ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р-271

Д.А.Славнов, А.Д.Суханов

О ПРИЧИННОСТИ В ТЕОРИИ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Дубна, 1959 год

Р-271

Д.А.Славнов, А.Д.Суханов

О ПРИЧИННОСТИ В ТЕОРИИ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В последнее время получили распространение идеи Гайзенберга [1], который предложил для устранения расходимостей в теории поля ввести индефинитную метрику в пространстве амплитуд состояния. Эта программа приводит к возникновению ряда трудностей, связанных с необходимостью введения "нефизических" полей, несущих отрицательную норму, и с нарушением унитарности матрицы рассеяния. Однако, был предложен ряд схем [1, 2, 3], в которых удалось исключить "нефизические" состояния из асимптотических выражений наблюдаемых величин и восстановить унитарность матрицы рассеяния.

В указанных работах не рассматриваются вопросы причинности, представляющие безусловно большой интерес. В данной работе исследуется вопрос о возможности построения макропричинной теории с индефинитной метрикой, исходя из довольно общих предположений.

Следуя идее Гайзенберга, будем считать, что полное пространство амплитуд состояния H распадается на два ортогональных подпространства:

H_1 - подпространство физических амплитуд состояния,

H_2 - подпространство "нефизических" амплитуд состояния.

Как и в [2] x/ введем оператор проектирования полной амплитуды состояния на подпространство физических амплитуд состояния H_1, такой что $P = P^+$; $P^2 = P$.

Представим полное поле $\chi(x)$ в виде

$$\chi(x) = \varphi_0(x) + \sum_n C_n \varphi_{m_n}(x) \qquad /1/$$

где $\varphi_0(x)$ - физическое поле массы m, $\varphi_{m_n}(x)$ - "нефизическое" поле массы m_n, и наложим следующие коммутационные условия:

$$\{\varphi_0(x), \varphi_0(y)\} = \mathcal{D}(x-y)$$

$$\{\varphi_{m_n}(x), \varphi_{m_n}(y)\} = \varepsilon_n \mathcal{D}_{m_n}(x-y) \quad \text{где} \quad \varepsilon_n = \pm 1$$

В соответствии с этим свертка полного поля $\chi(x)$ будет

$$\{\chi(x), \chi(y)\} = D(x-y) = \mathcal{D}(x-y) + \Delta(x-y) \qquad /2/$$

где

$$\Delta(x-y) = \sum_n \varepsilon_n C_n^2 \mathcal{D}_{m_n}(x-y)$$

---

x/ В дальнейшем, где не оговорено, используются обозначения работы [2].

В дальнейшем под термином "нефизическая свертка" будем подразумевать $\Delta(x-y)$. Надлежащим выбором ε_n, C_n, m_n всегда можно добиться регулярности функции $D(x-y)$ на световом конусе.

В работах [1,2,3] теория с индефинитной метрикой строилась с использованием понятия матрицы рассеяния в полном пространстве H. Как было указано в [4], какая-либо теория подобного рода в рамках теории возмущений, которая бы удовлетворяла условию макропричинности, невозможна. В настоящей работе мы отказываемся от понятия матрицы рассеяния в полном пространстве. Однако, предполагая, что взаимодействие происходит между полными полями, мы вводим понятие лагранжиана взаимодействия полных полей.

II.

Задача состоит в том, чтобы построить матрицу рассеяния $\tilde{S}$, связывающую ассимптотические выражения физических амплитуд состояния из подпространства H_1, которая была бы разложима в ряд по константе взаимодействия

$$\tilde{S} = 1 + \sum_n \tilde{S}_n$$

Будем пользоваться гипотезой адиабатического включения и выключения взаимодействия. Тогда $\tilde{S}$ будет функционалом от "интенсивности включения взаимодействия" [5] $g(x)$.

На $\tilde{S}$ мы накладываем следующие условия:

1/ релятивистской ковариантности;

2/ унитарности $\tilde{S}\tilde{S}^+ = 1$

3/ ослабленной причинности.

Последнее условие сформулируем следующим образом. Пусть имеются две неперекрывающиеся пространственновременные области G_1 и G_2, в которых включено взаимодействие с интенсивностью $g_1(x)$ и $g_2(y)$ соответственно, причем $x \lesssim y$. Тогда разность

$$R_{12} = \tilde{S}(g_1 + g_2) - \tilde{S}(g_2) \cdot \tilde{S}(g_1)$$

должна достаточно быстро стремиться к нулю при увеличении "расстояния" между областями. Необходимая степень этого убывания будет обсуждена ниже.

4/ Кроме того, потребуем, чтобы $\tilde{S}_n$ являлась полиномиальной функцией лагранжианов полных полей и операторов P. Подчеркнем, что в данной работе мы пользуемся теорией возмущений и поэтому требуем, чтобы все вышенаписанные условия выполнялись в каждом порядке независимо.

Легко показать, что $\tilde{S}_n$, удовлетворяющая первому и четвертому условиям, является полиномиальной функцией операторов P и S_i, где

$$1 + S_1 + S_2 + \ldots = T \exp\left[i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx\right] = S(g)$$

Матрица $S(g)$ имеет вид обычной матрицы рассеяния в полном пространстве. Не вкладывая в нее такого смысла, используем в дальнейшем только ее формальные свойства унитарности $SS^+ = 1$ и строгой причинности /5/ $S(g_1+g_2) = S(g_2)S(g_1)$

111.

Приступим к непосредственному построению матрицы $\tilde{S}$, удовлетворящей вышенаписанным условиям.

Сначала исследуем $\tilde{S}$ с точностью до второго порядка. Наиболее общий вид $(\tilde{S})_2$ - таков:

$$(\tilde{S})_2 = P(1 + S_1 + aS_2 + a_1 S_1 S_1 + a_2 S_1 P S_1)P \qquad /3/$$

Коэффициенты у первых двух членов выбраны из соображений соответствия с классической теорией.

Из условия унитарности имеем

$$a = a^*; \quad a_1^* + a_1 + 1 = 0; \quad a_2^* + a_2 - 1 = 0 \qquad /4/$$

Для того, чтобы использовать условие причинности, рассмотрим

$$(R_{12})_2 = P[(a+a_1)S_1(g_2)S_1(g_1) + (a_2-1)S_1(g_2)PS_1(g_1) +$$

$$+ a_1 S_1(g_1)S_1(g_2) + a_2 S_1(g_1)PS_1(g_2)]P \qquad /5/$$

Нам нужно, чтобы /5/ стремилось к нулю при увеличении "расстояния" между областями G_1 и G_2. Разложим это выражение по теореме Вика и рассмотрим члены, несодержащие сверток. Эти члены не зависят от "расстояния" между областями, и поэтому необходимо, чтобы их сумма тождественно равнялась нулю. Отсюда получаем

$$a + 2a_1 + 2a_2 - 1 = 0 \qquad /6/$$

Тогда из /4/ и /6/ имеем

$$a = 1; \quad a_1 = -\frac{1}{2} + i\alpha; \quad a_2 = \frac{1}{2} - i\alpha$$

где α - произвольное действительное число. Поэтому правую часть /5/ можно переписать в виде

$$P[(-\frac{1}{2} + i\alpha)S_1(g_2)(1-P)S_1(g_1) + (\frac{1}{2} + i\alpha)S_1(g_1)(1-P)S_1(g_2)]P \qquad /7/$$

Это выражение удобно исследовать с помощью леммы, которая будет доказана в приложении.

Л е м м а

Пусть в выражении

$$P\Pi(P, \chi_1(x_{k_1}), \ldots, \chi_n(x_{k_n}), \chi_1(y_{e_1}), \ldots, \chi_m(y_{e_m}))P \qquad (*)$$

Π - полиномиальная функция операторов P и χ причем x_{k_i} -точки области G_1, а y_{e_j} точки области G_2. Тогда необходимым и достаточным условием того, что выражение / $*$ / равно сумме членов, каждый из которых пропорционален "нефизической свертке", зависящей от /$x_{k_i} - y_{e_j}$ /, является возможность представить / $*$ / в виде сумме членов типа

$$P\Pi_1(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots)P\Pi_2(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots)(1-P)\times$$ /8/

$$\times \Pi_3(P, \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots)P\Pi_4(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots)P$$

Возвращаясь к выражению /7/, видим, что оно, по лемме, равно сумме членов, каждый из которых пропорционален "нефизической свертке" полей из областей G_1 и G_2. Таким образом, для выполнения условия причинности во втором порядке является достаточным быстрое стремление к нулю "нефизических сверток" при увеличении "расстояния" между областями.

С другой стороны, если мы в разложении по теореме Вика выражения /7/ возьмем члены, линейно зависящие от сверток, которые, по лемме, обязательно являются "нефизическими", то можно заметить, что они имеют отличную друг от друга операторную структуру. А так как от "расстояния" между областями зависят только свертки, то выражение /7/ будет стремиться к нулю при увеличении "расстояния" только тогда, когда "нефизические свертки" стремятся к нулю.

Таким образом, необходимым и достаточным условием выполнения условия причинности для $\tilde{S}$ во втором порядке является стремление к нулю "нефизических сверток" полей из областей G_1 и G_2 при увеличении "расстояния" между ними.

Рассмотрим поведение сверток $\mathcal{D}(x-y)$ при увеличении "расстояния" между x и y. Для простоты ограничимся скалярными полями. Тут могут представиться три случая:

1. $\lambda < 0$ 2. $\lambda > 0$ 3. $\lambda = 0$, где $\lambda = (x^0 - y^0)^2 - (\bar{x} - \bar{y})^2$.

Из явного вида сверток [5] в первом случае имеем следующее ассимптотическое выражение: $\mathcal{D}(x-y) \sim \frac{\sqrt{m}}{(-\lambda)^{3/4}} \exp(-m\sqrt{-\lambda})$. Видно, что для пространственноподобных интервалов $\mathcal{D}(x-y)$ убывает экспоненциально. Во втором случае ассимптотическое выражение имеет вид: $\mathcal{D}(x-y) \sim \frac{\sqrt{m}}{\lambda^{3/4}} \exp(\pm i m\sqrt{\lambda})$ то есть, для времениподобных интервалов $\mathcal{D}(x-y)$ осциллирует /имеющееся степенное убывание не препятствует распространению частиц на макроскопическое времена/. Именно это обстоятельство, как впервые указал Фирц [6] в связи с [1], приводит к нарушению макроскопической причинности во втором порядке, вследствие распространения "нефизических" частиц на макроскопические времена.

Однако, можно попытаться изменить ассимптотику "нефизических сверток" и, тем самым, снять это возражение. Действительно, если ввести вместо дискретного спектра типа /1/ спектр, в котором каждое "нефизическое" поле усредненно по достаточно узкому интервалу масс с каким-либо весом, например, гауссовским, то свертка "нефизического" поля примет вид: $\mathcal{D}m_n = \int \frac{1}{M} \exp\left(-\frac{(m-m_n)^2}{M^2}\right)\mathcal{D}_m(x-y)dm$
а ассимптотическое выражение для "нефизической свертки" получит экспоненциально убывающий множитель за счет усреднения быстро осциллирующих функций:

$$\Delta(x-y) \sim \sum \frac{\sqrt{m_n}}{\lambda^{3/4}} \exp(\pm i m_n\sqrt{\lambda}) \exp\left(-\frac{\lambda M^2}{4}\right) \qquad /9/$$

При этом регулярное поведение функции $D(x-y)$ на световом конусе не нарушается. Таким образом, и для времениподобных интервалов при использовании "размытого" спектра "нефизических" полей условие причинности во втором порядке оказывается выполненным[x].

Как указано Б.В. Медведевым[xx], нарушение причинности во втором порядке в случае, рассмотренном Фирцем, легко понять, если обратиться к связи теории с индефинитной метрикой с нелокальной теорией. Действительно, в теории с индефинитной метрикой фактически используется регуляризация Паули-Вилларса с конечными массами

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} - \frac{1}{m_1^2-p^2-i\varepsilon} = \frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} \cdot \frac{m_1^2-m^2}{m_1^2-p^2-i\varepsilon}$$

/для простоты рассматриваем одно "нефизическое" поле/. Обрезающий множитель

---

[x] Здесь мы не рассматриваем выполнения условия причинности для областей, лежащих вдоль светового конуса. Однако, можно показать, пользуясь методом Кретьена-Пайерлса [7], что и в этом случае условие причинности будет выполнено, если ввести "нефизические" поля изложенным выше способом. Для дальнейшего исследования этот результат не потребуется.

[xx] Доклад на семинаре в Математическом институте имени В.А.Стеклова.

Из явного вида сверток [5] в первом случае имеем следующее ассимптотическое выражение: $\mathcal{D}(x-y) \sim \frac{\sqrt{m}}{(-\lambda)^{3/4}} \exp(-m\sqrt{-\lambda})$. Видно, что для пространственноподобных интервалов $\mathcal{D}(x-y)$ убывает экспоненциально. Во втором случае ассимптотическое выражение имеет вид: $\mathcal{D}(x-y) \sim \frac{\sqrt{m}}{\lambda^{3/4}} \exp(\pm i m\sqrt{\lambda})$ то есть, для времениподобных интервалов $\mathcal{D}(x-y)$ осциллирует /имеющееся степенное убывание не препятствует распространению частиц на макроскопическое времена/. Именно это обстоятельство, как впервые указал Фирц [6] в связи с [1], приводит к нарушению макроскопической причинности во втором порядке, вследствие распространения "нефизических" частиц на макроскопические времена.

Однако, можно попытаться изменить ассимптотику "нефизических сверток" и, тем самым, снять это возражение. Действительно, если ввести вместо дискретного спектра типа /1/ спектр, в котором каждое "нефизическое" поле усреднено по достаточно узкому интервалу масс с каким-либо весом, например, гауссовским, то свертка "нефизического" поля примет вид: $\mathcal{D}_{m_n} = \int \frac{1}{M} \exp\left(-\frac{(m-m_n)^2}{M^2}\right) \mathcal{D}_m(x-y)\,dm$

а ассимптотическое выражение для "нефизической свертки" получит экспоненциально убывающий множитель за счет усреднения быстро осциллирующих функций:

$$\Delta(x-y) \sim \sum \frac{\sqrt{m_n}}{\lambda^{3/4}} \exp(\pm i m_n\sqrt{\lambda}) \exp\left(-\frac{\lambda M^2}{4}\right) \qquad /9/$$

При этом регулярное поведение функции $D(x-y)$ на световом конусе не нарушается. Таким образом, и для времениподобных интервалов при использовании "размытого" спектра "нефизических" полей условие причинности во втором порядке оказывается выполненным[x].

Как указано Б.В. Медведевым[xx], нарушение причинности во втором порядке в случае, рассмотренном Фирцем, легко понять, если обратиться к связи теории с индефинитной метрикой с нелокальной теорией. Действительно, в теории с индефинитной метрикой фактически используется регуляризация Паули-Вилларса с конечными массами

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{m_1^2 - p^2 - i\varepsilon} = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \cdot \frac{m_1^2 - m^2}{m_1^2 - p^2 - i\varepsilon}$$

/для простоты рассматриваем одно "нефизическое" поле/. Обрезающий множитель

---

[x] Здесь мы не рассматриваем выполнения условия причинности для областей, лежащих вдоль светового конуса. Однако, можно показать, пользуясь методом Кретьена-Пайерлса [7], что и в этом случае условие причинности будет выполнено, если ввести "нефизические" поля изложенным выше способом. Для дальнейшего исследования этот результат не потребуется.

[xx] Доклад на семинаре в Математическом институте имени В.А.Стеклова.

$\frac{m_1^2 - m^2}{m_1^2 - p^2 - i\varepsilon}$ можно относить не к функции распространения, а к вершине. Такая ситуация соответствует нелокальной теории с факторизующимся форм-фактором. Нарушение причинности в случае введения дискретного спектра "нефизических" полей связано с невыполнением для получающегося форм-фактора условий Кретьена-Пайерлса /7/, ибо такой форм-фактор имеет полюс на вещественной оси квадратов импульсов. Наш способ введения "нефизических" полей также получает естественное толкование, так как мы фактически добиваемся снятия особенности путем интегрирования обобщенной функции в классе достаточно гладких функций, /5/ то есть, добиваемся выполнения условий Кретьена-Пайерлса.

Итак, выбором коэффициентов a , a_1, a_2 и специального вида спектра "нефизических" полей можно удовлетворить условия унитарности и причинности $\tilde{S}$ во втором порядке. Окончательно для $(\tilde{S})_2$ имеем

$$(\tilde{S})_2 = P[1 + S_1 + S_2 + (-\tfrac{1}{2} + i\alpha) S_1 (1-P) S_1] P \qquad /10/,$$

где содержится один произвольный вещественный параметр α .

1У.

Прежде чем перейти к следующим порядкам, заметим, что

а/ Свертки физических полей $\mathcal{D}(x-y)$ убывают для времениподобных интервалов медленно /требовать быстрого убывания мы не можем, так как тогда бы не было распространения физических частиц на макроскопические времена/;

б/ "нефизические свертки" убывают экспоненциально как для пространственно-, так и для времениподобных интервалов;

в/ справедлива лемма, сформулированная выше.

Поэтому для выполнения условия причинности в высших порядках необходимо и достаточно, чтобы разность $(R_{12})_n$ равнялась сумме членов типа /8/.

Возможность выбора только таких членов приводит в третьем порядке теории возмущений к следующему выражению для $(\tilde{S})_3$:

$$(\tilde{S})_3 = P\{(\tilde{S})_2 + S_3 + (-\tfrac{1}{2} + i\alpha)[S_1(1-P)S_2 \pm$$
$$+ S_2(1-P)S_1 - S_1(1-P)S_1(1-P)S_1\} P \qquad /11/$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение /11/ унитарно. Отметим, что $(\tilde{S})_3$ зависит от параметра α , введенного во втором порядке, то есть в третьем порядке произвол не увеличился.

У.

Наконец, рассмотрим $\tilde{S}$ в четвертом порядке. Здесь, как и в третьем порядке, для выполнения условия причинности необходимо, чтобы $(R_{12})_4$ была суммой членов типа /8/, что после простых, но весьма громоздких вычислений дает

$$(\tilde{S})_4 = P\{(\tilde{S})_3 + S_4 + (-\tfrac{1}{2} + i\alpha)[S_1(1-P)S_3 + S_2(1-P)S_2 + S_3(1-P)S_1 - S_1(1-P)S_1(1-P)S_2 - S_1(1-P)S_2(1-P)S_1 - S_2(1-P)S_1(1-P)S_1 + S_1(1-P)S_1S_1(1-P)S_1] + b\,S_1(1-P)S_1PS_1(1-P)S_1\}P \qquad /12/$$

где для удовлетворения требования причинности нужно, чтобы

$$b = \frac{1}{4} - \alpha^2 - i\alpha \qquad /13/$$

Требование же унитарности $(\tilde{S})_4$ приводит к

$$b^* + b + \alpha^2 - \frac{3}{4} = 0 \qquad /14/$$

Сравнивая /13/ с /14/, получаем $\alpha^2 + \frac{1}{4} = 0$, то есть, параметр α, который был введен вещественным из требования унитарности во втором порядке, должен быть чисто мнимым.

Таким образом, приходим к явному противоречию: условия унитарности и причинности в четвертом порядке противоречат условию унитарности во втором порядке.

Чтобы яснее представить характер нарушения причинности, наложим на коэффициент b только условие /14/, получающееся из унитарности $(\tilde{S})_4$, но не /13/ и рассмотрим структуру членов, нарушающих причинность. Такими членами в $(R_{12})_4$ будут

$$P\{(\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8} + i\alpha + i\beta)S_1(g_1)(1-P)S_1(g_1)PS_1(g_2)(1-P)S_1(g_2) + (-\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{8} + i\alpha + i\beta)S_1(g_2)(1-P)S_1(g_2)PS_1(g_1)(1-P)S_1(g_1)\}P \qquad /15/$$

где β - произвольное действительное число.

Из структуры /15/ ясно, что это выражение может быть представлено в виде суммы членов, каждый из которых пропорционален "нефизической свертке", но эти свертки зависят от "расстояния" между точками одной и той же области / $\mathcal{G}_1$ или $\mathcal{G}_2$ /. Так как естественно, "расстояние" между точками одной и той же области может быть сколь угодно малым, то для удовлетворения условия причинности необходимо потребовать, чтобы для любых "расстояний" "нефизические свертки" обращались бы в нуль. В этом случае мы фактически приходим к обычной теории, так как свертки полных полей сводятся к сверткам физических полей, а в результате действия оператора P нормальные произведения операторов полных полей равны нормальным произведениям соответствующих физических полей /смотри приложение/.

С другой стороны, если положить $\alpha = -\beta$, то /15/ сводится к сумме членов, каждый из которых пропорционален свертке физических полей, зависящей от "расстояния" между точками областей $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Введением "размытого" спектра физических полей можно, конечно, добиться того, чтобы их свертки убывали достаточно быстро с увеличением "расстояния" между областями. Однако, как было отмечено выше, это приведет к невозможности распространения физических частиц на макроскопические времена.

У1.

Итак, мы показали, что даже ослабленное условие причинности несовместимо с условием унитарности для матрицы рассеяния $\tilde{S}$, связывающей ассимптотические амплитуды состояния из подпространства физических амплитуд состояния H_1, если она строится с помощью лагранжианов взаимодействия полных полей.

Этот результат не является неожиданным, ибо и в нелокальной теории, с которой теория с индефинитной метрикой тесно связана, также не удается совместить условия унитарности и причинности /8/.

В настоящее время, естественно, остается открытым вопрос о построении теории с индефинитной метрикой без использования понятия лагранжиана полных полей.

В заключение еще раз подчеркнем, что все рассмотрение шло в рамках теории возмущений. Поэтому совершенно не затрагивался вопрос о возможной компенсации нарушений причинности и унитарности в различных порядках. Эта чрезвычайно интересная возможность по-прежнему остается открытой. К сожалению, реализации такой программы, как и всякая сколько-нибудь значительная попытка выхода за рамки теории возмущений, встречает серьезнейшие трудности.

Пользуемся случаем выразить свою глубокую благодарность Б.В. Медведеву за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов. Выражаем также благодарность Н.Н. Боголюбову, Д.В. Ширкову и М.К. Поливанову за полезную дискуссию.

где $\mathcal{K}(x_\kappa - y_e)$ – произведение сверток полей, причем только таких, в которых поле из Π_2 свертывается с полем из Π_3.

Тогда

$$P\Pi_2\Pi_3P = \sum\sum \mathcal{A}(x_{\kappa_1},\dots,x_{\kappa_n})\mathcal{B}(y_{e_1},\dots,y_{e_m})\times$$
$$\times\sum \mathcal{K}(x_\kappa - y_e) : \dots \varphi_{oi}(x_{\kappa_i})\dots\varphi_{oj}(y_{ej})\dots: \qquad /\Pi 4/$$

С другой стороны

$$P\Pi_2 P\Pi_3 P = \sum \mathcal{A}(x_{\kappa_1},\dots,x_{\kappa_n})\mathcal{B}(y_{e_1},\dots,y_{e_m})\times$$
$$\times\sum \mathcal{K}'(x_\kappa - y_e) : \dots \varphi_{oi}(x_{\kappa_i})\dots\varphi_{oj}(y_{ej})\dots: \qquad /\Pi 5/$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в /П4/ и /П5/ одинаковы, а $\mathcal{K}'$ отличается от $\mathcal{K}$ только тем, что все свертки полных полей заменены на свертки физических полей. Вычитая из /П4/, /П5/, имеем

$$P\Pi_2(1-P)\Pi_3P = \sum\sum \mathcal{A}(x_{\kappa_1},\dots,x_{\kappa_n})\mathcal{B}(y_{e_1},\dots,y_{e_m})\times$$
$$\times\sum\left[\mathcal{K}(x_\kappa - y_e) - \mathcal{K}'(x_\kappa - y_e)\right] : \dots \varphi_{oi}(x_{\kappa_i})\dots\varphi_{oj}(y_{ej})\dots: \qquad /\Pi 6/$$

Разбивая каждую полную свертку в $\mathcal{K}$ на сумму сверток физических и "нефизических полей" и вычитая $\mathcal{K}'$, получаем, что каждое слагаемое в /П6/ или равно нулю, или пропорционально "нефизической свертке", что и требовалось доказать.

Доказательство необходимого условия.

Пусть

$$P\Pi P = \sum \Delta(x_\kappa - y_e)\, P\Pi' P \qquad /\Pi 7/$$

Но

$$\Delta(x_\kappa - y_e)P = P\chi(x_\kappa)(1-P)\chi(y_e)P \qquad /\Pi 8/$$

Подставляя /П8/ в /П7/, имеем

$$P\Pi P = \sum P\chi(x_\kappa)(1-P)\chi(y_e)P\Pi' P \qquad /\Pi 9/$$

что и требовалось доказать.

Приложение

Лемма:

Необходимым и достаточным условием того, что выражение

$$P\Pi(P, \chi_1(x_{k_1}), \ldots, \chi_n(x_{k_n}), \chi_1(y_{e_1}), \ldots, \chi_m(y_{e_m}))P \qquad /\Pi1/$$

равнялось сумме членов, каждый из которых пропорционален "нефизической свертке", зависящей от $(x_{k_i} - y_{e_j})$, является возможность представить /П1/ в виде суммы членов типа

$$P\Pi_1(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots) P \Pi_2(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots)(1-P) \times$$
$$\times \Pi_3(P, \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots) P \Pi_4(P, \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots) P \qquad /\Pi2/$$

Доказательство.

Легко убедиться, что

$$P\varphi_o^{(+)} = \varphi_o^{(+)}P; \quad P\varphi_o^{(-)} = \varphi_o^{(-)}P; \quad P\varphi_n^{(+)} = 0; \quad \varphi_n^{(-)}P = 0$$

Здесь $\varphi_o^{(+)}$ и $\varphi_o^{(-)}$ положительно и отрицательно частотные части физического поля, а $\varphi_n^{(+)}$ и $\varphi_n^{(-)}$ – то же самое для "нефизического". Знаки частотности выбраны такими же, как в /5/. Тогда на нормальное произведение операторов полного поля χ оператор P действует так:

$$P{:}\,\chi_1(x_{k_1}) \ldots \chi_n(x_{k_n}){:}\,P = P{:}\,\varphi_{o1}(x_{k_1}) \ldots \varphi_{on}(x_{k_n}){:}\,P \qquad /\Pi3/$$

Доказательство достаточного условия.

Пользуясь теоремой Вика, можно представить Π_2 и Π_3 в виде

$$\Pi_2 = \sum \mathcal{A}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}){:} \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots {:}$$
$$\Pi_3 = \sum \mathcal{B}(y_{e_1}, \ldots, y_{e_m}){:} \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots {:}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – коэффициентные функции. Далее

$$P\Pi_2 P = \sum \mathcal{A}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}){:} \ldots \varphi_{oi}(x_{k_i}) \ldots {:}$$

$$\Pi_2\Pi_3 = \sum\sum \mathcal{A}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})\mathcal{B}(y_{e_1}, \ldots, y_{e_m}){:} \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots {::} \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots {:} =$$

$$= \sum\sum \mathcal{A}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})\mathcal{B}(y_{e_1}, \ldots, y_{e_m})\sum K(x_k - y_e){:} \ldots \chi_i(x_{k_i}) \ldots \chi_j(y_{e_j}) \ldots {:}$$

Литература

1. W. Heisenberg Zs.f. Naturforsh. 5a, 251 (1950). Rev.Mod.Phys. 29, 269 (1957). В этой статье имеются ссылки на все предыдущие работы.
2. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов /в печати/. Науч.доклады Высшей школы Физ.-математ.науки /1958/
3. D.A. Glaser. Proc. of 1958 Conference on High Energy Physics, CERN (1958).
4. Д.А.Славнов, А.Д. Суханов /в печати/ ДАН СССР /1958/.
5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей.Москва./1957/.
6. M. Fierz Helv.Phys.Acta 23, 731 (1950). Перевод в НРКЭ.
7. M. Chretien, R.E. Peierls Nuovo Cim. 10, 669 (1953).
8. E.C.G. Stueckelberg, G. Wanders Helv.Phys. Acta 27, 667 (1954).

Работа поступила в издательский отдел 18 декабря 1958 года.