

K-994

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2761



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. Кюнель

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ  
БЛИЖАЙШИХ ПОЛЮСОВ ФУНКЦИЙ  $S'_F$  И  $\Delta'_F$   
В СЛУЧАЕ СИЛЬНОЙ  $\bar{\psi}\psi$   $\Phi$  СВЯЗИ

1966

P-2781

А. Кюель

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ  
БЛИЖАЙШИХ ПОЛОСОВ ФУНКЦИЙ  $s'_F$  И  $\Delta'_F$   
В СЛУЧАЕ СИЛЬНОЙ  $\psi\psi\phi$  СВЯЗИ

Направлено в ЖЭТФ

4313/2 мн.



## 1. Введение

В работах, опубликованных недавно Хебером, Кайзером и автором<sup>/1,2,3/</sup>, предложен метод приближенного вычисления двухточечных функций Грина в теории поля. Этот метод основан на функциональной формулировке квантовой теории поля<sup>/4,5,6,7/</sup> и дает функции Грина в виде рядов по отрицательным степеням константы связи. Модель поля представлена лагранжианом поля. Цель предложенного подхода — определение ближайших полюсов функций Грина. Из относительного положения полюсов можно найти соотношения для дискретных масс, описанных данной моделью. В предыдущих работах вышеуказанное приближение было развито для самовзаимодействующих полей; в данной работе мы хотим развить эту схему применительно к двум взаимодействующим полям. В качестве конкретной модели мы выбрали некоторое спинорное поле, взаимодействующее с некоторым скалярным полем.

Лагранжиан расщепляется на свободную часть  $\mathcal{L}_0$  и часть взаимодействия  $\mathcal{L}_1$ . В выражении для функции Грина функционал  $\exp(i\int \mathcal{L}_0 \phi^2 X)$  под знаком интеграла разлагается в ряд (раздел 2). В разделе 3 мы рассматриваем структуру отдельных членов этого ряда, затем рассчитываем требуемые интегралы в коэффициенте этого ряда в решетчатом пространстве (раздел 4). Нижние вклады в  $S'_F$  выписаны явно в разделе 5. В разделе 6 мы обобщаем ранее введенное графическое представление ряда для функций Грина на случай двух взаимодействующих полей.

Прямое вычисление показывает, что коэффициенты ряда для  $S'_F$  не имеют свойств вытекающих из спектрального представления Леманна. В разделе 7 мы устанавливаем согласие между нашими результатами и результатами спектрального представления Леманна. В разделе 8 мы получаем вещественное отношение низших масс спинорного поля и скалярного поля в первом приближении.

Общая схема, развитая в данной работе, может быть применена к более сложным, но близким к действительности теориям поля, например, к теории взаимодействия между псевдоскалярными и спинорными полями с внутренними симметриями. Расчеты

становятся гораздо сложнее, если вычисляемые моменты (раздел 4) имеют спинорные индексы. Вопрос о том, имеют ли моменты спинорные индексы, может быть решен в процессе конкретных расчетов.

## 2. Разложение в ряд

В качестве лагранжиана рассматриваемой модели возьмем следующий лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_0) \psi - \frac{1}{2} \Phi (\square + \mu_0^2) \Phi - g \bar{\psi} \psi \phi - \lambda \Phi^4, \quad (1)$$

$\psi$  и  $\bar{\psi}$  - четырехмерные спиноры, т.е. антикоммутирующие с  $c$ -числа,  $\Phi$  - вещественное скалярное поле,  $c$  - число. Все величины являются  $c$ -числами, так как мы берем за основу функциональную формулировку квантовой теории поля. Голые массы  $m_0$  и  $\mu_0$  считаются равными нулю в последующем изложении, только в некоторых местах у нас не будет этого допущения, а именно - в случае исчезающих голых масс.

Используя функциональную формулировку квантовой теории поля, можно получить следующее выражение для функции Грина спинорного поля<sup>5,6</sup>:

$$-\frac{1}{2} S'_{F\alpha\beta}(x-y) = \frac{\int \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \exp(i \int \mathcal{L}_0 d^4x) \exp(i \int \mathcal{L}_1 d^4x \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta\Phi)}{\int \exp(i \int \mathcal{L}_0 d^4x) \exp(i \int \mathcal{L}_1 d^4x \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta\Phi)} \quad (2)$$

Сначала разложим экспоненту в уравнении (2) в ряд по свободному лагранжиану спинорного поля, а затем разложим оставшееся выражение, содержащее свободный лагранжиан скалярного поля:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S'_{F\alpha\beta}(x_1-y_1) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int \dots \int dx_2 \dots dy_n A_2(x_2, y_2) \dots A_n \times \\ &\times \int \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(y_1) \dots \psi_{\alpha_n}(x_n) \bar{\psi}_{\beta_n}(y_n) \exp(i \int \mathcal{L}_1 d^4x - \frac{1}{2} \int \Phi (\square + \mu_0^2) \Phi d^4x) \delta\phi \delta\bar{\psi} \delta\Phi = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{i^{\ell/2}}{(\frac{\ell}{2})!} \frac{\ell}{2^{\frac{\ell}{2}}} \int \dots \int dx_2 \dots dz_\ell A_2 \dots B_\ell \Phi_{n\ell}(x_1 \dots y_n; z_1 \dots z_\ell), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A_1 = \delta(x_1 - y_1) (i\gamma \partial_{x_1} - m_0); \quad B_1 = \delta(z_{1,1} - z_{1,1}) (-\square_{z_1} - \mu_0^2)$$

и

$$\Phi_{n\ell} = \int \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_n}(x_n) \bar{\psi}_{\beta_n}(y_n) \Phi(z_1) \dots \Phi(z_\ell) \exp(i \int \mathcal{L}_1 d^4x) \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta\Phi \quad (4)$$



$\phi_{n\ell}$  - имеет  $2n$  спиновых индексов, которые мы убрали,  $N$  - знаменатель выражения (2).

Функциональные интегралы в  $\phi_{n\ell}$  рассчитываются в решетчатом пространстве.

Выражение для функции Грина скалярного поля /4,5/ в форме, соответствующей (3), есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta'_F (z_1 - z_2) = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=2,4,\dots}^{\infty} \frac{i^{n+\ell} (-1)^n}{n! \left(\frac{\ell}{2}-1\right)! 2^{\frac{\ell}{2}-1}} \int \dots \int dx_1 \dots dy_n dz_3 \dots dz_{\ell} A_1 \dots A_{\ell} B_4 \dots B_{\ell} \phi_{n\ell}. \end{aligned} \quad (5)$$

$A_1$  и  $B_1$  - операторы, определенные выше,  $\phi_{n\ell}$  дано уравнением (4). Выражения (3) и (5) отличаются один от другого только в начале суммирования, в уравнении (3) нет интегрирования по  $x_1$  и  $y_1$ , тогда как в уравнении (5) нет интегрирования по  $z_1$  и  $z_2$ .

### 3. Низшие $\phi_{n\ell}$

Величина  $\phi_{00}^G$  не представляет интереса, так как она сокращается тем же выражением в знаменателе. Величины  $\phi_{n\ell}$  и  $\phi_{n0}$  имеют ту же структуру, что и в случае самовзаимодействующего поля /1,2/, но они не независимы от влияния, и не возникают как множители перед экспонентой.

В рядах (3) и (5) имеются только такие  $\phi_{n\ell}$ , для которых  $n = 0, 1, 2 \dots$  и  $\ell = 0, 2, 4 \dots$ . В качестве простейшего примера рассмотрим

$$\begin{aligned} & \phi_{1,2,\alpha,\beta} (x_1 y_1; z_1 z_2) = \\ & = \int \psi_{\alpha_1} (x_1) \bar{\psi}_{\beta_1} (y_1) \Phi(z_1) \Phi(z_2) \exp(i \int \mathcal{L}_1 d^4x) \delta \psi \delta \bar{\psi} \delta \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

В решетчатом пространстве имеем (ср. /1,2/)  $\psi_{\alpha} (x_k) = r_{\alpha,k} e^{i\phi_{\alpha,k}}$ ,

$$\psi_{\beta}^* (x_{\ell}) = r_{\beta,\ell} e^{-i\phi_{\beta,\ell}}, \quad \Phi_m (z_m) = \phi_m,$$

и вместо (6) получаем

$$\begin{aligned} & \phi_{1,2}^G = \prod_k \int r_{\alpha_1 k_1} e^{i\phi_{\alpha_1 k_1}} \gamma_{\rho_1 \beta_1} r_{\rho_1 \ell_1} e^{-i\phi_{\rho_1 \ell_1}} \Phi_{m_1} \Phi_{m_2} \times \\ & \times \exp \left\{ -\rho \epsilon \left( r_{1,k}^2 + r_{2,k}^2 - r_{3,k}^2 - r_{4,k}^2 \right) \Phi_k - i\lambda \epsilon \prod_{\alpha=1}^4 r_{\alpha,k} dr_{\alpha,k} d\phi_{\alpha,k} d\Phi_k \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс  $G$  означает, что рассматриваемая величина берется в решетчатом пространстве,  $\prod_k$  обозначает произведение по всем точкам решетчатого пространства,  $\epsilon$  - объем элементарной ячейки в решетчатом пространстве.

Интегрирование по  $\phi_{\alpha,k}$  не дает нуля только в случае  $k_1 = \ell_1$ ,  $\alpha_1 = \beta_1$ . Эти равенства обозначаются символами Кронекера. Для распределения множителей  $\Phi_{m_1}$  и  $\Phi_{m_2}$  по точкам решетчатого пространства имеются следующие возможности:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } m_1 = m_2 = k_1 & \text{d) } m_1 = m_2 \neq k_1 \\
 \text{b) } m_1 = k_1; m_1 \neq m_2 & \text{e) } m_1 \neq m_2; m_1 \neq k_1 \neq m_2 \\
 \text{c) } m_2 = k_1; m_1 \neq m_2 & 
 \end{array} \quad (8)$$

Интеграл в одной точке решетчатого пространства называется моментом и обозначен через  $M$ . Моменты  $M$  имеют два индекса: первый из них показывает число пар  $\psi\bar{\psi}$ , стоящих перед экспонентой, второй - число множителей  $\Phi$ . Возможно, что у моментов  $M$  есть спиновые индексы, но это не в модели, рассматриваемой здесь.

С помощью символов Кронекера получаем следующие выражения, соответствующие пяти возможностям в уравнениях (8):

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } M_{12} \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_1 z_1} \delta_{x_1 z_2} & \text{d) } M_{10} M_{02} \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_1 z_2} \\
 \text{b) } M_{21} M_{01} \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_1 z_1} & \text{e) } M_{10} M_{01}^2 \delta_{x_1 y_1} \\
 \text{c) } M_{11} M_{01} \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_1 z_2} & 
 \end{array} \quad (9)$$

В рассматриваемой модели мы имеем  $M_{01} = M_{10} = M_{12} = 0$ , все члены в (9) обращаются в нуль, поэтому  $\phi_{12} = 0$ . Все  $\phi$ , для которых  $p + \ell$  является нечетным числом, равны нулю. Интересующим нас простейшим  $\phi_{n\ell}$  является  $\phi_{22}$ . Отличные от нуля вклады в  $\phi_{22}$  запишем в виде, соответствующем уравнению (9)

$$f_{22}^G \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_1 z_1} \delta_{x_1 z_2} + M_{11}^2 \delta_{x_1 y_2} \delta_{x_2 y_1} \delta_{x_1 z_1} \delta_{x_2 z_2} \quad (10)$$

( $f_{22}^G$  комбинация моментов, сравни с уравнением (15)). Все другие вклады в  $\phi_{22}$  либо равны нулю из-за исчезающих моментов, либо они сокращаются членами в знаменателе. Члены, входящие в  $\phi_{22}$ , следующие:  $\phi_{22} = \phi_{00} \left\{ f_{11}^2 \delta(y_1 - z_1) \delta(y_2 - z_2) + \right.$

$$\left. + f_{22} \delta(y_1 - y_2) \delta(y_1 - z_1) \delta(z_1 - z_2) \right\} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta_1} \delta(x_1 - y_1) & \delta_{\alpha\beta_2} \delta(x_1 - y_2) \\ \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta(x_2 - y_1) & \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \quad (11)$$

Здесь мы предполагаем, что переход из решетчатого пространства в непрерывное пространство уже совершен (см. ниже).

Момент  $M_{11}$  определяется формулой:

$$M_{11} = \frac{(2\pi)^4}{M_{00}} \int r_1^2 \Phi \exp \{ -i\rho\epsilon(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) \Phi - i\lambda\epsilon\Phi^4 \} r_1 dr_1 \dots r_4 dr_4 d\Phi, \quad (12)$$

где

$$M_{00} = (2\pi)^4 \int \exp \{ -i\rho\epsilon(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) \Phi - i\lambda\epsilon\Phi^4 \} r_1 dr_1 \dots r_4 dr_4 d\Phi. \quad (13)$$

Интегрирование по углам  $\phi_\alpha$  уже выполнено в интегралах (12) и (13).

### 5. Расчет моментов

В качестве примера подробно рассмотрим вычисление  $M_{00}$ . Сначала произведем интегрирование по  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$ . Убирая коэффициент  $(2\pi)^4$ , имеем

$$M_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \exp(-ig\epsilon r^2 \Phi) r dr \right]^2 \left[ \int_0^{\infty} \exp(ig\epsilon r^2 \Phi) r dr \right]^2 \exp(-i\lambda\epsilon\Phi^4) d\Phi.$$

Учитывая соотношение  $\int_0^{\infty} \exp(-ig\epsilon r^2 \Phi) r dr = 1/2ig\epsilon\Phi$ , получаем

$$M_{00} = \frac{1}{16} \frac{1}{(ig\epsilon)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\lambda\epsilon\Phi^4)}{\Phi^4} d\Phi. \quad (14)$$

Интеграл в уравнении (14) является расходящимся при  $\Phi=0$ . Эту расходимость можно устранить при помощи регуляризации интеграла в точке  $\Phi=0$ . Сперва преобразуем интеграл, подставляя

$$M_{00} = \frac{1}{16(ig\epsilon)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda\epsilon\Phi^4}}{\Phi^4} d\Phi = \frac{(i\lambda\epsilon)^{3/4}}{32(ig\epsilon)^4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi^{7/4}} d\xi. \quad (15)$$

Интеграл (15) регуляризуется следующим образом

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\nu-1} \left[ e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right] dx + \int_1^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)} = \Gamma(\nu) \quad (16)$$

(см. /7/ стр. 89 и 75). В (15) интегрирование производится не по вещественной оси, а по положительной мнимой. Поэтому предел интегрирования надо заменить пределом  $i\lambda$ .

Правая и левая части равенства (16) дают для интеграла (15)

$$M_{00} = \frac{\Gamma(-3/4)(i\lambda\epsilon)^{3/4}}{32(ig\epsilon)^4}.$$

Бесконечные вычитания, сделанные в соответствии с (16), ниже рассматриваются как аддитивная перенормировка массы.

Все другие моменты  $M_{n\ell}$  регуляризуются при необходимости тем же способом. Уже на этой стадии рассмотрения становится понятным, почему мы ввели член  $\lambda\Phi^4$  в лагранжиан взаимодействия. В случае, когда перед экспонентой стоят положительные степени от  $\Phi$ , мы должны снабдить интегралы множителями, приводящими к сходимости. С этой целью приписываем  $\lambda$  небольшую мнимую часть, которая полагается равной нулю после интегрирования. Ниже мы принимаем, что  $\lambda = g$ , тогда у нас будет только один параметр (постоянная связи) в модели. Возьмем для обозначения разные буквы  $\lambda$  и  $g$ , чтобы можно было лучше проследить за происхождением разных членов. Интегралы  $\int \Phi^n \exp(-i\lambda\epsilon\Phi^4) d\Phi$  обращаются в нуль при любом положительном или отрицательном  $\epsilon$ . Поэтому имеем равенства  $M_{0(2k+1)} = 0, M_{10} = M_{30} = 0$ , далее все  $M_{n\ell}$ , для которых  $n + \ell$  есть нечетное число, обращаются в нуль. Низшие моменты следующие:

$$M_{20} = \frac{\Gamma(-\frac{5}{4})}{\Gamma(-\frac{3}{4})} \frac{(i\lambda\epsilon)^{3/4}}{(ig\epsilon)^2}, \quad M_{02} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{4})}{\Gamma(-\frac{3}{4})} \frac{1}{(i\lambda\epsilon)^{3/4}}$$

$$M_{11} = \frac{1}{ig\epsilon}, \dots$$

В члены ряда для функций Грина входят не моменты  $M$ , а их комбинации (ср. <sup>/1/</sup>), например,

$$f_{20}^G = M_{20}, \quad f_{02}^G = M_{02}, \quad f_{11}^G = M_{11}$$

$$f_{22}^G = M_{22} - 6M_{11}^2 - M_{20}M_{02}.$$
(17)


### 5. Различные вклады в ряд для $S'_F$

Операторы  $A_{,1}$  и  $B_{,1}$  действуют на  $\phi_{n\ell}$  в рядах (3) или (5) и интегрирование должно проводиться почти во всем переменным. В случае  $\phi_{n0}$  и  $\phi_{0\ell}$  производятся те же операции, что и в случае одного самовзаимодействующего поля (см. <sup>/1,2/</sup>). Суммирование по спиновым индексам проводится легко, так как моменты не зависят от спиновых индексов.



Теперь введем графическое представление для различных членов, получающихся от  $\phi_{n\ell}$  по аналогии с диаграммами в работах <sup>/1,2/</sup>. В качестве простейшего примера рассмотрим  $\phi_{22}$ . Вкладом второго слагаемого уравнения (11) в  $S'_F$  является



$$\begin{aligned}
 & -f_{22} \int dx_2 dy_2 dz_1 dz_2 \delta(x_2 - y_2) \chi(iy \partial_{x_2} - m_0) \delta(z_1 - z_2) (-\square_{x_2}) \delta(x_1 - y_2) \times \\
 & \times \delta(x_2 - y_1) \delta(y_1 - y_2) \delta(y_1 - z_1) \delta(z_1 - z_2) = -f_{22} (iy \partial - m_0) \delta(0) \delta(x_1 - y_1) \chi(-\square) \delta(0).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Представим это выражение в виде диаграммы . Непрерывная кривая соответствует спинорному полю, пунктирная - скалярному полю. Точка соответствует определенному  $f_{n\ell}$ , зависящему от числа фермионных и бозонных линий, входящих в эту точку.

Линии и петли имеют следующий смысл: функция  $\delta(x_1 - y_1)$  соответствует двум свободным концам диаграммы, число внутренних линий, не содержащихся в петлях, указывает на порядок производной  $\delta(x_1 - y_1)$ , разные петли представляют разные числовые факторы. Линии и петли имеют точно такой же смысл, что и в случае одного самовзаимодействующего поля (ср. /1,2/).

График  представляет первый член в (11). Расчет этого графика, однако, показывает, что его вклад в  $S'_F$  равен нулю, это также справедливо и для  и т.д.

Численное значение, представленное графиком (опуская  $\delta$  функцию или производные  $\delta$  функции), есть

$$\frac{i^{n+\frac{\ell}{2}}}{\prod_i p_i! (p_i+1)! 2^{\sum_i} \prod_j j_i!} f z \Sigma.
 \tag{19}$$

$Z$  содержит члены, такие как  $(-\square \delta(0))$  и т.д., которые являются хорошо известными числами и должны быть рассчитаны в решетчатом пространстве.  $\Sigma$  - число, получающееся путем суммирования по спинорным индексам;  $f$  есть произведение  $f_{n\ell}$ ;  $(p_i+1)! p_i!$  весовой фактор для  $(2p_i+1)$ -мерного связанного графика,  $j$  - число симметричных бозонных петель.

Строго говоря,  $\epsilon$  еще содержится в (19), так что  $S'_F$  должно исчезать после перехода к непрерывному пространству-времени. Эта трудность может быть преодолена путем повторного определения  $p$ ,  $x$ ,  $\psi$  и  $\Phi$  (см. /8/). После этой "перенормировки" все вклады в  $S'_F$  являются определенными и нет необходимости вторично определять постоянную связи.

## 6. Низшие приближения

$S'_F$  и  $\Delta'_F$  являются бесконечными рядами (3) и (5) соответственно.  $n$ -ый член этих рядов состоит из нескольких слагаемых типа  $a(i\gamma\partial)^k \delta(x_1 - y_1)$  и  $b(-\square)^k \delta(z_1 - z_2)$ , соответственно, где  $k=0, 1, 2 \dots$ . В этом разделе мы преобразуем бесконечные ряды в форму, позволяющую сделать простые приближения к функциям Грина.

После преобразования Фурье

$$S'_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S'_F(p) e^{-ipx} d^4p; \quad \Delta'_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta'_F(q^2) e^{-qx} d^4q$$








мы получаем ряды для  $S'_F(p)$  и  $\Delta'_F(q^2)$  по степеням  $(\gamma p)$  и  $q^2$  соответственно. Из одного  $\phi$  мы получаем вклады с различными степенями  $(\gamma p)$  или  $q$ . Теперь мы соберем все члены, содержащие равные степени  $(\gamma p)$  и  $q^2$  соответственно

$$\frac{1}{2} S'_F(p) = i \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma p)^k \quad (20)$$

и

$$\frac{1}{2} \Delta'_F(q^2) = -i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (q^2)^k. \quad (21)$$

Для конкретности сначала мы имеем дело с  $S'_F$ .

Диаграммы, содержащие только фермионные линии, можно расположить в плоской схеме (рис.1),  $n$  указывает порядок относительно  $1/g$ ;  $k$  - показатель  $(\gamma p)$ . Простейшая диаграмма  не дает вклада в  $S'_F$  из-за  $M_{10} = 0$ . Далее, диаграммы с петлей  также не дают вклада, потому что простая петля  означает  $\partial \delta(0) = 0$  (если голая масса фермиона отлична от нуля, эта петля будет давать вклад, пропорциональный голой массе). Простейшее приближение для  $S'_F$  (без учета бозонных линий) состоит в суммировании ряда , , ,  , ---

Теперь введем обобщенную схему для двух взаимодействующих полей, чтобы разместить на ней все графики. В случае двух взаимодействующих полей целесообразно расположить члены ряда (20) на клине (рис. 2). Вниз мы откладываем  $n$ , назад  $l$  и вправо  $k$ . В передней плоскости имеются только фермионные линии и точки, в направлении назад появляется все больше и больше бозонных линий.

Коэффициенты  $a$  в ряде (20) можно представить в том же виде, как и в случае одного самовзаимодействующего поля (см. <sup>1/3/</sup>):

$$\begin{aligned} a_0 & \\ a_1 &= a_0^2 + g_1 \\ a_2 &= a_0^3 + 2a_0 g_1 + g_2 \end{aligned} \quad (22)$$

$g_1$  - содержит диаграммы, которые возникают впервые в коэффициенте  $(\gamma p)^1$  и которые не могут быть приведены к более простому виду; например,  $g_1$  содержит





С помощью (22) мы можем просуммировать частично ряд (20) и получить

$$\frac{1}{2} S'_F(p) = i \frac{a_0 + g_1(\gamma p) + g_2(\gamma p)^2 + \dots}{1 - a_0(\gamma p) - g_1(\gamma p)^2 \dots} \quad (23)$$

- сумму членов, расположенных в  $k$ -той плоскости, параллельной задней плоскости клина. На рис. 3 приведены первые диаграммы. В случае нашей модели все диаграммы рис. 3 не дают вклада в  $S'$ , так как  $M_{1\ell} = 0$  для любого четного  $\ell$  (диаграммы  $a, b, c, d$  и  $f$ , или так как  $(\gamma^2)^{\beta(\ell)} \neq 0$  (графики  $d, e, f, g, i$ ). Далее мы находим:  $2\tau = 0, \tau = 0, 1, 2 \dots$

На рис. 4 даны первые диаграммы  $a_1 = g$  (так как  $a_0 = 0$ ). График

 не дает вклада в  $S'_F$ , как уже отмечалось выше, и первый вклад в  $S'_F$ , отличный от нуля, дает диаграмма .

Суммирование рядов для  $a_0$  и  $g_1$  в общем невозможно. Эти ряды обрезаются при некотором порядке постоянной связи. При  $\lambda = g$  член на месте  $(n, \ell)$  содержит множитель  $g - (3n+1)/4$ . Обрезая ряд, мы должны получить приближение, соответствующее большому постоянным связи.

До сих пор мы имели дело с  $S'_F$ . Для  $\Delta'_F$  нужно сделать лишь небольшие изменения. Теперь в соответствующем клине мы отложим вниз  $\ell$  и назад  $n$ ;  $k$  показатель  $g^2$  и будет отложен вправо. Члены  $\beta_0$  находятся в задней плоскости клина для  $\Delta'_F$ . Первые графики  $\beta_0$  представлены на рис. 5. Графики  $a, b, c$  не дают вклада в  $\Delta'_F$ , так как  $M_{12} = 0$ . Учитывая только диаграмму в  $\beta_0$ , получаем простейшее приближение для  $\Delta'_F$ , которое эквивалентно суммированию всех диаграмм, расположенных на косом ребре клина. Выражение для  $\Delta'_F$ , соответствующее уравнению (23), имеет вид:

$$\frac{1}{2} \Delta'_F = -i \frac{\beta_0 + h, q^2 + h, q^4 \dots}{1 - \beta_0 q^2 - h, q^4 - \dots} \quad (24)$$

Прямое вычисление дает комплексные значения для  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , в то время как эти величины должны быть неотрицательными, вещественными по спектральному представлению Леманна. Причиной этого противоречия может быть тот факт, что при выводе спектрального представления Леманна сделаны предположения, отличные от предположений при выводе выражения (2). В последнем случае не потребовалось предположений о метрике в гильбертовом пространстве и спектре оператора энергии и момента. Мы допускаем, что можно ввести эти недостающие предположения, требуя выполнения условий, вытекающих из спектрального представления Леманна для  $\alpha_k$  и  $\beta_k$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta_k > 0. \quad (25)$$

Эти условия можно получить, разлагая спектральные выражения для  $S'_F$  и  $\Delta'_F$  в ряды по степеням  $(\gamma p)$  и  $q^2$ , соответственно.

Член на месте  $(n, \ell)$  в клине рис. 2 содержит независимо от  $k$  множитель  $i^{(n+\ell)/4}$ . Условия (25) требуют, чтобы суммы  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  были неотрицательными величинами;  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — бесконечные ряды по отрицательным степеням  $g$ . Если предложенная схема хорошо применима к случаю больших  $g$ , высшие члены не должны влиять на вещественные свойства предыдущих сумм. Чтобы получить схему с постоянным приближением, нужно потребовать, чтобы каждый член суммы в  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  был реальной величиной. Реальные величины мы получаем из величин, полученных прямым расчетом, умножая каждый член на месте  $(n, \ell)$  на  $i^{-\frac{(n+\ell)/4}{}}$ . Это предписание — единственная возможность получать усовершенствование в рамках предложенной схемы приближения.

В дальнейшем  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — взаимноизменяющиеся и реальные величины. Ближайшие полюса  $\Delta'_F$  и  $S'_F$  находятся на вещественной оси в  $q^2$  плоскости после выполнения дополнительных требований (5).

Получается следующее интересное согласие со спектральным представлением. Получены уравнения  $a_{2r} = 0$ , поэтому ряд для  $S'_F$  принимает вид

$$\frac{1}{2} S'_F(\gamma p) = i(\gamma p) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+1} p^{2k} = (\gamma p) f(p^2). \quad (26)$$

При  $m \neq 0$ , т.е. при отличной от нуля голой массе фермиона,  $S'_F$  не имеет формы (22), так как в этом случае диаграммы  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  и  $i$  на рис. 3 не исчезают.

Согласно спектральному представлению  $S'_F$ , мы имеем

$$\frac{1}{2} S'_F(p) = -i \int_0^{\infty} \frac{dm^2}{m^2} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} [W_1(m^2) + (\gamma p) W_2(m^2)]. \quad (27)$$



Из уравнения (26) следует  $\int_0^{\infty} \frac{dm^2}{m^2} \frac{W_1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = 0$ , когда  $m_0 = 0$  из спектрального представления мы получаем  $m_0 = -\int_0^{\infty} W_1(m^2) dm^2$ . Заключение, полученные на базе спектрального представления и на базе расчетов, совпадают.

### 8. Низшие массы

Сделаем простейшее приближение для  $g_1$  и  $\beta_0$ , оставляя только первый не исчезающий член  $g_1$  и  $\beta_0$  соответственно и пренебрегая всеми другими  $g_i$  и  $h_i$ . Функции Грина в этом приближении обозначаем тильдой

$$\frac{1}{2} \tilde{S}_F(p) = i(\gamma p) a \sum_{k=0}^{\infty} (a p^2)^k = \frac{i a (\gamma p)}{1 - a p^2}; \quad \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_F(q^2) = -i f_{02} \sum_{k=0}^{\infty} (f_{02} q^2)^k = \frac{-i f_{02}}{1 - q^2 f_{02}},$$

где  $a = \frac{3}{8} f_{20}^2$ .

Функции  $\tilde{\Delta}_F$  и  $\tilde{S}_F$  имеют полюса при

$$p^2 = \frac{1}{a} \approx 4g^3 \quad q^2 = \frac{1}{f_{02}} \approx 0,99\sqrt{g} \quad (29)$$

соответственно.

Из (29) видно, что вычитания при вычислении моментов могут рассматриваться как аддитивная перенормировка массы. При  $g=10$  отношение двух низших масс следующее

$$\frac{m_{\psi}^2}{m_{\phi}^2} = 4g^{5/2} = 24.$$

При  $g=10$  поправки от высоких членов в  $g_1$  и  $\beta_0$  невелики и приближение справедливо только для постоянных связи более высокого порядка. Это и является отличительной чертой рассматриваемой модели.

Автор очень признателен дирекции и сотрудникам Лаборатории теоретической физики ОИЯИ в Дубне за гостеприимство.

### Л и т е р а т у р а

1. G. Heber, H.J. Keiser. Z. Naturforsch. 19a (1964) 828.
2. G. Heber and A. Kuhnel, Z. Naturforsch. 19a (1964) 1245.
3. G. Heber and H.J. Keiser, Z. Naturforsch. 20a (1965) 498.
4. И. Гельфанд, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1967.
5. М.М. Халатников. ЖЭТФ 28, 633 (1955).
6. P.T. Mathews and A. Salam. Nuovo Cim. 12 (1954) 563.
7. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилор. Обобщенные функции и действия над ними. Москва, 1963.
8. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию полей, Москва, 1963.
9. G. Heber, A. Kuhnel, в печати.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 мая 1966 г.

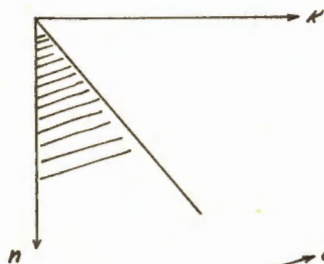


Рис. 1.

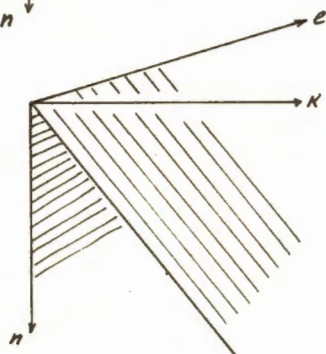


Рис. 2.

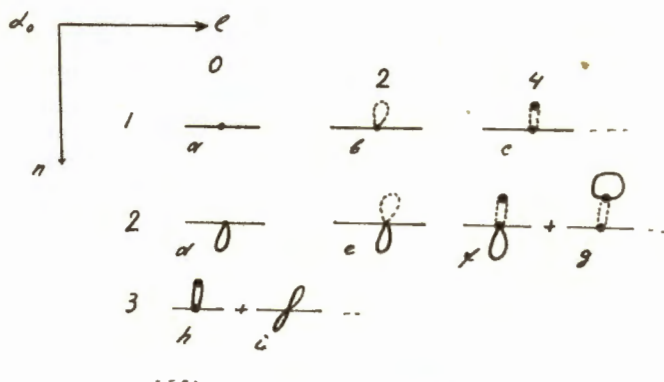


Рис. 3.

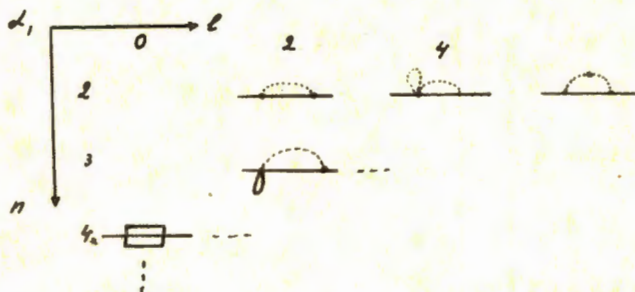


Рис. 4.

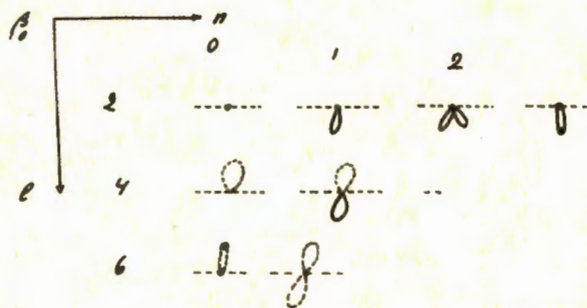


Рис. 5.