ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2777

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ УНИТАРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1966

Р-2777

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ УНИТАРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Направлено в ДАН

В настоящее время интенсивно обсуждается [1-5] возможность применения некомпактной группы симметрии для классификации элементарных частиц. Было указано, что эта группа должна содержать в себе подгруппу $SL(2,C)$, изоморфную группе Лоренца. В связи с этим возрастает интерес к изучению группы Лоренца, особенно к ее унитарным (бесконечномерным) представлениям.

В настоящей работе мы найдем выражение для матричного элемента собственных преобразований Лоренца в случае унитарного представления. Эти матричные элементы необходимо знать при изучении структуры матричных элементов процессов в любой симметрии с некомпактными группами [5]. Отметим, что эта задача впервые была поставлена и частично решена (для случая $j_0 = 0$) Долгиновым и Топтыгиным в работе [6]. Авторы этой работы использовали в качестве базисных функции, являющиеся аналитическим продолжением четырехмерных шаровых функций эвклидова пространства (более подробно см. [6,7]).

Наш вывод основан исключительно на результатах, найденных Гельфандом и Наймарком [8,9]. Как известно [9], неприводимое представление собственной группы Лоренца можно характеризовать парой чисел (j_0, c), где j_0 – целое или полуцелое неотрицательное число, представляющее наименьший вес представлений подгруппы трехмерного вращения, а c – комплексное число. Мы будем рассматривать здесь унитарное неприводимое представление основной серии ($\sigma_{m,\rho}$ по обозначению в [9]; $j_0 = |\frac{m}{2}| \equiv |\nu_0|$, $c = -i(\operatorname{sign} m)\frac{\rho}{2}$ при $m \neq 0$; $j_0 = 0$, $c = \pm\frac{i\rho}{2}$ при $m = 0$), чему соответствует чисто мнимое c .

Канонический базис представления $\sigma_{m,\rho}$, реализованного в гильбертовом пространстве $L_2(z)$, есть (подробно см. [9]):

$$f^{\nu_0 \rho}_{j\mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a^{-1}(u)\, \phi^{\nu_0 \rho}_{j\mu}(u), \tag{1}$$

где $\alpha^{-1}(u) = |u_{22}|^{m-i\rho+2} u_{22}^{-m}$

$$\phi^{\nu_0\rho}_{j\mu}(u) = \sqrt{2j+1}\,\chi^{\nu_0\rho}_{j}\,(-1)^{2j-\nu_0-\mu}\,\frac{\sqrt{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!}}{\sqrt{(j-\mu)!(j+\mu)!}}\sum_{d=\max(0,-\nu_0-\mu)}^{\min(j-\nu_0,\,j-\mu)} C^{d}_{j-\mu}\,C^{j-\nu_0-d}_{j+\mu}\,u_{11}^{d}\,u_{12}^{j-\nu_0-d}\,u_{21}^{j-\mu-d}\,u_{22}^{\nu_0+\mu+d}$$

$$\chi^{\nu_0 d}_{j} = \prod_{\nu=j_0}^{j}\frac{-2\nu+i\rho}{\sqrt{4\nu^2+\rho^2}}$$

C^{q}_{p} – число сочетаний из p элементов по q ; u , z принадлежат так называемому классу $\tilde{z}$. В пространстве $L_2(z)$ скалярное произведение задается формулой

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int f_1(z)\,\overline{f_2}(z)\,dz\,, \qquad z = x + iy,\ dz = dx\,.\,dy\,; \tag{2}$$

а каждому преобразованию Лоренца, которое описывается матрицей $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ унимодулярной группы второго порядка, сопоставлен оператор U_α , заданный формулой

$$U_\alpha f(z) = |a_{12}z + a_{22}|^{-m+i\rho-2}(a_{12}z + a_{22})^{m} f\left(\frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}\right). \tag{3}$$

Пусть нам нужно найти матричный элемент $D^{m\rho}_{j\mu;\,j'\mu'}(a)$, который определяется как

$$U_\alpha |m\rho;\ j\mu\rangle = \sum_{j'\mu'} D^{m\rho}_{j\mu;\,j'\mu'}(a)\,|m\rho\,;\ j'\mu'\rangle\,, \tag{4}$$

где через $|m\rho; j\mu\rangle$ обозначается канонический базис представления $\sigma_{m,\rho}$.

Из (4) и из условия ортонормированности

$$\langle f^{\nu_0\rho}_{j\mu} | f^{\nu_0\rho}_{j'\mu'} \rangle = \int f^{\nu_0\rho}_{j\mu}(z)\,\overline{f^{\nu_0\rho}_{j'\mu'}}(z)\,dz = \delta_{jj'}\,\delta_{\mu\mu'}$$

следует

$$D^{m\rho}_{j\mu;\,j'\mu'}(a) = \int U_\alpha\, f^{\nu_0\rho}_{j\mu}(z)\,\overline{f^{\nu_0\rho}_{j'\mu'}}(z)\,dz\,. \tag{5}$$

Известно, что всякую матрицу a можно представить в виде

$$a = u_1 \epsilon\, u_2,$$

где u_1, u_2 – унитарные унимодулярные матрицы, соответствующие трехмерному вращению;

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} \qquad (\epsilon \text{ – действительное число})$$

и соответствует чистому вращению Лоренца в плоскости (x_3, x_4).

Таким образом, можно, не нарушая общность, ограничиться нахождением $D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}(\epsilon)$.

Подставляя (1) и (3) со значением

$$u_{11} = \bar{u}_{22} = (1 + |z|^2)^{-1/2} e^{-i\omega}$$

$$u_{12} = -\bar{u}_{21} = -\bar{z}\,(1 + |z|^2)^{-1/2} e^{i\omega}$$

($e^{i\omega}$ – некоторый фазовый множитель)

в (5), получим

$$D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}(\epsilon) = \frac{1}{\pi}\,\delta_{\mu\mu'}\left\{(2j+1)(2j'+1)\frac{(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!(j'-\nu_0)!(j'+\nu_0)!}{(j-\mu)!(j+\mu)!(j'-\mu)!(j'+\mu)!}\right\}^{1/2} \chi^{\nu_0\rho}_{j}\,\overline{\chi^{\nu_0\rho}_{j'}}\,\cdot$$

$$\sum_{d,d'=\max(0,-\nu_0-\mu)}^{\min(j-\nu_0,\,j-\mu),\ \min(j'-\nu_0,\,j'-\mu)} (-1)^{d+d'} C^{d}_{j-\mu}\, C^{j-\nu_0-d}_{j+\mu}\, C^{d'}_{j'-\mu}\, C^{j'-\nu_0-d'}_{j'+\mu}\, \epsilon^{4\left(j-d-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu_0}{2}+\frac{1}{2}-\frac{i\rho}{4}\right)}$$

$$\int dz\,|z|^{2(j+j'-d-d'-\mu-\nu_0)}\,(1+|z|^2)^{\frac{i\rho}{2}-j'-1}\,(1+\epsilon^4|z|^2)^{\frac{i\rho}{2}-j-1}. \tag{6}$$

Переходя к полярной системе координат

$$x = r\cos\phi \qquad\qquad (0 \le r \le \infty,\quad 0 \le \phi \le 2\pi)$$
$$y = r\sin\phi$$

и затем используя замену $v = r^2$, приводим интеграл в (6) к виду

$$J = \pi\int_0^\infty dv\, v^{j+j'-d-d'-\mu-\nu_0}\,(1+v)^{\frac{i\rho}{2}-j'-1}\,(1+\epsilon^4 v)^{\frac{i\rho}{2}-j-1}.$$

При значениях d, d', указанных в (6), J оказывается равным:

$$J = \pi\,\frac{(j+j'-d-d'-\mu-\nu_0)!\,(d+d'+\mu+\nu_0)!}{(j+j'+1)!}\,\epsilon^{4\left(d+d'+\mu+\nu_0-j+\frac{i\rho}{2}\right)} F\left(j'+1+\frac{i\rho}{2},\ d+d'+\mu+\nu_0+1;\ j+j'+2;\ 1-\epsilon^4\right), \tag{7}$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция.

Подставляя (7) в (6), мы получим окончательный результат:

$$D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}(\epsilon)=\frac{\delta_{\mu\mu'}}{(j+j'+1)!}\{(2j+1)(2j'+1)(j-\nu_0)!(j+\nu_0)!(j-\mu)(j+\mu)!(j'-\nu_0)!(j'+\nu_0)(j'-\mu)!(j'+\mu)!\}^{1/2}$$

$$\chi^{\nu_0\rho}_{j}\overline{\chi^{\nu_0\rho}_{j'}}\sum(-1)^{d+d'}\frac{(j+j'-d-d'-\mu-\nu)!(d+d'+\mu+\nu_0)!}{d!\,d'!\,(j-\mu-d)!\,(j'-\mu-d')!\,(j-\nu_0-d)!\,(j'-\nu_0-d')!(\mu+\nu_0+d)!\,(\mu+\nu_0+d')!}$$

$$\epsilon^{2(2d'+\mu+\nu_0+1+\frac{\varphi}{2})}F\left(j'+1+\frac{i\varphi}{2},\ d+d'+\mu+\nu_0+1;\ j+j'+2;\ 1-\epsilon^4\right), \qquad (8)$$

где d, d' пробегают целые числа, которые не обращают каждый множитель под знаком факториала в отрицательное значение.

Отметим теперь некоторые простые свойства функций $D(\epsilon_0)$.

1.
$$D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}(1)=\delta_{jj'}\delta_{\mu\mu'}. \qquad (9)$$

Это равенство непосредственно вытекает из (8) с учетом $F(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$. Оно выражает тот факт, что мы имеем дело с тождественным преобразованием.

2.
$$D^{m\rho}_{j'\mu';j\mu}(\epsilon)=\overline{D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}}(\epsilon^{-1}). \qquad (10)$$

Это соотношение вытекает непосредственно из свойства гипергеометрической функции

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right).$$

3. Из (9), (10) и из группового свойства функции D сразу следует

$$\sum_{j\mu}D^{m\rho}_{j\mu;j'\mu'}(\epsilon)\overline{D^{m\rho}_{j\mu;j''\mu''}}(\epsilon)=\delta_{j'j''}\delta_{\mu'\mu''}.$$

Последнее соотношение представляет собой условие унитарности представления.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность академику Н.Н. Боголюбову за интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Barut A.O., P.Budini, and C.Fronsdal. Preprint, 1965.
2. Dothan Y., M.Gell-Mann, and Y.Ne'eman. Phys. Lett., 17, 148 (1965).
3. C.Fronsdal. Preprint, 1965.
4. R.Delbourgo, A.Salam, and J.Strathdee. Proc. Roy. Soc., 289, 177 (1965).
5. Нгуен Ван Хьеу, Лекция на международной школе по теоретической физике, Ялта, 1966.
6. А.З. Долгинов, И.Н. Топтыгин. ЖЭТФ, 37, 1441 (1959).
7. А.З. Долгинов. ЖЭТФ 30, 746 (1956).
8. И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк. Труды математического института им. В.А. Стеклова, XXXVI , 1950.
9. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июня 1966 г.