m_1, n-n_1)}.$$

При этом различия внутри классов связаны только с небольшими отличиями однотипных систем координат (различия в аргументах однотипных функций) и различиями в спектрах соответствующих инвариантов (отличия в индексах этих функций), появляющимися в тех случаях, когда на одном из концов соответствующего луча у $P(m, n)$ или $L(m, n)$ один из индексов m или n равен нулю.

Уже для $n=1$ можно убедиться, что если выбрать такие системы координат для рассматриваемой группы, что не имеет места указанный специальный случай (т.е. в цепочке не встречается $P(m, n)$ или $L(m, n)$ с m или n равными нулю), то вид базисных функций подчиняется общей закономерности, справедливой и для $n>1$.

Поэтому так как при нормировке базиса по Гельфанду-Граеву-Виленкину-Смордианскому нормированные системы функций представляются в виде интегралов с опре-

деленного вида ядрами, а соответствующие сомножители в этих системах идентичны для $n=1$ и для $n>1$ при фиксированном $k=m+n$, то вид этих ядер должен зависеть только от k , но не от значения n ($n>0$).

В таком случае интегральные методы построения нормированных систем функций переносятся на общий случай произвольного n и каждому лучу можно сопоставить интегральный оператор ^{x)}.

Каждому из лучей $L(m, n) - L(m_1, n_1)$, $P(m, n) - P(m_1, n_1)$ или $L(m, n) \left\langle \begin{matrix} L(m_1, n_1) \\ L(m-m_1, n-n_1) \end{matrix} \right.$ соответствует в произведении интегральных операторов сомножитель

$$\frac{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}{2i(2\pi)^{k-1}} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\beta+k-2)}{\Gamma(\beta)} \int_{\rho} d\zeta d\zeta^{\frac{k-2}{2}} (u\zeta)^{-\beta-k+2}, \text{ если } k \text{ чётно} \quad (12)$$

$$\text{и} \quad \frac{(-1)^{\frac{k-3}{2}}}{2i(2\pi)^{k-1}} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\beta+k-2)}{\Gamma(\beta)} \operatorname{ctg} \pi \beta \int_{\rho} d\zeta d\zeta^{\frac{k-2}{2}} (u\zeta)^{-\beta-k+2}, \text{ если } k \text{ нечётно.} \quad (13)$$

Здесь $k=m+n$, а Γ - сечение, соответствующее данному лучу, которое имеется при построении системы координат методом, описанным выше (система координат для переменных u, ζ , таким образом, фиксирована). Лучам $P(m, n) - L(m, n)$ и $P(m, n) - P(m_1, n_1)$ соответствует обращенное преобразование Радона:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\zeta} d\zeta^{\frac{k-1}{2}} e^{ix(u\zeta)}. \quad (14)$$

Для этих преобразований справедливы обычные формулы обращения, и вопрос о нормировке базиса в принципе решен. В качестве иллюстрации приведем разложение по нормированной системе функций для конформной группы:

$$L(4, 2) - L(3, 2) - L(3, 1) - L(3, 0) - L(2, 0) -$$

$$f(x) = \frac{1}{2i(2\pi)^5} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\beta \frac{\Gamma(\beta+4)}{\Gamma(\beta)} \int_{\rho_0} d^4 \zeta_{(0)} (x \zeta_{(0)})^{-\beta-4} \frac{i}{2(2\pi)^4} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} d\tau \frac{\Gamma(\tau+3)}{\Gamma(\tau)} \cdot \operatorname{ctg} \pi \tau \int_{\rho_1} d^3 \zeta_{(1)} (\zeta_{(0)} \zeta_{(1)})^{-\tau-3} \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\rho+2)}{\Gamma(\rho)} \int_{\rho_2} d\rho d^2 \zeta_{(2)} (\zeta_{(1)} \zeta_{(2)})^{-\rho-2}. \quad (15)$$

$$\cdot \sum_{\ell, m} y_{\ell m}(\theta_2, \varphi_2) a_{\ell m}(\rho, \tau, \beta).$$

x) Расходящиеся интегралы ниже понимаются в смысле значения, регуляризованного путем аналитического продолжения по показателю степени (см. ⁵⁾ и ссылки, имеющиеся там).

Вид сечения Γ_i и, следовательно, система координат для переменных $x, \xi_{(i)}$ устанавливается в соответствии с п. 2:

$$\begin{aligned}x^4 &= \text{sh } \theta \\x^{-1} &= \text{ch } \theta \cos \alpha \\x^0 &= \text{ch } \theta \sin \alpha \text{ ch } a \\x^3 &= \text{ch } \theta \sin \alpha \text{ sh } a \cos \theta \\x^2 &= \text{ch } \theta \sin \alpha \text{ sh } a \sin \theta \cos \varphi \\x^1 &= \text{ch } \theta \sin \alpha \text{ sh } a \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{(0)}^4 &= \pm 1 \\ \xi_{(0)}^{-1} &= \cos \alpha_0 \\ \xi_{(0)}^0 &= \sin \alpha_0 \text{ ch } a_0 \\ \xi_{(0)}^3 &= \sin \alpha_0 \text{ sh } a_0 \cos \theta_0 \\ \xi_{(0)}^2 &= \sin \alpha_0 \text{ sh } a_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \xi_{(0)}^1 &= \sin \alpha_0 \text{ sh } a_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0\end{aligned}$$

$$\xi_{(1)}^{-1} = \pm i.$$

$$\xi_{(1)}^0 = \text{ch } a_1$$

$$\xi_{(1)}^3 = \text{sh } a_1 \cos \theta_1$$

$$\xi_{(1)}^2 = \text{sh } a_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1$$

$$\xi_{(1)}^1 = \text{sh } a_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1$$

$$\xi_{(2)}^0 = \pm 1.$$

$$\xi_{(2)}^3 = \cos \theta_2$$

$$\xi_{(2)}^2 = \sin \theta_2 \cos \varphi_2$$

$$\xi_{(2)}^1 = \sin \theta_2 \sin \varphi_2$$

Формула обращения имеет вид:

$$\begin{aligned}a_{em}(p, \tau, b) &= \int d\Omega_{\xi_{(2)}} Y_{em}^*(\theta_2, \varphi_2) \int d\Omega_{\xi_{(1)}} (\xi_{(2)} \xi_{(1)})^p \cdot \\ &\cdot \int d\Omega_{\xi_{(0)}} (\xi_{(1)} \xi_{(0)})^\tau \int d\Omega_x (\xi_{(0)} x)^b f(x).\end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $d\Omega_{\gamma(i)}$, $d\Omega_x$ - инвариантные элементы объема, выраженные в заданной системе координат.

В заключение автор выражает глубокую признательность Я.А. Смороднянскому за предложенную тему и постоянное внимание к работе и П. Винтерняццу за полезные обсуждения.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Классификация базисных волновых функций реализующих представления группы Пуанкаре для бесспиновых частиц

Здесь мы перечислим координатные системы и соответствующие им системы базисных функций для представлений группы Пуанкаре, входящих в рассматриваемый класс. Некоторым системам координат (в том числе и декартовой) будут соответствовать несколько различных цепочек подгруппы и, следовательно, несколько систем базисных функций (см. замечание на стр. 6).

$$1 \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(3,0) - L_e(3,0) - L_m(2,0) -$$

$$\begin{aligned} x^0 &= x^0 \\ x^3 &= r \cos \theta \\ x^2 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ x^1 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad e^{i\sqrt{p^2+q^2}x^0} \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} Z_{e+\frac{1}{2}}(qr) P_e^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$2 \quad \alpha) \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(3,0) - \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) -$$

$$\begin{aligned} x^0 &= x^0 \\ x^3 &= x^3 \\ x^2 &= r \cos \varphi \\ x^1 &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad e^{i\sqrt{p^2+q^2}x^0} e^{i\sqrt{x^2-q^2}x^3} Z_m(xr) e^{im\varphi}$$

$$\beta) \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) -$$

$$e^{i\sqrt{q^2-p^2}x^3} e^{i\sqrt{q^2+x^2}x^0} Z_m(xr) e^{im\varphi}$$

$$\gamma) \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(3,0) < \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) -$$

$$e^{i\sqrt{p^2+q^2}x^0} e^{i\mu x^3} Z_m(xr) e^{im\varphi} \quad \mathcal{P}_\mu(1,0) - \quad q^2 = x^2 + \mu^2$$

$$d) \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) - \\ \mathcal{P}_\mu(0,1) - \end{array} \right. \quad -p^2 = -\mu^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{q^2 - p^2}x^3} e^{i\mu x^0} Z_m(xr) e^{im\varphi}$$

$$e) \quad \mathcal{P}_p(3,1) \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{P}_q(1,1) - \mathcal{P}_\mu(0,1) - \\ \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) - \end{array} \right. \quad -p^2 = -q^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{\mu^2 - q^2}x^3} e^{i\mu x^0} Z_m(xr) e^{im\varphi}$$

$$f) \quad \mathcal{P}_p(3,1) \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{P}_q(1,1) - \mathcal{P}_\mu(1,0) - \\ \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) - \end{array} \right. \quad -p^2 = -q^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{q^2 + \mu^2}x^0} e^{i\mu x^3} Z_m(xr) e^{im\varphi}$$

3. Декартова система.

$$x^0 = x^0$$

$$x^3 = x^3$$

$$x^2 = x^2$$

$$x^1 = x^1$$

$$a) \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(3,0) - \mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$$

$$e^{i\sqrt{p^2 + q^2}x^0} e^{i\sqrt{x^2 - q^2}x^3} e^{i\sqrt{\mu^2 - x^2}x^2} e^{i\mu x^1}$$

$$b) \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - \mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$$

$$e^{i\sqrt{q^2 - p^2}x^3} e^{i\sqrt{q^2 + x^2}x^0} e^{i\sqrt{\mu^2 - x^2}x^2} e^{i\mu x^1}$$

$$c) \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - \mathcal{P}_x(1,1) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$$

$$e^{i\sqrt{q^2 - p^2}x^3} e^{i\sqrt{x^2 - q^2}x^2} e^{i\sqrt{x^2 + \mu^2}x^0} e^{i\mu x^1}$$

$$d) \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - \mathcal{P}_x(1,1) - \mathcal{P}_\mu(0,1) -$$

$$e^{i\sqrt{q^2 - p^2}x^3} e^{i\sqrt{x^2 - q^2}x^2} e^{i\sqrt{\mu^2 - x^2}x^1} e^{i\mu x^0}$$

$$e) \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(3,0) < \frac{\mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\mu(1,0)}{\mathcal{P}_\lambda(1,0)} - \quad q^2 = x^2 + \lambda^2$$

$$e^{i\sqrt{p^2+q^2}x^0} e^{i\lambda x^3} e^{i\sqrt{\mu^2-x^2}x^2} e^{i\mu x^1}$$

$$f) \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) < \frac{\mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\mu(1,0)}{\mathcal{P}_\lambda(0,1)} - \quad -q^2 = -\lambda^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{q^2-p^2}x^3} e^{i\lambda x^0} e^{i\sqrt{\mu^2-x^2}x^2} e^{i\mu x^1}$$

$$g) \mathcal{P}_p(3,1) < \frac{\mathcal{P}_q(1,1) - \mathcal{P}_\mu(0,1)}{\mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\lambda(1,0)} - \quad -p^2 = -q^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{\mu^2-q^2}x^3} e^{i\mu x^0} e^{i\sqrt{\lambda^2-x^2}x^2} e^{i\lambda x^1}$$

$$h) \mathcal{P}_p(3,1) < \frac{\mathcal{P}_q(1,1) - \mathcal{P}_\mu(1,0)}{\mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\lambda(1,0)} - \quad -p^2 = -q^2 + x^2$$

$$e^{i\sqrt{q^2+\mu^2}x^0} e^{i\mu x^3} e^{i\sqrt{\lambda^2-x^2}x^2} e^{i\lambda x^1}$$

4.

$$x^0 = r \operatorname{cha}$$

$$x^3 = r \operatorname{sha} \cos \theta$$

$$x^2 = r \operatorname{sha} \sin \theta \cos \varphi$$

$$x^1 = r \operatorname{sha} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - L_\ell(3,0) - L_m(2,0)$$

$$\frac{1}{r} Z_{iq}(pr) \frac{1}{\operatorname{sha}^{\frac{1}{2}}} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{2+\frac{1}{2}}(\operatorname{cha}) P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

5.

$$x^0 = \frac{1}{2} r \left[\frac{1}{\rho} + \rho(1+\tau_0^2) \right]$$

$$x^3 = \frac{1}{2} r \left[\frac{1}{\rho} - \rho(1-\tau_0^2) \right]$$

$$x^2 = r \rho \tau_0 \cos \varphi$$

$$x^1 = r \rho \tau_0 \sin \varphi$$

$$\mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0)$$

$$\frac{1}{r} Z_{iq}(pr) \frac{1}{\rho} Z_{iq}\left(\frac{iX}{\rho}\right) Z_m(x\tau_0) e^{im\varphi}$$

$$6. \quad \mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - \mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$$

$$x^0 = \frac{1}{2} \tau \left[\frac{1}{p} + p(1 + \beta_2^2 + \beta_1^2) \right]$$

$$x^3 = \frac{1}{2} \tau \left[\frac{1}{p} - p(1 - \beta_2^2 - \beta_1^2) \right]$$

$$x^2 = \tau p \beta_2 \quad \frac{1}{\tau} Z_{iq}(p\tau) \frac{1}{p} Z_{iq}\left(\frac{i\mu}{p}\right) e^{i\sqrt{\mu^2 - x^2} \beta_2} e^{i\mu \beta_1}$$

$$x^1 = \tau p \beta_1$$

$$7. \quad \mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - L_x(2,1) - L_m(2,0) -$$

$$x^3 = \tau \operatorname{sh} \alpha$$

$$x^0 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{ch} \theta$$

$$x^2 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{sh} \theta \cos \varphi$$

$$x^1 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{sh} \theta \sin \varphi$$

$$\frac{1}{\tau} Z_{iq}(p\tau) \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} \alpha} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ix}(\operatorname{isha}) P_{-\frac{1}{2}+ix}^m(\operatorname{ch} \theta) \cdot e^{i\mu \varphi}$$

$$8. \quad \mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - L_x(2,1) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$$

$$x^3 = \tau \operatorname{sh} \alpha$$

$$x^0 = \frac{1}{2} \tau \operatorname{cha} \left[\frac{1}{p} + p(1 + \beta^2) \right]$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \tau \operatorname{cha} \left[\frac{1}{p} - p(1 - \beta^2) \right]$$

$$x^1 = \tau \operatorname{cha} p \beta$$

$$\frac{1}{\tau} Z_{iq}(p\tau) \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} \alpha} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ix}(\operatorname{isha}) \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}\left(\frac{i\mu}{p}\right) e^{i\mu \beta}$$

$$9. \quad \mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) - L_x(2,1) - L_\mu(1,1) -$$

$$x^3 = \tau \operatorname{sh} \alpha$$

$$x^2 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{sh} \theta$$

$$x^0 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \varphi$$

$$x^1 = \tau \operatorname{cha} \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \varphi$$

$$\frac{1}{\tau} Z_{iq}(p\tau) \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} \alpha} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ix}(\operatorname{isha}) P_{-\frac{1}{2}+ix}^{i\mu}(\operatorname{ish} \theta) e^{i\mu \varphi}$$

$$10. \quad \mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - L_x(2,1) - L_m(2,0) -$$

$$x^3 = x^3$$

$$x^0 = \tau \operatorname{cha}$$

$$x^2 = \tau \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi$$

$$x^1 = \tau \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi$$

$$e^{i\sqrt{q^2 - p^2} x^3} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}(q\tau) P_{-\frac{1}{2}+ix}^m(\operatorname{cha}) e^{i\mu \varphi}$$

11. $\mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - L_x(2,1) - \mathcal{P}_\mu(1,0) -$
 $x^3 = x^3$
 $x^0 = \frac{1}{2} \tau \left[\frac{1}{\rho} + \rho(1+\beta^2) \right] e^{i\sqrt{q^2 - \rho^2} x^3} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}(q\tau) \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}\left(\frac{i\mu}{\rho}\right) e^{i\mu\theta}$
 $x^2 = \frac{1}{2} \tau \left[\frac{1}{\rho} - \rho(1-\beta^2) \right]$
 $x^1 = \tau \rho \theta.$

12. $\mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - L_x(2,1) - L_\mu(1,1) -$
 $x^3 = x^3$
 $x^2 = \tau \text{sha}$
 $x^0 = \tau \text{chach}\eta$
 $x^1 = \tau \text{chash}\eta$
 $e^{i\sqrt{q^2 - \rho^2} x^3} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} Z_{ix}(q\tau) P_{-\frac{1}{2} + ix}^{i\mu} (i\text{sha}) e^{i\mu\eta}$

13. a) $\mathcal{P}_p(3,1) - \mathcal{P}_q(2,1) - \mathcal{P}_x(1,1) - L_\mu(1,1) -$
 $x^3 = x^3$
 $x^2 = x^2$
 $x^0 = \tau \text{ch}\eta$
 $x^1 = \tau \text{sh}\eta$
 $e^{i\sqrt{q^2 - \rho^2} x^3} e^{i\sqrt{x^2 - q^2} x^2} Z_{i\mu}(x\tau) e^{i\mu\eta}$
 b) $\mathcal{P}_p(3,1) \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{P}_q(1,1) - L_\mu(1,1) - \\ \mathcal{P}_x(2,0) - \mathcal{P}_\lambda(1,0) - \end{array} \right. - \rho^2 = -q^2 + x^2$
 $e^{i\sqrt{\lambda^2 - x^2} x^3} e^{i\lambda x^2} Z_{i\mu}(q\tau) e^{i\mu\eta}$

14. $\mathcal{P}_p(3,1) \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{P}_q(1,1) - L_\mu(1,1) - \\ \mathcal{P}_x(2,0) - L_m(2,0) - \end{array} \right. - \rho^2 = -q^2 + x^2$
 $x^0 = \rho \text{cha}$
 $x^3 = \rho \text{sha}$
 $x^2 = \tau \cos\eta$
 $x^1 = \tau \sin\eta$
 $Z_{i\mu}(q\rho) e^{i\mu\alpha} Z_m(x\tau) e^{i\mu\eta}$

15. $\mathcal{P}_p(3,1) - L_q(3,1) \left\langle \begin{array}{l} L_x(1,1) - \\ L_m(2,0) - \end{array} \right.$
 $x^0 = \tau \text{chach}\theta$
 $x^3 = \tau \text{chash}\theta$
 $x^2 = \tau \text{sha} \cos\eta$
 $x^1 = \tau \text{sha} \sin\eta$

$$\frac{1}{\tau} Z_{iq}(\rho\tau) \frac{1}{\text{cha}^{q+1}} \text{tha}^m F\left[\frac{1+i(q+x)+m}{2}, \frac{1+i(q-x)+m}{2}, 1+m; \text{th}^2\alpha\right] \cdot e^{ix\theta} e^{i\mu\eta}$$

Л и т е р а т у р а

1. С. Fronsdal. Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 221; Proc. Roy. Soc. 288 (1965) 113.
2. И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Труды Московского математического общества, 8 (1959) 321.
3. С. Хелгасон "Дифференциальная геометрия и симметрические пространства", МИР, М. (1984).
4. Ja. A. Smorodinsky, M. Uhlir, P. Winternitz. Preprint JINR E-1591 and P-1690, Dubna, 1964; ЯФ, 1, 183 (1984).
5. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ 46, 1793 (1984).
6. П. Винтерницц, И. Фриш. ЯФ, 1, 889 (1985).
7. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. ЖЭТФ 50, 653 (1988).
8. М.Н. Олевский. Матем. сб. 27, 379 (1950).
9. J. Fischer, J. Niederle and R. Raczka. Preprint IC/65/63, Trieste (1965), J. Niederle and R. Raczka, preprint IC/65/89, Trieste, 1965.
10. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М (1982).
Н.Я. Виленкин. Труды Московского математического общества, 12 (1983) 185.
11. H. Vasyu, Annales de Institut Henri Poincaré, A2, (1965) 327.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июня 1986 г.