ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2760

Л.Ш. Ходжаев

О СВОЙСТВАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПУЧКАМ ПРИЧИННОЙ S-МАТРИЦЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2760

Л.Ш. Ходжаев

О СВОЙСТВАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПУЧКАМ ПРИЧИННОЙ S -МАТРИЦЫ

Недавно были сформулированы[1] пространственные свойства разложения по пучкам S -матрицы, которые должны иметь место в любой корректной S -матричной теории в локальной релятивистской квантовой теории поля. Доказательство выполнимости этих свойств S -матрицы в рамках аксиоматической квантовой теории поля Вайтмана[2] дано в[3].

В настоящей работе мы докажем пространственноподобные свойства разложения по пучкам вакуумных средних радиационных операторов, а также матричных элементов S -матрицы в рамках аксиоматической причинной S -матричной теории Боголюбова[4]. Для простоты мы рассмотрим самодействие одного вещественного скалярного поля $\phi(x)$. Покажем, что результат процесса рассеяния между вещественными скалярными частицами с массой $m \neq 0$ асимптотически не зависит от присутствия других частиц.

В качестве исходной величины мы берем функциональное разложение S -матрицы по нормальным произведениям асимптотических полей

$$S = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4\underline{x}_N \, h_N(\underline{x}_N) : \phi(x_1) \ldots \phi(x_N): , \tag{1}$$

где коэффициентные функции $h_N(\underline{x}_N)$ – С–числа со свойством: $h_N(\underline{x}_{\alpha_N}) = h_N(\underline{x}_N)$. В формуле (1) введены следующие обозначения:

$$(\underline{x}_N) = (x_1, \ldots, x_N), \; (\underline{x}_{\alpha_N}) = (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_N}) \text{ и } \int d^4\underline{x}_N \ldots = \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_{11} .$$

Следуя Боголюбову[4], условия причинности определим при помощи следующего функционального соотношения:

$$\iint d^4x \; d^4y \; f(x) \; g(y) \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)} S^+\right) = 0 \tag{2}$$

для любых $f(x), g(x) \in j(R)$,[x/] удовлетворяющих условию $f(x)\,g(y) = 0$ для временеподобных интервалов $(x-y)^2 \geq 0$ и $x^0 - y^0 \geq 0$.

Введем теперь в рассмотрение радиационную операторнозначную обобщенную функцию

x/ Через $j(R)$ здесь и всюду дальше обозначено пространство неограниченно дифференцируемых и медленно убывающих на бесконечности функций.

$$H_N(f)=\int d^4\underline{x}_N\, f(\underline{x}_N)\, \frac{\delta^N S}{\delta\phi(x_1)\ldots\delta\phi(x_N)}\, S^+ =$$

$$=(-i)^N \int d^4\underline{x}_N\, \theta(x_1^o-x_2^o)\ldots\Theta(x_{N-1}^o-x_N^o)\, j(x_1)\ldots j(x_N) \sum_{P(1,\bar{N})} f(x_{\alpha_N}), \tag{3}$$

определенную в $D\subset H$ для любой функции $f(\underline{x}_N)\in j_0(R^{4N})\in j(R^{4N})$, обращающейся со своими производными достаточно высокого порядка в нуль при $x_1=x_2=\ldots=x_N$. Суммирование в (3) производится по всевозможным перестановкам $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ чисел 1,2, ... N. Через

$$j(x)=i\,\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\,S^+, \qquad j^+(x)=j(x) \tag{4}$$

обозначен оператор бозевского тока.

Согласно определению операторнозначной обобщенной функции, вакуумные средние радиационных операторов

$$h_N(f)=i^N\langle 0\,|\,H_N(f)|0\rangle\subset j_0'(R^{4N}) \tag{5}$$

при любой $f\in j_0(R^{4N})$.

Т е о р е м а 1.

Пусть a – произвольный пространственноподобный вектор, а $\lambda>0$. При соблюдении условия причинности (2) вакуумные средние радиационных операторов, определяемые формулой (5), удовлетворяют пространственноподобным свойствам разложения по пучкам, т.е.

$$\lim_{\lambda\to\infty} h_{m+n+r+s}(F_{\lambda a})=h_{m+n}(f)\,h_{r+s}(g) \tag{6}$$

для любой функции $F_{\lambda a}=F(\underline{x}_{m+n},\underline{y}_{r+s}-\lambda a)\in j_0(R^{4(m+n+r+s)})$,

имеющей вид

$$F(\underline{x}_{m+n},\underline{y}_{r+s})=f(\underline{x}_{m+n})\,g(\underline{y}_{r+s}), \tag{7}$$

$$H_N(f) = \int d^4\underline{x}_N f(\underline{x}_N) \frac{\delta^N S}{\delta\phi(x_1)\ldots\delta\phi(x_N)} S^+ =$$

$$= (-i)^N \int d^4\underline{x}_N\, \theta(x_1^o - x_2^o)\ldots\Theta(x_{N-1}^o - x_N^o)\, j(x_1)\ldots j(x_N) \sum_{P(1,\bar{N})} f(x_{\alpha_N}), \tag{3}$$

определенную в $D \subset H$ для любой функции $f(\underline{x}_N) \in j_0(R^{4N}) \in j(R^{4N})$, обращающейся со своими производными достаточно высокого порядка в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$. Суммирование в (3) производится по всевозможным перестановкам $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ чисел 1,2, ... N. Через

$$j(x) = i\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} S^+, \qquad j^+(x) = j(x) \tag{4}$$

обозначен оператор бозевского тока.

Согласно определению операторнозначной обобщенной функции, вакуумные средние радиационных операторов

$$h_N(f) = i^N \langle 0 |\ H_N(f) | 0 \rangle \subset j_0'(R^{4N}) \tag{5}$$

при любой $f \in j_0(R^{4N})$.

Т е о р е м а 1.

Пусть a – произвольный пространственноподобный вектор, а $\lambda > 0$. При соблюдении условия причинности (2) вакуумные средние радиационных операторов, определяемые формулой (5), удовлетворяют пространственноподобным свойствам разложения по пучкам, т.е.

$$\lim_{\lambda\to\infty} h_{m+n+r+s}(F_{\lambda a}) = h_{m+n}(f)\, h_{r+s}(g) \tag{6}$$

для любой функции $F_{\lambda a} = F(\underline{x}_{m+n}, \underline{y}_{r+s} - \lambda a) \in j_0(R^{4(m+n+r+s)})$,

имеющей вид

$$F(\underline{x}_{m+n}, \underline{y}_{r+s}) = f(\underline{x}_{m+n})\, g(\underline{y}_{r+s}), \tag{7}$$

$$S_{m+r,\,n+s}\left(e^{-i\lambda(\sum_{j=1}^{r}a p_j-\sum_{k=1}^{s}a p_{k+r})}\ \tilde f\ \tilde g\right)=h_{m+n+r+s}\left(f\ g_{\lambda_a}\right). \qquad (11)$$

Здесь

$$f(\underline{x}_{m+n})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3(m+n)}{2}}}\int\frac{e^{i(\sum_{e=1}^{m}x_e q_e-\sum_{t=1}^{n}q_{m+t}x_{m+t})}}{\sqrt{2q^{0}_{m+n}}}\tilde f(\vec{\underline{q}}_{m+n})\,d\vec{\underline{q}}_{m+n}, \qquad (12)$$

где $\tilde f(\vec{\underline{q}}_{m+n})=\tilde{\bar\psi}_m(\vec{\underline{q}}_m)\tilde\Phi_n(\vec{\underline{q}}_m)_n\in j(R^{3(m+n)})$,

$f(\underline{x}_{m+n})=\bar\psi_m(\underline{x}_m)\Phi_n(\underline{x}_m)_n\in j(R^{4(m+n)})$, $\qquad q^{0}_j=\sqrt{\vec q_j^{\,2}+m^2}$, $\ j=\overline{1,\,m+n}$.

Функция $g(\underline{y}_{r+s})\in j(R^{4(r+s)})$ имеет такую же структуру, что и $f^{(m+n)}(\underline{x}_{m+n})$,

$$g_{\lambda_a}=g(y_{r+s}-\lambda a). \qquad (12)$$

Теорема 2

<u>Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда матричные элементы $S_{m+r,\,n+s}$, определяемые формулой (11), удовлетворяют пространственным свойствам разложения по пучкам, т.е.</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty}S_{m+r,\,n+s}\left(e^{-i\lambda(\sum_{j=1}^{r}a p_j-\sum_{k=1}^{s}a p_{r+k})}\tilde f^{(m+n)}\ \tilde g^{(r+s)}\right)= \qquad (13)$$

$$=S_{m+n}\left(\tilde f^{(m+n)}\right)S_{r+s}\left(\tilde g^{(r+s)}\right)$$

для любых $\tilde f^{(m+n)}(\vec{\underline{q}}_{m+n})\in\tilde j_0(R^{3(m+n)})$ и

$$\tilde g^{(r+s)}(\vec{\underline{p}}_{r+s})\in\tilde j_0(R^{3(r+s)}),\quad \tilde j_0(R^4)=F\,j_0(R^4).$$

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из теоремы 1. Доказательство теоремы 1 мы разбиваем на доказательства нескольких лемм.

Л е м м а 1.

Пусть выполняются условия причинности (2). Тогда радиационная операторнозначная обобщенная функция $H_{m+n+r+s}(F^{(m+n+r+s)})$, определяемая (3), удовлетворяет так называемому "интегральному" условию причинности:

$$H_{m+n+r+s}(F^{(m+n+r+s)}) = H_{m+n}(f^{(m+n)})H_{r+s}(g^{(r+s)}) \tag{14}$$

для любой функции $F(\underline{x}_{m+n}, \underline{y}_{r+s}) \in \mathcal{J}_0(R^{4(m+n+r+s)})$,

представимой в виде

$$F(\underline{x}_{m+n}, \underline{y}_{r+s}) = f(\underline{x}_{m+n})\, g(\underline{y}_{r+s}), \tag{15}$$

коль скоро

$$\{\underline{x}_{m+n}\} \underline{\geq} \{\underline{y}_{r+s}\},$$

где функции

$$f(\underline{x}_{m+n}) \in j_0(R^{4(m+n)}) \quad \text{и} \quad g(\underline{y}_{r+s}) \in j_0(R^{4(r+s)}).$$

Доказательство леммы основывается на результатах работы /5/. Теперь, пользуясь этой леммой и условием полноты системы собственных амплитуд оператора 4-энергии-импульса P_μ, мы получим

$$h_{m+n+r+s}(F_{\lambda_a}) =$$

$$= h_{m+n}(f)\, h_{r+s}(g) + h^T_{m+n+r+s}(F_{\lambda_a}), \tag{16}$$

где вакуумные средние радиационных операторов $h_{m+n}(f)$ и $h_{r+s}(g)$ определяются согласно формуле (5), а усеченное вакуумное среднее радиационных операторов

$h^T_{m+n+r+s}(F)$ определяется согласно формуле:

$$h^{T}_{m+n+r+s}(F_{\lambda a}) =$$

$$= \int\int d^4\underline{x}_{m+n}\, d^4\underline{y}_{r+s}\, \theta(x_1^0 - x_2^0)\dots\theta(x^0_{m+n-1} - x^0_{m+n})\theta(y_1^0 - y_2^0)\dots\theta(y^0_{r+s-1} - y^0_{r+s}) \times$$

$$\times \Big[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int d\underline{\vec{k}}_{\nu} <0|j(x_1)\dots j(x_{m+n})|\underline{\vec{k}}_{\nu}><\underline{\vec{k}}_{\nu}|j(y_1)\dots j(y_{r+s})|0>\Big] \times$$

$$\times \sum_{P(1,m+n)} f(\underline{x_a}_{m+n}) \sum_{P(1,r+s)} g(\underline{y_\beta}_{r+s} - \lambda a) \qquad (17)$$

для любых $f(\underline{x}_{m+n}) \in \mathcal{J}_0(R^{4(m+n)})$ и $g(\underline{y}_{r+s}) \in \mathcal{J}_0(R^{4(r+s)})$.

Л е м м а 2.

Фурье-образ усеченного среднего радиационных операторов (17) принадлежит пространству

$$\mathcal{J}_0'(R^{4(m+n+r+s)}\ (\underline{q}_{m+n-1}, \underline{p}_{r+s-1}, k)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь свойствами полноты амплитуды оператора 4-энергии -импульса P_μ, мы из (17) получим:

$$h^{T}_{m+n+r+s}(F_{\lambda a}) =$$

$$= \frac{(-i)^{m+n+r+s}}{(2\pi)^{4(m+n+r+s)}} \int\int\int d^4\underline{q}_{m+n-1}\, d^4\underline{p}_{r+s-1}\, d^4k \times$$

$$\times e^{i\lambda a k}\, \tilde{f}_2(\underline{q}_{m+n-1}, k)\, \tilde{g}_2(\underline{p}_{r+s-1}, k)\, \tilde{D}^{(-)}(\underline{q}_{m+n-1}, \underline{p}_{r+s-1}, k), \qquad (18)$$

где

$$\tilde{D}^{(-)}(\underline{q}_{m+n-1}, \underline{p}_{r+s-1}, k) =$$

$$= (2\pi)^{4(m+n+r+s-1)}\, i^{m+n+r+s-1} \sum_{\begin{pmatrix} \kappa_1, \kappa_{m+n-1} \geq 0 \\ \sigma_1, \sigma_{r+s-1} \geq 0 \end{pmatrix}} \Big[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int d\underline{\vec{k}}_{\nu} \times$$

$$\times \delta(k - \sum_{j=1}^{\nu} k_j) <0|j(0)|\kappa_1 \vec{q}_1> \dots <\kappa_{m+n-1} \vec{q}_{m+n-1}|j(0)|\underline{\vec{k}}_{\nu}> \times$$

$$\times \langle \underline{\vec{k}}_\nu \,|\, j(0) \,|\, \sigma_1 \, \vec{p}_1 \rangle \ldots \langle \sigma_{r+s-1} \, \vec{p}_{r+s-1} \,|\, j(0) \,|\, 0 \rangle\,]\, 2^{m+n+r+s-1} \times$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{m+n-1} [\sqrt{\vec{q}_\ell^{\,2} + m^2_{\kappa_\ell}} \; \delta(q_\ell^2 - m^2_{\kappa_\ell})\,] \prod_{\ell=1}^{m+n-1} \theta(q_\ell^\circ) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{r+s-1} [\sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m^2_{\sigma_j}} \; \delta(p_j^2 - m^2_{\sigma_j})\,] \prod_{j=1}^{r+s-1} \theta(p_j^\circ) \times$$

$$\times \sqrt{\vec{k}^{\,2} + \mu^2} \; \delta(k^2 - \mu^2)\, \theta(k^\circ), \tag{19}$$

где $m^2_{\kappa_\ell} = q^2_{\kappa_\ell}$, $\ell = \overline{1, m+-1}$, т.е. в состоянии

$$\kappa_\ell \text{ и } \vec{q}_\ell : \quad q_\ell^{\circ 2} - \vec{q}_\ell^{\,2} = m^2_{\kappa_\ell} \quad \text{и} \quad m^2_{\sigma_j} = p^2_{\sigma_j} , \quad j = \overline{1, r+s-1} ,$$

$$\tilde{f}_2(\underline{q}_{m+n-1}, k) = \int d^4 \underline{x}_{m+n} \; e^{-i x_{m+n} k} \; \tilde{f}_1(\underline{q}_{m+n-1}, x_{m+n}) , \tag{20}$$

где

$$\tilde{f}_1(\underline{q}_{m+n-1}, x_{m+n}) = \int\limits_{(x^{\circ\prime}_{m+n-1}) > 0} d^4 x'_{m+n-1} \; e^{-i \sum_{j=1}^{m+n-1} q_j x'_j} \times$$

$$\times f_1(\underline{x}'_{m+n-1}, x_{m+n}) , \tag{21}$$

где

$$f_1(\underline{x}'_{m+n-1}, x_{m+n}) = \sum_{P(\overline{1, m+n})} f(\underline{z_a}_{\,m+n}) , \tag{22}$$

где суммирование проводится по всем перестановкам

$\alpha_1 \,., \alpha_{m+n}$ чисел $1, 2, \ldots, m+n$:

$$z_1 = x'_1 + \ldots + x'_{m+n-1} + x_{m+n} , \quad z_2 = x'_2 + \ldots + x'_{m+n-1} + x_{m+n} , \ldots ,$$

$$z_{m+n-1} = x'_{m+n-1} + x_{m+n} , \quad z_{m+n} = x_{m+n} ,$$

функция $f \quad C j_0 (R^{4(m+n)})$.

Аналогичную структуру имеет функция $\tilde{g}_2(\underline{p}_{r+s-1}, k)$, входящая в формулу (18).

В силу релятивистской ковариантности теории, функция $\tilde{D}^{(-)}(\underline{q}_{m+n-1}, D_{r+s-1}, k)$, определяемая (19), должна быть инвариантной относительно ограниченной группы Лоренца $L^{\uparrow}_{+}$, и поэтому она должна зависеть от всевозможных скалярных произведений векторов $(\underline{q}_{m+n-1}, \underline{p}_{r+s-1}, k)$ и знаков $(\underline{q}^{o}_{m+n-1}, \underline{p}^{o}_{r+l-1}, k^{o})$, т.е.

$$\tilde{D}^{(-)}(\underline{q}_{m+n-1}, \underline{p}_{r+s-1}, k) = (2\pi)^{m+n+r+s-1} \times \tag{23}$$

$$\times\ \theta(k^{o}) \prod_{\ell=1}^{m+n-1} \theta(q^{o}_{\ell}) \prod_{j=1}^{r+s-1} \theta(p^{o}_{j})\ I\,(\underline{q}^2_{m+n-1,\ m+n-1,\dots}, q_\alpha q_\beta;\ \underline{p}^2_{r+s-1,\ r+s-1,\dots}\ p_i p_{j,\dots}\ k^2)\ .$$

Сравнивая (23) с (19), мы убедимся, что носитель обобщенной функции $I \subset \mathcal{j}'(R^{4(\dots)}(\dots a_\alpha a_\beta \dots; \dots p_i p_j \dots; k^2))$ принадлежит области

$$\{ q^2_{m+n-1,\ m+n-1,\dots}\ q_\alpha q_\beta;\ p^2_{r+s-1,\ r+s-1,\dots}\ p_i p_j, k^2 \} > 0\ \dots \tag{24}$$

Это последнее свойство обобщенной функции

$$I(\dots q_\alpha q_\beta \dots; \dots p_i p_j \dots; k^2)$$

позволяет представить формулу (18) в виде

$$h^{T}_{m+n+r+s}(F_{\lambda\alpha}) =$$

$$= i^{m+n+r+s-1} \int \dots \int I(\mu^2_{m+n-1,\ m+n-1,\dots}, \mu^2_{\alpha\beta,\dots};\ m^2_{r+s-1,\ r+s-1,\dots}\ m^2_{ij\dots};\ M^2) \times$$

$$\times\ \tilde{D}^{(-)}_{0,\ \mu^2\,\alpha\beta}\,(e^{i\lambda\alpha k}\ \tilde{f}_2\ \tilde{g}_2) \times$$

$$\times \prod_{\alpha\le\beta\le 1}^{m+n-1} d\mu^2_{\alpha\beta} \prod_{i\le j\le 1}^{r+s-1} dm^2_{ij}\ dM^2\ , \tag{25}$$

где $\tilde{D}^{(-)}_{0}, \mu^2_{\alpha\beta}, m^2_{ij}, M^2\,(e^{i\lambda\alpha k}\ \tilde{f}^{(m+n)}_{2}\ \tilde{g}^{(r+s)}_{2}) =$

$$= \frac{(-i)^{m+n+r+s}}{(2\pi)^{3(m+n+r+s)}} \iiint d^4\underline{q}_{m+n-1}\ d^4\underline{p}_{r+s-1}\ d^4k\ \times$$

$$\times\theta(k^{\circ})\prod_{\ell=1}^{m+n-1}\theta(q_{\ell}^{\circ})\prod_{j=1}^{r+s-1}\theta(p_{j}^{\circ})\delta(k^{2}-M^{2})\prod_{\alpha\le\beta\le 1}^{m+n-1}(q_{\alpha}q_{\beta}-\mu^{2}_{\alpha\beta})\times$$

$$\times\prod_{1\le j\le 1}^{r+s-1}\delta(p_{i}p_{j}-m^{2}_{ij})e^{i\lambda a k}\tilde{f}_{2}(\underline{q}_{m+n-1},k)\tilde{g}_{2}(\underline{p}_{r+s-1},k)- \qquad (26)$$

функция неограниченно непрерывно дифференцируемая по параметрам $\mu^{2}_{\alpha\beta}$, m^{2}_{ij}, M^{2}, медленно убывающая относительно этих параметров на бесконечности, т.е.

$$\tilde{D}^{(-)}_{0,\,\mu^{2}_{\alpha\beta},\,m^{2}_{ij},\,M^{2}}\in j(R^{4(\dots)}(\mu^{2}_{\alpha\beta i};m^{2}_{ij i};M^{2})).$$

Так как обобщенная функция

$I(\dots\mu^{2}_{\alpha\beta,\dots};\dots m^{2}_{ij\dots}\dots;M^{2})\in j'(R^{4(\dots)})$ с носителем в области (24), то интеграл (25) существует и, следовательно, величина $h^{T}_{m+n+r+j}(F_{\lambda a})$ линейно и непрерывно зависит от функции $\tilde{f}_{2}(\underline{q}_{m+k-1},k)\in\tilde{j}'_{0}(R^{4(m+n)})$, и $\tilde{g}_{2}(\underline{p}_{r+s-1},k)\in\tilde{j}_{0}(R^{4(r+s)})$.

Таким образом , лемма доказана.

Л е м м а 3.

Пусть a – произвольный пространственноподобный вектор, а $\lambda>0$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{N}h^{T}_{m+n+r+s}(F_{\lambda a})=0 \qquad (27)$$

для любой $f\in j_{0}(R^{4(m+n+r+s)})$, имеющей вид (7) и при любом целом положительном N.

Заметим, что доказательство этой леммы сводится на основании формулы (25) к доказательству соотношения

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N \tilde{D}^{(-)}_{0,\mu^2_{\alpha\beta},m^2_{ij},M^2} \left(e^{i\lambda a k'} \tilde{f}_2 \tilde{g}_2\right) = 0 \tag{28}$$

для $\tilde{f}_2(\underline{q}_{m+n-1}, k) \subset \tilde{j}_0(R^{4(m+n)})$

и $\tilde{\tilde{g}}_2(\underline{p}_{r+s-1}, k) \subset \tilde{j}_0(R^{4(r+s)})$.

В соотношении (28) мы брали систему отсчета $a \equiv (0, a, 0, 0)$, k' — соответствующая компонента вектора $k = (k^0, k^1, k^2, k^3)$.

Следуя Араки [6], построим в пространстве O_M неограниченно дифференцируемых и полиномиально растущих функций обобщенную функцию $\eta(\Phi)$, $\Phi \in O_M$ по формуле:

$$\eta(\Phi) = \int \eta(k')\Phi(k')\,dk' = \tilde{D}^{(-)}_{0,\mu^2_{\alpha\beta},m^2_{ij},M^2}(\Phi f \quad g). \tag{29}$$

Так как функция $e^{ia\lambda k'} \in O_M$, то, полагая $\Phi(k') = e^{i\lambda a k'}$ в (29) и сравнивая полученный результат с (28), мы можем сформулировать условие (28) через обобщенные функции $\eta(\Phi)$ в виде

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N \eta(e^{i\lambda a k'}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N \int \eta(k') e^{i\lambda a k'} dk' = 0. \tag{30}$$

Это соотношение выполняется только в том случае, если функция $\eta(k')$ удовлетворяет условию леммы Римана-Лебега. А для этого достаточно, чтобы $\eta(k') \subset \mathcal{j}(R')$. Араки [6] доказал, что действительно это так, если только обобщенная функция $\tilde{D}^{(-)}_{0,\mu^2_{\alpha\beta},m^2_{ij},M^2}$ инвариантна относительно ограниченной группы Лоренца L_+. Так как из (26) непосредственно следует, что $\tilde{D}^{(-)}_{0,\mu^2_{\alpha\beta},m^2_{ij},M^2}$ есть действительно лоренц-инвариантная обобщенная функция, то этим доказана наша лемма 3.

Таким образом, на основании вышеприведенных лемм полностью доказывается теорема 1 и, следовательно, теорема 2. Из этих теорем следуют частные случаи соотношения (6) и (13):

$$\lim_{\lambda\to\infty} h_{m,n+s}(f \; g_{\lambda a}) = 0 \tag{31}$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_{m,n+s}\left(e^{i\lambda\sum_{k=1}^{s} a p_k} \quad \tilde{f}\;\tilde{g}\right) = 0 \tag{32}$$

для любых $f(\underset{a}{x}_{m+n}) \in j_0(R^{4(m+n)})$, $g(\underline{y}_1) \in j_0(R \quad)$ и $\tilde{f} \in \tilde{j}(R^{3(m+n)})$, $\tilde{\tilde{g}} \in \tilde{j}_0(R^{3s})$.

Заметим, что свойства разложения по пучкам вакуумного среднего от радиационных операторов, выражаемые предельным соотношением (6), установили только для радиационных операторов с несовпадающими аргументами, т.е. предельное соотношение (6) доказали в подпространстве $j_0(R^{4(m+n+r+s)}) \in j(R^{4(m+n+r+s)})$. Для полного решения вопроса нам необходимо продолжить предельное соотношение (6) на все пространство $j(R^{4(m+n+r+s)})$.

Продолжение радиационной операторно-значной обобщенной функции $H_N(f)$, определяемое формулой (3) в $j_0(R^{4N})$ на все пространство $j(R^{4N})$, определим согласно

$$H_N^C(f) = \int d^4\underline{x}_N\, \theta(x_1^0 - x_2^0)\dots\theta(x_{N-1}^0 - x_N^0)\, j(x_1)\dots j(x_N) \times \tag{33}$$
$$\times \sum_{p(1,N)} f(\underline{x}_{\alpha_N}) + \int d^4\underline{x}_N f(\underline{x}_N) C_N^{\Lambda}(\underline{x}_N)$$

для любой функции $f(\underline{x}_N) \in j(R^{4N})$, где

$$C_N^{\Lambda}(\underline{x}_N) = \sum_{\substack{2\le s\le N-1 \\ \sum_{j=1}^N \nu_j = N,\ \nu_j > 1}} \frac{(-i)^s}{s!} P(x_{\nu_1}, | \underline{x_{\nu_1}}_{\nu_2} | \dots | \underline{x_{\nu_1+\dots+\nu_{s-1}}}_N) \times$$
$$\times T[\Lambda_{\nu_1}(\underline{x}_{\nu_1}) \Lambda_{\nu_2}(\underline{x_{\nu_1}}_{\nu_2}) \dots \Lambda_{\nu_s}(\underline{\Lambda_{\nu_1+\dots+\nu_{s-1}}}_N) - i\Lambda_N(\underline{x}_N), \tag{34}$$

где $P(\dots|\dots|\dots)$ – оператор суммирования по всем возможным $N!|[r_1!\dots r_s!]$ разбиениям совокупности N точек на s групп по $\nu_1,\dots,\nu_s$ точек в каждой, Λ_n – произвольные квазилокальные операторы /5/, обладающие следующими свойствами:

1. $\Lambda_n(x_1,\dots,x_n) = 0$, если $x_1 \ne x_2 \ne \dots \ne x_n$; 2. $\Lambda_n(x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_n}) = \Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$; 3. $\overset{+}{\Lambda}_n(x_1,\dots,x_n) = \Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$; 4. $[\Lambda_n(x_1,\dots,x_n), \Lambda_m(y_1,\dots,y_m)] = 0$ при $(x_1 = \dots = x_n) \approx (y_1 = \dots = y_m)$ и 5. $\Lambda_1(x) = j(x)$.

Так как

$$h_N^C(f) = i^N \langle 0 | H_N^C(f) | 0 \rangle \in j'(R^{4N}) \tag{35}$$

для любой $f \in j(R^{4N})$, то свойства разложения по пучкам вакуумного среднего от радиационных операторов совпадающими аргументами будут определяться согласно:

$$\lim_{\lambda\to\infty} h^{C}_{m+n+r+s}\,(F_{\lambda_a}) = h^{C}_{m+n}(f)\, h^{C}_{r+s}\,(g) \tag{36}$$

для любой функции $F(\underline{x}_{m+n}, \underline{y}_{r+s}) = f(\underline{x}_{m+n})\, g(\underline{y}_{r+s}) \in j(R^{4(m+n+r+s)})$,

где $f(\underline{x}_{m+n}) \in S(R^{4(m+n)})$, $g(\underline{y}_{r+s}) \in j(R^{4(r+s)})$,

с причинно-независимыми носителями, $\{\underline{x}_{m+n}\} \gtrsim \{\underline{y}_{r+s}\}$. Теперь, продолжая соотношение (11) на все пространство $S(R^{4(m+n+r+s)})$ и пользуясь формулой (36), мы получим свойства разложения по пучкам элементов S – матрицы, выражаемые в виде формулы (13).

Пользуясь случаем, я хочу выразить мою глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, И. Тодорову и Б.В. Медведеву за стимулирующие обсуждения и ценные замечания, а также А.В. Ефремову и А.Д. Суханову за проявленный интерес к работе.

Литература

1. E.H.Wichmann, J.H. Crichton. Phys. Rev., 132 6 (1963).
2. A.S.Wightman. Phys. Rev., 101, 860 (1956).
3. K.Hepp. Helv. Phys. Acta, 37, 639 (1964).
4. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз. Москва, 1958.
5. Б.В. Медведев. ЖЭТФ, 40, вып. 3 (1961).
6. H.Araki. Ann. of Phys., 11, p. 260-274 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1966 г.