Изв. ВУЗ „Радиофизика“, 1967, т.10, № 4, с.455-460

16/VIII

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2783-2

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г. Маханьков

О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ) ПЛАЗМЫ С ГОРЯЧИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ТОКОМ

1966

P-2783-2

В.Г. Маханьков

О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ) ПЛАЗМЫ С ГОРЯЧИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ТОКОМ

Направлено в "Известия вузов (радиофизика)"

В работах [1,2] в линейном приближении исследуется устойчивость ограниченной холодной плазмы с пучком как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля.

Однако несмотря на указание в [1/x)], до последнего времени вопрос о правильных граничных условиях оставался открытым. В недавних работах Михайловского и Пашицкого [3] и автора [4] были получены правильные граничные условия для различных мод колебаний, справедливые, однако, для холодной плазмы. Представляет интерес исследовать спектр колебаний цилиндрической плазмы с пучком в случае больших температур, когда дебаевский радиус экранирования много больше поперечного размера системы. Будем решать задачу на основе кинетического уравнения Власова. Нужно отметить, что вопрос о применимости уравнения Власова к системам с размерами, меньшими дебаевской длины, детально не исследован.

Решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f^{a}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f^{a}}{\partial \vec{v}} - \frac{e_a}{m_a}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right)\frac{\partial f^{a}}{\partial \vec{v}} = 0 \tag{1.1}$$

для возмущений вида $\exp\{-i(\omega t - k_z z - n\theta)\}$ в линейном приближении, с учетом граничных условий

$$\delta f^{a}_{(-)} = p\,\delta f^{a}_{(+)}\Big|_{\rho=a} \qquad 0 \le p \le 1$$
$$\delta f^{a}_{(-)} = \delta f^{a}_{(+)}\Big|_{\rho=0} \tag{1.2}$$

где $\delta f^{a}_{(-)}(-v_\rho, v_\theta, v_z)$ и $\delta f^{a}_{(+)}(v_\rho, v_\theta, v_z)$, a – радиус системы, имеет вид

$$\delta f^{a}_{(+)} = \frac{1}{v_\rho \Delta}\left\{\int_0^{\rho} A^{+} e^{-i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1-\rho+a)}d\rho_1 + p\int_{\rho}^{a} A^{+} e^{-i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1-\rho-a)}d\rho_1 + \int_0^{a} A^{-} e^{+i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1+\rho-a)}d\rho_1\right.$$

---

x) В [1] правильные граничные условия для холодной цилиндрической плазмы с пучком получены в случае аксиально-симметричных возмущений.

$$\delta f^{\alpha}_{(-)} = \frac{1}{v_\rho \Delta} \{ \int\limits_\rho^a A^- e^{+i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1-\rho-a)} \delta\rho_1 + p\int\limits_0^\rho A^- e^{+i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1-\rho+a)} d\rho_1 + p\int\limits_0^a A^+ e^{-i\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1+\rho-a)} d\rho_1 \}.$$

Здесь введены обозначения

$$\overset{+}{A} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}[\mp E \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\rho} - E_\theta \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\theta} - E_z \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_z} \pm \frac{1}{c}(v_z H_\theta - v_\theta H_z)\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\rho} \pm$$

$$\pm \frac{1}{c}(v_\rho H_z \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\theta} - v_z H_\rho \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\theta} + v_\theta H_\rho \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_z} - v_\rho H_\theta \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_z})],$$

$$\omega' = \omega - k_z v_z - \frac{n}{\rho} v_\theta, \tag{1.4}$$

$$\Lambda = p e^{i\frac{\omega'}{v_\rho}a} - e^{-i\frac{\omega'}{v_\rho}a}.$$

Примем функцию распределения стационарного состояния в виде:

$$f_0^\alpha = \frac{N_\alpha}{(2\pi)^{3/2} v_{||\alpha} v_{\perp\alpha}^2} \exp\{-\frac{v_\rho^2 + v_\theta^2}{2 v_{\perp\alpha}^2} - \tfrac{1}{2}(\frac{v_z - u_\alpha}{v_{||\alpha}})^2\},$$

$$v_{\perp\alpha} = \sqrt{\frac{T_\perp^\alpha}{m_\alpha}}, \qquad v_{||\alpha} = \sqrt{\frac{T_{||\alpha}}{m_\alpha}}. \tag{1.5}$$

Учитывая, что $r_{De} \gg a$ или $\frac{v_{Te}}{\omega_{0e}} \gg a$ (где $\omega_{0e} = \frac{4\pi N_e e^2}{m_e}$), имеем

$$\frac{\omega'}{v_\rho}(\rho_1 - \rho - a) \ll 1. \tag{1.6}$$

Здесь нужно различать два случая:

1) $n \neq 0$, тогда $\omega' = -(k_z v_z + \frac{v_\theta}{\rho} n)$; в этом приближении неустойчивые решения появиться не могут, так как из дисперсионного уравнения выпадают члены $\approx \omega$ (неустойчивые решения появляются в следующем первом порядке по $\frac{\omega a}{n v_\theta}$).

2) $n = 0$, $k_z \neq 0$. Этот случай дает нетривиальный результат даже в нулевом порядке по $\omega a / v_T$. Поэтому в дальнейшем мы им и ограничимся.

Учитывая первые неисчезающие члены по этому малому параметру, получим вместо (1.3) (полагая $p = 1$) зеркальное отражение:

$$\delta f^\alpha_{(+)} = \delta f^\alpha_{(-)} = -\frac{i}{2\omega' a}\int\limits_0^a (A^+ + A^-) d\rho_1 = \frac{i}{m\omega' a} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_z}\int\limits_0^a E_z d\rho_1 \tag{1.7}$$

При этом система уравнений Максвелла может быть приведена к виду см. /1,2,4/

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dE_z}{d\rho}\right)+\left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)E_z=\frac{\epsilon-\frac{k_z^2c^2}{\omega^2}}{\epsilon}\frac{4\pi e^2\omega}{mac^2}\int_0^a\sigma'_{33}E_z\,d\rho\,, \tag{1.8}$$

где $\epsilon=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ (плазма холодная, пучок горячий),

$$\sigma'_{33}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v\,\partial f_0^1/\partial v}{\omega-k_zv}\,dv\,.$$

Ищем решение (1.8) в виде

$$E_z=A\,J_0(\alpha\rho)+B\,,\qquad \alpha^2=k_z^2-\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\,.$$

Тогда

$$E_z^{I}=A_1\left\{I_0(\alpha\rho)+\frac{\sigma_{33}}{\epsilon-\sigma_{33}}\frac{1}{a}\int_0^a I_0(\alpha\rho)\,d\rho\right\}\qquad \rho\le a$$

$$E_z^{II}=A_2K_0(\mu\rho)\,,\qquad \rho>a$$

$$\mu^2=k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\,,\qquad \sigma_{33}=\frac{\omega_{01}^2}{\omega}\sigma'_{33}\,.$$

Удовлетворяя граничным условиям (в данном случае сводящимся к непрерывности тангенциальных составляющих полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$), получим дисперсионное уравнение

$$\alpha K_1(\mu a)\left[I_0(\alpha a)+\frac{\sigma_{33}/a}{\epsilon-\sigma_{33}}\int_0^a I_0(\alpha\rho)\,d\rho\right]+\mu\epsilon\,I_1(\alpha a)K_0(\mu a)=0\,. \tag{1.9}$$

2. Будем рассматривать систему, состоящую из покоящихся холодных ионов и тока горячих электронов.

Уравнение (1.9) легко исследовать в двух предельных случаях $\alpha a\gg 1$ и $\alpha a\ll 1$. В первом, используя асимптотику функций Бесселя, получим

$$\alpha a+\frac{\sigma_{33}}{\epsilon-\sigma_{33}}+\epsilon\mu a=0\,, \tag{2.1}$$

что с точностью до членов порядка $\frac{1}{\alpha a}$ дает дисперсионное уравнение продольных колебаний в неограниченной плазме, у которых $\vec{k}_\perp=0$. $[\vec{k}\vec{z}_0]=0$

$$\epsilon-\sigma_{33}(\omega,k_z)=0\,. \tag{2.2}$$

Это уравнение подробно исследовано, см., например,[5]. Нужно отметить только, что условие возбуждения ленгмюровских волн в пределе $\alpha a\gg 1$ сводится к $\omega_{0e}a\gg u$, или $\nu\gg\beta^2$ (ν -"погонный электрон"). Кроме того, с учетом $\frac{1}{\alpha a}$ (2.1) дает поверхностную ионную волну.

$$\epsilon + \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33} - \epsilon}\, \frac{1}{\mu a} \tag{2.3}$$

с частотой $\omega \approx \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\kappa}{k_z a}\right)$ и $\kappa \approx 1$.

Во втором предельном случае $\alpha a \ll 1$ приходим к уравнению

$$1 + \frac{\sigma_{33}}{\epsilon - \sigma_{33}} + \frac{\epsilon}{2}(\mu a)^2 \ln \frac{2}{\kappa \mu a} = 0, \tag{2.4}$$

где κ – несущественный коэффициент порядка единицы.

Обозначая $\mu a = x$ и $\frac{x^2}{2} \ln \frac{1}{\kappa x} = y \ll 1$, получим

$$1 + y(\epsilon - \sigma_{33}) = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) легко найти для $k_z r_D \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{0i}\, y}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2}\, y}}. \tag{2.6}$$

Используя условия возбуждения $k_z u < \sqrt{y}\, \omega_{0e}$,

$$k_z < \frac{\kappa}{a}\, e^{-2\frac{u^2}{\omega_{0e}^2 a^2}} \tag{2.6a}$$

получим

$$\operatorname{Im} \omega \big|_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m}{M}\, \frac{N_i}{N_e}\right)^{1/3} \frac{u_0 \kappa}{a}\, e^{-2\frac{u^2}{\omega_{0e}^2 u^2}}$$

и

из $k_z a \ll 1$ легко получить $\frac{\omega_{0e}^2 a^2}{2u^2} < 1$ или

$$\nu < 2\beta^2. \tag{2.7}$$

Таким образом, нетрудно видеть, что аксиально симметричные возмущения задавлены для не слишком плотной плазмы, удовлетворяющей условию (2.7). Об азимутальных возмущениях можно сказать только, что инкременты должны быть пропорциональны $\frac{\omega_{0e}\, a}{v_{\perp e}}$.

3. Следует отметить, что незатухающие решения уравнения (2.2), соответствующие распространению ленгмюровских волн, имеют место только в довольно экзотическом случае сильной анизотропии электронных температур, когда

$$T_\perp^{(e)} \gg T_\parallel^{(e)} + \frac{m u}{2}. \tag{3.1}$$

Действительно, условие малости поперечного размера по сравнению с дебаевским радиусом (1.6) есть

$$\frac{\omega_{0e} a}{v_{\perp e}} \ll 1 . \qquad (3.2)$$

Дисперсионное уравнение (2.2) получено в предположении $\alpha a \cong k_z a \gg 1$, распределение ленгмюровских волн возможно при

$$\left| \frac{\omega - k_z u}{k_z v_{\| e}} \right| \gg 1 \qquad \text{или} \qquad T_{\|}^{(e)} \ll \frac{m u^2}{2} \qquad (3.3)$$

или учитывая, что инкремент возбуждения максимален, когда $k_z u \approx \omega_{0e}$

$$\frac{\omega_{0e}}{k_z v_{\| e}} \gg \frac{\omega_{0e} a}{v_{\| e}} \gg 1. \qquad (3.4)$$

Используя соотношение $k_z < \frac{\omega_{0e}}{u}$ и $k_z a \gg 1$, легко получим

$$\frac{\omega_{0e} a}{u} \gg k_z a \gg 1 . \qquad (3.5)$$

Из неравенств (3.2), (3.4) и (3.5) следует неравенство (3.1). Как известно, в неизотермической плазме возможно распространение звуковых волн в области частот $\left| \frac{\omega - k_z u}{k_z v_{\| e}} \right| \ll 1$. В этом случае уравнение (2.2) можно записать в виде

$$1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 v_{\| e}^2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - k_z u}{k_z v_{\| e}} \right) = 0 . \qquad (3.6)$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, легко найти

$$\omega = \frac{\omega_{0i}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 v_{\| e}^2}}} \left(1 - i \frac{\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 v_{\| e}^2}}{1 + \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 v_{\| e}^2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\frac{\omega_{0i}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 v_{\| e}^2}}} - k_z u}{k_z v_{\| e}} \right) . \qquad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что неустойчивость возникает при

$$u \gtrsim v_{\| e} \frac{\omega_{0i}}{\sqrt{k_z^2 v_{\| e}^2 + \omega_{0e}^2}} . \qquad (3.8)$$

Если в уравнении (3.6) можно пренебречь единицей, т.е. при $\omega_{0e}^2 \gg k_z^2 v_{\|}^2$ в системе возможны распространение и раскачка ионно-звуковых колебаний, если скорость электронного потока

$$u \gtrsim v_{зв} , \qquad v_{зв} = v_{\|} \sqrt{\frac{N_i m}{N_e M}} = \sqrt{\frac{N_i}{N_e} \frac{T_{\|}^{e}}{M}} . \qquad (3.9)$$

при этом частота и инкремент есть соответственно

$$\omega_{зв} = k_z v_{зв} \tag{3.10}$$

и

$$\operatorname{Im}\omega = \omega_{зв}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{u}{v_{\|e}} - \sqrt{\frac{N_i}{N_e}\frac{m}{M}}\right), \tag{3.11}$$

при этом величина вектора k_z заключена в пределах

$$\frac{\omega_{0e}}{v_{\|e}} \gg k_z \gg \frac{1}{a}.$$

В пределе $\omega_{0e}^2 \ll k_z v_{\|e}$ решение уравнения (3.8) соответствует ионным ленгмюровским колебаниям.

Отметим, что уравнение (3.8) и формулы (3.7) – (3.11), полученные из него, справедливы для малых направленных скоростей электронов, когда

$$T_{\|}^{e} \gg \frac{mu^2}{2}, \tag{3.12}$$

при этом $T_{\|}^{e}$ может быть порядка $T_{\perp}^{e}$.

Если электроны движутся с релятивистской скоростью, то условие (3.12) не может быть выполнено, и в системе могут существовать лишь ионные ленгмюровские колебания.

Действительно, для релятивистских электронов кинетическая энергия $W^k \gtrsim T_{\perp}^{(e)}$, поэтому

$$\frac{\omega_{0e} a}{u} < \frac{\omega_{0e} a}{v_{\perp e}} \ll 1 \ll k_z a,$$

отсюда следует неравенство $\dfrac{\omega_{0e}}{k_z u} < \dfrac{\omega_{0e} a}{v_{\perp e}} \dfrac{1}{k_z a} \ll 1.$

(3.13)

С другой стороны, уравнение (2.2) в пределе $W^k \gg T_{\|}^{e}$ имеет неустойчивые решения в области

$$\frac{\omega_{0e}}{k_z u} \gtrsim 1. \tag{3.14}$$

Неравенства (3.13) и (3.14) находятся в противоречии.

Мы исследовали уравнение (1.9) в двух предельных случаях, соответствующих электронному потоку большой (уравнение (2.2)) и малой (уравнение (2.7)) плотностей. В промежуточной области, в которой $k_z a \simeq 1$, уравнение (1.9) можно привести к виду (в предположении $\dfrac{mu^2}{2} \gg T_{\|}^{e}$):

$$a_1 \frac{\omega_{0i}^4}{\omega^4} - a_2 \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + a_3 = 0, \tag{3.15}$$

где

$$a_1 = \frac{I_1(k_z a)K_0(k_z a)}{I_0(k_z a)K_1(k_z a) + I_1(k_z a)K_0(k_z z)}$$

$$a_2 = 2a_1 - a_1\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} + \frac{I_0(k_z a)\,K_1(k_z a)}{I_0(k_z a)K_1(k_z a) + I_1(k_z a)K_0(k_z a)}$$

$$a_3 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2}\left(a_1 + \frac{I_0(k_z a)K_1(k_z a) - \frac{1}{a}\int_0^a I_0(k_z\rho)K_1(k_z a)\,d\rho}{I_0(k_z a)K_1(k_z a) + I_1(k_z a)K_0(k_z a)}\right).$$

Нетрудно видеть, что (3.15) имеет неустойчивые решения при

$$\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} > \min\left\{2 + \frac{A_1}{A_2},\ \frac{A + A_2}{A - A_1 + A_2}\right\} \tag{3.16}$$

и

$$\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2}\left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{1}{2} - \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2}\right) > \frac{1}{4}\,\frac{A^2}{A_2^2}, \tag{3.17}$$

где
$$A = a K_1(k_z a)\,I_0(k_z a),$$

$$A_1 = \int_0^a K_1(k_z a)\,I_0(k_z\rho)\,d\rho$$

$$A_2 = a I_1(k_z a)\,K_0(k_z a).$$

Условия (3.16) и (3.17) получены из решения биквадратного уравнения (3.15), которое есть

$$\frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} = \frac{1}{2a_1}\left[a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}\right].$$

В первом предельном случае $k_z a \gg 1$ имеем $A = A_2$, $\frac{A_1}{A} \approx \frac{1}{k_z a}$ и (3.15) переходит в уравнение (2.2), полученное в высокочастотном пределе $|\omega - k_z u| \gg k_z v_{\parallel e}$.

Аналогично получается второй предельный случай $k_z a \ll 1$ из общих соотношений (3.16) и (3.17). Условие возбуждения (3.16) перейдет в (2.6а).

Из этих же общих соотношений при $k_z a \approx 1$, легко получить, что по порядку величины

$$\frac{\omega_{0e_\perp} a}{u} \gtrsim 1 , \tag{3.18}$$

поэтому даже в промежуточной области $k_z a \approx 1$ условие (3.1) сохраняется. Совершенно также может быть исследовано уравнение (1.9) в предположении $mu^2/2 \ll T_\parallel^e$.

Автор признателен В.И. Курилко и товарищам по работе за плодотворные дискуссии и А.Г. Бонч-Осмоловскому, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

Литература

1. М.Ф. Горбатенко. Сб. "Физика плазмы", т. 1 Киев, Из-во АН УССР, 1962.
2. В.Г. Маханьков. Радиофизика. У1, 941 (1963).
   О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 1053, Дубна 1962.
   Д.Г.Ломинадзе, Э.А. Перельштейн. Препринт ОИЯИ 1527, Дубна 1964.
3. А.Б. Михайловский, Э.А. Пашицкий. ЖЭТФ, 48, 1787 (1965).
4. В.Г. Маханьков. Препринт ОИЯИ Р-2352, Дубна 1965.
5. В.Н. Силин, А.А. Рухадзе, "Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред". Атомиздат, Москва, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1966 г.