ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2700

М.И. Широков

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С ТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2700

М.И. Широков

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С ТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Направлено в ЖЭТФ

Аннотация

Как показал Ван Хов, в модели скалярного поля с точечными источниками все собственные вектора полного гамильтониана ортогональны к собственным векторам свободного. В этом случае существуют не только физические, но и чисто математические основания для введения так называемых операторов "одетых" частиц. Обсуждается существование унитарного преобразования, связывающего операторы "одетых" и "голых" частиц. Дискутируется вопрос о том, необходимы ли неканонические (безвакуумные) представления для "одетых" операторов поля. Указывается, что несмотря на факт ортогональности, поведение свободных и взаимодействующих мезонов можно сравнивать, если теорию сформулировать в терминах соответствующим образом определенных амплитуд Фока или функций Грина.

Введение

В этой работе обсуждается простая модель квантовой теории поля: скалярные мезоны с точечными фиксированными источниками. В основном разбираются вопросы, связанные с фактом ортогональности пространства S_0 векторов состояний свободных мезонов и пространства S_g взаимодействующих[/1/]. Пространством векторов состояний мы называем всевозможные линейные комбинации собственных векторов гамильтониана теории. Такая ортогональность означает невозможность разложения решений уравнения Шредингера при наличии взаимодействия по собственным векторам свободного гамильтониана (все коэффициенты разложения должны быть равны нулю). В частности, не существует разложения вида (12.11) в изложении Швебера[/2/] для сходной модели.

Мы начнем с краткого изложения способа нахождения решений модели, использованного Ван Ховом[/1/], вводя по пути понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем.

§ 1. Операторы поля взаимодействующих мезонов

Гамильтониан модели задается выражением $H_g = H_0 + gH_I$

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2(x) + \vec{\nabla} u(x)\,\vec{\nabla} u(x) + m^2 u^2(x)]\,, \tag{1.1}$$

$$H_I = \int d^3x\, u(x) \sum_{s=1}^{n} \delta(x - x_s)\,. \tag{1.2}$$

Оператор скалярного поля $u(x)$ и сопряженный оператор $\pi(x)$ подчиняются обычным перестановочным соотношениям; x означает три координаты: x, y, z. Всюду считаем, что $h = 1$ и $c = 1$. Подразумевается везде шредингеровское представление, если не оговорено иное.

Оказывается возможным представить H_g в виде почти свободного гамильтониана, если в H_g ввести вместо $u(x)$ и $\pi(x)$ такие операторы:

$$u_g(x) = u(x) + \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3k \sum_s \frac{e^{ik(x-x_s)}}{k^2+m^2}\,, \tag{2.3}$$

$$\pi_g(x) = \pi(x)\,. \tag{1.4}$$

В терминах u_g и π_g полный гамильтониан принимает вид

$$H_g = H_0(u_g, \pi_g) + W(x_s) + W_0\,. \tag{1.5}$$

Выражение $H_0(u,\pi)$ задается формулой (1.1), с - числовые функции $W(x_s)$ и W_0 определены формулами (2.3) и (2.4) работы /1/.

В случае, когда источники заменены квантованным нуклонным полем (с энергией, не зависящей от импульса), введение сходных новых операторов поля приводит к появлению в (1.5) гамильтониана парного взаимодействия нуклонов вместо $W(x_s) + W_0$ (см. /2/ (12.54a)). Таким образом, в представлении u_g, π_g гамильтониан H_g является почти свободным в том смысле, что (1.5) уже не содержит взаимодействия скалярного поля с чем-либо. В частности, гейзенберговский оператор $u_g(x,t)$ подчиняется свободному уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)\,u_g(x,t) = 0\,. \tag{1.6}$$

Введем операторы $a_g(k), a_g^+(k)$ связанные с $u_g(x,t)$ обычным образом с помощью плоских волн (так что (1.6) выполняется):

$$u_g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \sum_k \epsilon_k^{-1/2}[a_g(k)e^{ikx+i\epsilon_k t} + a_g^+(k)e^{-ikx-i\epsilon_k t}]\,. \tag{1.7}$$

Наложены условия периодичности на кубе объема V, индексы k поэтому дискретны (k обозначает k_x, k_y, k_z). При больших V можно заменить Σ_k интегралом $\int d^3 k V/(2\pi)^3$; $\epsilon_k \equiv \sqrt{k^2+m^2}$. Через $a_g(k)$ оператор $H_0(u_g, \pi_g)$ в (1.5) тогда выражается привычным образом:

$$H_0(u_g, \pi_g) = \Sigma_k \epsilon_k a_g^+(k) a_g(k). \tag{1.8}$$

С операторами $a_{g=0}(k) \equiv a(k)$ операторы $a_g(k)$ связаны соотношением

$$a_g(k) = a(k) + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_k + i\sigma_k); \tag{1.9}$$

$$r_k = g(V\epsilon_k^3)^{-1/2} \sum_s \cos kx_s \; ; \quad \sigma_k = -g(V\epsilon_k^3)^{-1/2} \sum_s \sin kx_s . \tag{1.10}$$

Ван Хов выражает $a_g(k)$ при любом g через эрмитовские операторы p_k и q_k:

$$p_k = \frac{i}{\sqrt{2}}[a^+(k) - a(k)]; \quad q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}[a^+(k) + a(k)]; \tag{1.11}$$

$$[q_k, p_\ell] = i\delta_{k\ell} \; ; \quad [q_k, q_\ell] = 0 \; ; \quad [p_k, p_\ell] = 0 \; ;$$

и реализует (представляет) их следующим образом: выбирается представление, в котором q_k диагональны (q_k имеет непрерывный спектр значений от $-\infty$ до $+\infty$), а $p_k = -i\partial/\partial q_k$ (см. также [3], стр. 19). Напомним, что k есть номер степени свободы поля. Позже мы обсудим, как это представление связано с обычным представлением с вакуумом (фоковское представление), см. [2] глава 7, § 1.

В q_k-представлении собственные векторы H_g имеют вид бесконечного произведения Π по всем номерам k от функций $\phi_n^k(q_k)$, выражающихся через нормированные функции Эрмита h_n [1]:

$$\Psi^g(\{n(k)\}) = \Pi_{k'} \phi^{k'}_{n(k')}(q_{k'}) , \tag{1.12}$$

$$\phi_n^k(q_k) = e^{-i\sigma_k q_k} h_n(q_k + r_k) . \tag{1.13}$$

Собственные значения H_g равны $\Sigma_k n(k)\epsilon_k + W(x_s) + W_0$.

Нельзя считать (1.12) функциями в обычном смысле: каждой точке (q_0, q_1, ..., q_n, ...) (1.12) сопоставляет нуль. Например, когда все $n(k)$ равны нулю, имеем при $g = 0$

$$\Pi_k (\pi)^{-1/4} e^{-q_k^2/2} = 0$$

даже в точке (0,0, ... 0, ...). Поэтому их нельзя рассматривать и как амплитуды вероятности. Однако для векторов (1.12) можно определить скалярное произведение так, как это делает Ван Хов[1]:

$$(\Psi(\{n(k)\}) , \quad \Psi(\{n'(k)\}) = \Pi_k \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k \phi_n^{k}(q_k)\phi_{n'}^{k}(q_k) . \tag{1.14}$$

В этом смысле вектора с одним и том же g ортонормированы. По формуле (1.14) можно вычислять скалярное произведение векторов и с разными g, поскольку они выражены в одном и том же q_k-представлении. Действие операторов на (1.12) уже подразумевалось при их нахождении: действие $H_g = \Sigma_k H_k$ сводится к сумме действий отдельных слагаемых H_k на обычные функции (1.13).

Вообще (1.12) можно рассматривать как вектора некоторого гильбертова пространства[4], о котором подробнее будет сказано в § 3.

Определим для любого g вакуумное состояние Ω_g как собственное состояние H_g с наименьшей собственной энергией – когда все $n(k)$ равны нулю:

$$\Omega_g = \Pi_k \phi_0^{k}(q_k) . \tag{1.15}$$

Заметим, что Ω_g – вакуум только по отношению к скалярному полю: он содержит источники.

Нам сейчас придется обсудить одну трудность, которая, возможно, является специфической для рассматриваемой модели, но представляет несомненный интерес. В вакуумном состоянии должен быть равен нулю импульс мезонного поля. Однако канонический импульс мезонного поля $\vec{P}$, построенный обычным образом из лагранжиана, соответствующего гамильтониану H_g [x]

$$\vec{P} = \int d^3x [\pi(x)\vec{\nabla} u(x) + \vec{\nabla} u(x)\pi(x)] \tag{1.16}$$

не коммутирует с H_g, как можно проверить. Заметим, что $\vec{P}$ имеет такой же вид, как и в случае отсутствия взаимодействия ввиду отсутствия производных от $u(x)$ в H_I

---

[x] Поскольку в модели есть фиксированные источники, то полный импульс смысла не имеет. Но можно говорить об импульсе только мезонного поля. Его можно определить как генератор сдвига для оператора мезонного поля. Оператор (1.16) удовлетворяет этому определению в следующем смысле: $[u(x), P_z] = i\partial u(x)/\partial z$. Конечно, $\vec{P}$ не является генератором смещения для всех операторов. Например,

$$[H_g(x) , P_z] \neq i\partial H_g(x)/\partial z .$$

Отсюда должны были бы вытекать обычные следствия : 1) импульс мезонного поля не сохраняется (что было бы неудивительным, раз мезоны взаимодействуют с источником), 2) в собственных состояниях импульс не имеет определенного значения[x/]. В частности, не равна нулю вероятность того, что в Ω_g имеется некоторое ненулевое значение импульса $\vec{P}$.

Однако попробуем найти распределение по импульсам в состоянии Ω_g . Для этого надо вычислить скалярные произведения собственных функций $\vec{P}$ и функции Ω_g . В импульсном представлении $\vec{P}$ имеет вид $\Sigma_k k a^+(k) a(k)$, и его собственные функции такие же, как у H_0. Они ортогональны к Ω_g и это означает, что вероятность найти любое значение P в состоянии Ω_g равна нулю. Такую ситуацию можно охарактеризовать так: оператор $\vec{P}$ просто не имеет никакого отношения к динамике с гамильтонианом H_g .

Обсудим другое выражение для импульса мезонного поля

$$\vec{P}_g = \int d^3x(\pi_g \vec{\nabla} u_g + \vec{\nabla} u_g \pi_g) = \Sigma_k \vec{k}\, a_g^+(k) a_g(k). \tag{1.17}$$

Такой оператор является тоже генератором сдвига, но для поля u_g

$$[u_g(x), P_{gz}] = i\partial u_g(x)/\partial z . \tag{1.18}$$

Он коммутирует с H_g , следовательно, сохраняется и в состояниях (1.12) имеет определенное значение. В частности, в состоянии Ω_g он равен нулю.

Можно показать, что выражение (1.17) может быть получено каноническим образом из лагранжевой плотности, отличающейся от исходной на некоторую трехмерную дивергенцию. Таким образом, $\vec{P}_g$ и $\vec{P}$ столь же равноправные операторы импульса с точки зрения канонической процедуры их получения, как и лагранжианы, отличающиеся на дивергенцию.

Примем $\vec{P}_g$ в качестве оператора импульса.

Тогда состояние (1.12) со всеми $n(k)$, равными нулю, кроме одного – $n(k_0)$, равного 1 (обозначим такое состояние $\Psi^g(k_0)$), имеет импульс k_0 и энергию $\epsilon(k_0)=\sqrt{k_0^2+m^2}$ (если энергию отсчитывать от энергии вакуума Ω_g). Связь $\epsilon^2(k_0) - k_0^2 = m^2$ характерна именно для одночастичного состояния (двухчастичное уже не имеет определенной массы покоя), и мы можем назвать $\Psi^g(k_0)$ физическим одномезонным состоянием, следуя [/5/].

[x/] Именно так считает Ван Хов. В [/1/] на стр. 149 после 5-ой строки сверху читаем: "Бозоны в этом состоянии имеют энергию ϵ_k . Их импульс, напротив, не имеет единственного значения: он сводится к $\vec{k}$ только в областях пространства, бесконечно удаленных от точечных источников".

Теперь можно непосредственно проверить, что оператор

$a_g^+(k) = (q_k - \frac{\partial}{\partial q_k})/\sqrt{2} + (r_k - i\sigma_k)/\sqrt{2}$, действуя на Ω_g , дает состояние $\Psi^g(k)$:

$$\Psi^g(k) = a_g^+(k)\Omega_g , \tag{1.19}$$

т.е. рождает один физический мезон. Имеется также свойство

$$a_g(k)\,\Omega_g = 0 . \tag{1.20}$$

В отличие от этого, любое число операторов $a(k)$, действуя на Ω_g , не дает нуля. Таким образом, введенные ранее формально операторы $a_g^+(k)$ можно толковать как операторы рождения физических (взаимодействующих с источниками) мезонов в динамике с гамильтонианом H_g.

Первоначальные операторы $u(x)$ и $a(k)$ в такой динамике играют "затравочную роль" – роль строительного материала теории. При наличии взаимодействия следует заново найти оператор рождения частиц, не опираясь на толкование квантованного поля $u(x)$ в свободном случае. В случае ортогональности собственных функций H_0 и H_g такое переопределение является даже необходимым: в следующем параграфе мы увидим, что лишь в пространстве S_g собственных функций H_g имеется удовлетворительный математический аппарат для решения динамических задач.

Мы будем называть $u(x)$ и $a(k)$ "одетыми" (clothed) операторами.

Хенли и Тирринг[6], гл. 9, называют u_g in –операторами. Это название кажется неподходящим, хотя бы по следующей причине. Теория допускает точное рассмотрение и в случае, когда взаимодействие gH_I никогда не выключается (в изложениях[1] и[2] гл. 12, нет никакой необходимости предполагать адиабатическое включение и выключение источника).

Поэтому гейзенберговские операторы $u_g(x,t)$ при всех временах отличаются от $u(x,t)$ на постоянную c –числовую функцию, но вовсе не стремятся к $u(x,t)$ при $t \to -\infty$,как это полагается для in –операторов.

Понятие об "одетых" состояниях и операторах вводилось в работах Ван Хова[7] и Экстейна[8]. Конкретное построение таких операторов в сходной с нашей модели произвели Гринберг и Швебер[5]. Однако они ограничивались случаем неточечного взаимодействия, когда S_0 и S_g не ортогональны. Ван Хов считает, что физические частицы надо описывать "одетыми" операторами, когда взаимодействие между частицами не локализовано, но действует во всем пространстве (плотность гамильтониана взаимодействия всюду не равна нулю) в отличие от случая рассеяния на локализованном потенциале, например. В рассматриваемой модели,однако,взаимодействие является локализованным и введение новых операторов необходимо по другим соображениям. Более подходящим для этой модели, по-видимому, было бы обтекаемое выражение "модифицированный" (modified) оператор, употребляемое Фридрихсом [9], часть III, но представляется, что термин "одетый" оператор вызовет оптимально правильную ассоциацию у оптимального числа читателей (и окажется, возможно, вполне подходящим в случае более сложных моделей). Стоит еще отметить, что u_g и a_g не являются перенормированными операторами, см. [7] и [5] (в частности, перенормированный оператор отличается от "голого" только множителем – константой перенормировки).

§ 2. Связаны ли "одетые" операторы с "голыми" унитарным преобразованием ?

Этот вопрос актуален потому, что из отрицательного ответа на него (см. [2],[10] стр. 284; [11,12] и др.) следует, что для $a_g(k)$ мы должны взять неканоническое представление, представление без вакуумного вектора, см. [2], конец § 1 главы 7. В этом случае встают дальнейшие вопросы: какие критерии для выбора того или иного неканонического представления, каково их физическое толкование и т.п., см. [11], часть II.

Исчерпывающее обсуждение вопроса потребовало бы иного математического уровня изложения, нежели тот, который принят в этой работе. Мы ограничимся фактами, имеющими место в рассматриваемой модели, а именно, конкретно покажем, что соответствующее унитарное преобразование в определенном смысле существует, но не в обычном гильбертовом пространстве.

Для простоты в дальнейшем берем модель с одним источником в начале координат, так что $\sigma = 0$, а $r_k = g(V\epsilon_k^3)^{-1/2}$, см. (1.10).

В предыдущем параграфе было показано, что для каждого g существует вакуумное состояние Ω_g и операторы $a_g^+(k)$, рождающие одночастичные состояния из Ω_g. Другими словами, для каждого g существует фоковское представление перестановочных соотношений $[a_g(k_1), a_g^+(k_2)] = i\delta_{k_1,k_2}$ и т.д., осуществляющееся в пространстве S_g, натянутом на собственные вектора (1.12) гамильтониана H_g.

Но этот континуум представлений с вакуумами имеет место в пространстве, являющемся бесконечным прямым произведением гильбертовых пространств, каждое из которых состоит из совокупности функций $\Psi(q_k)$ от q_k (произведение берется по всем полевым степеням свободы k). Такое пространство S является несепарабельным, т.е. не может быть натянуто на счетный базис [3,13]. Фоковское представление для $a_g(k)$ осуществляется в сепарабельном подпространстве S_g этого пространства. Нейман [14] называет такие подпространства неполными (incomplete) бесконечными прямыми произведениями. Для каждого g фоковское представление для $a_g(k)$ строится в соответствующем пространстве S_g точно так же, как оно строится в пространстве S_0 для $a(k)$ [15].

Известно, что переход от $a(k)$ к $a_g(k)$ может быть представлен, как преобразование вида [16]:

$$a_g(k) = U a(k) U^{-1} \quad , \quad U = e^{i\Sigma_k p_k r_k} . \tag{2.1}$$

Формально U -унитарное преобразование потому, что p_k -эрмитовские операторы. Покажем сначала, что U унитарно в S, доказав этим гипотезу, выдвинутую в [13]. Затем обсудим, на каком основании некоторые авторы называют его неунитарным (см. [2] гл. 12; [10] стр. 824).

Заметим, что $\exp(ip_k r_k)$ является известным оператором сдвига переменной q_k на величину r_k :

$$e^{ip_k r_k} \phi_n(q_k) = \phi_n(q_k + r_k) .$$

Применим U к собственному вектору H_0 :

$$U\Psi^0(\{n_k\}) = \Pi_k e^{ip_k r_k} h_n(q_k) = \Pi_k h_n(q_k + r_k) = \Psi^g(\{n_k\}) . \tag{2.2}$$

Получился собственный вектор H_g. Действие U при этом определяется как произведение действий отдельных сомножителей $\exp ip_k r_k$ на соответствующие функции $h_n(q_k)$, ср. определение действия $H_g = \Sigma_k H_k$ в § 1. Как вектор Ψ^0, так и вектор Ψ^g нормированы на единицу. Таким образом, U сохраняет норму. Далее, скалярное произведение

$$(U\Psi^0(\{n'_k\}), U\Psi^0(\{n''_k\})) = (\Psi^g(\{n'_k\}), \Psi^g(\{n''_k\})) \tag{2.3}$$

равно нулю, если

$$(\Psi^0(\{n'_k\}), \quad \Psi^0(\{n''_k\})) = 0 ,$$

что будет в том случае, когда набор чисел заполнения $\{n'_k\}$ не совпадает с $\{n''_k\}$. Ортогональность тоже сохраняется. Итак, U осуществляет унитарное отображение из пространства S_0 в ортогональное ему пространство S_g, но не пространства S_0 на самое себя[x/].

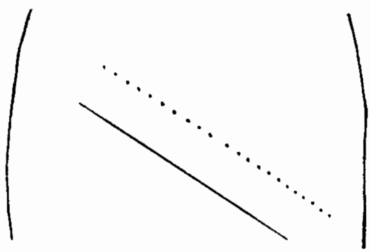
Если S состояло бы только из двух подпространств, S_0 и S_g, одинаковой размерности, то U имело бы вид квадратной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

Действительно, тогда преобразованный вектор

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V\psi \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ортогонален исходному и имеет ту же норму, если $\|V\psi\| = \|\psi\|$. Если в этом же духе наглядно изображать U в нашем случае, то это будет континуально-бесконечная матрица, середина которой имеет вид:



(2.6)

"Строки" и "столбцы" матрицы нумеруются непрерывным индексом g, $-\infty < g < \infty$. Точками обозначена диагональ матрицы, каждая точка сплошной линии (параллельной диагонали) изображает один и тот же оператор V_g, преобразующий S_{g_1} в S_{g_2} при $g_1 - g_2 = g$ (в частности S_0 в S_g), остальные

---

x/ В [13] существование Ω_g выводится из <u>предположения</u> о существовании U. Если заметить, что метод Ван Хова дает независимое от этой гипотезы и явное выражение для Ω_g, то можно, наоборот, доказать существование U, что мы и сделали.

" элементы " матрицы равны нулю. Расстояние сплошной линии от диагонали определяется величинами r_k , в частности, величиной g .

Покажем, что Швебер /2/ не доказал своего утверждения о том, что представления $a(k)$ и $a_g(k)$ (в обозначениях Швебера $a(k)$ и $c(k)$) унитарно неэквивалентны. Фактически эти представления названы им так потому, что вектор $\Omega_g = U\Omega_0$, для которого $a_g(k)\Omega_g = 0$, якобы имеет бесконечную норму, см. /2/, гл. 12, § 1. В соответствующем доказательстве (см. (12.31) – (12.26) в /2/ и стр. 824 в /10/) молчаливо предполагается, что $\Phi_0^{(0)}$ –амплитуда вероятности найти состояние Ω_0 в состоянии Ω_g –не стремится к нулю, когда формфактор $f(k^2)$ стремится к единице. Если мы вычислим $\Phi_0^{(0)}$ по способу Ван Хова, то обнаружим, что

$$\Phi_0^{(0)} = e^{-\frac{1}{2}\int d^3k\,|v(k)|^2} . \qquad (2.7)$$

Обозначения Швебера, см. также формулу (14') в /13/. Учитывая это, получим

$$\lim_{f\to 1}(\Omega_g , \Omega_g) = |\Phi_0^{(0)}|^2 e^{\int d^3k\,|v(k)|^2} = 1 , \qquad (2.8)$$

а не бесконечность. В формализме Ван Хова особенно ясен тот факт, что норма Ω_g всегда единична, даже когда $\int d^3k|v(k)|^2$ расходится. Способом Швебера можно только показать, что Ω_g и Ω_0 стремятся стать ортогональными (т.е. уменьшается $\Phi_0^{(0)}$ при $\int d^3k\,|v(k)|^2 \to \infty$), ср. /12/, § 2. Такая ортогональность означает, конечно, что U не может быть унитарным в гильбертовом сепарабельном пространстве S_0 , но не значит, что U неунитарно вообще.

Хотя мотивировка вышеуказанного утверждения ошибочна, для точечного источника оказывается справедливым следующее уточненное положение. В пространстве S_0 не существует такого вектора Ω , что $a_g\Omega = 0$, потому что единственный такой вектор находится в ортогональном пространстве S_g (а не потому, что не существует унитарного преобразования, связывающего a_g с a). Другими словами, если искать представление $a_g(k)$, ограничиваясь пространством, в котором $a(k)$ имеет вакуумный вектор, то такое представление может быть только неканоническим. С другой стороны, и для $a_g(k)$ и для $a(k)$ одновременно существуют канонические (фоковские) представления, но с разными вакуумными векторами.

Такие же уточнения должны быть сделаны по поводу аналогичных утверждений для других простых канонических преобразований операторов поля, указанных в /3/, стр.19-21 и в /11/, стр. 93-95 x/.

Представление о несепарабельном пространстве S нужно только для рассмотрения

x/ Ср. Хааг /3/, стр. 19-20. Однако его заключительное утверждение – нет вакуумного состояния Ω , удовлетворяющего $a_g\Omega = 0$, – является правильным при наличии оговорки: если искать Ω только в S_0 .

чисто аппаратных вопросов теории, подобных рассмотренному. Для решения физических задач достаточно иметь дело с соответствующим сепарабельным гильбертовым пространством S_g и употреблять только канонические представления с вакуумом, но только при условии, что все физические состояния описываются векторами из S_g, т.е. являются одетыми состояниями. Действительно, чтобы найти конечное состояние $\Psi'(t)$ при заданном начальном $\Psi(t_0)$, надо уметь вычислить действие оператора эволюции $\exp(-iH_g(t-t_0))$ на $\Psi(t_0)$. В S_g этот оператор может быть определен как

$$e^{-iH_g(t-t_0)} = \Sigma_\nu \, |\nu_g> e^{-iE_{g\nu}(t-t_0)} <\nu_g| \, , \tag{2.9}$$

где $|\nu_g>$ - собственный вектор (1.12) оператора H_g с собственным значением $E_{g\nu}$. С помощью (3.9) $\Psi'(t)$ сразу представляется в виде определенной суперпозиции по $|\nu_g>$

$$\Psi'(t) = \Sigma_\nu \, |\nu_g> e^{-iE_{g\nu}(t-t_0)} <\nu_g|\Psi(t_0)> \, , \tag{2.10}$$

если $\Psi(t_0) \epsilon S_g$ Действие же $\exp(-iH_g(t-t_0))$ на вектор из S_0, например, вряд ли может быть определено достаточно строго математически. Спектральное представление (2.9) годится только в S_g. Действительно, если допустить, что аналогичное представление для H_g применимо в S_0, то при $\Psi^0 \epsilon S_0$

$$H_g \Psi^0 = \Sigma_\nu |\nu_g> E_{g\nu} <\nu_g|\Psi^0> = 0 ,$$

поскольку $<\nu_g|\Psi^0> = 0$. Однако непосредственное вычисление показывает, что $H_g\Psi^0$ не равно нулю (как и $H_0\Psi^g$).

Математические трудности определения $\exp(-iH_g t)$ в S_0 характеризуются тем фактом, что уже норма вектора $H_g\Psi^0$ оказывается бесконечной (в рассматриваемой модели этот результат нетрудно получить непосредственным вычислением, для более общего случая он был доказан в [17]). Литературу по этому вопросу см. в [18] и [19].

Особые трудности в этом смысле представляет оператор эволюции $U(t,t_0)$ в картине взаимодействия. Соотношению (2.10) в этой картине соответствует (см.(11,144)в [2])

$$\Psi'_{B3}(t) = U(t,t_0)\Psi_{B3}(t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH_g(t-t_0)} e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} \Psi_{шр}(t_0) . \tag{2.11}$$

Если $\Psi_{шр}(t_0) \epsilon S_g$, то неясно, как определить $\Psi_{B3}(t_0) = e^{iH_0 t}\Psi_{шр}(t_0)$. Если же $\Psi_{шр}(t_0) \epsilon S_0$, то как определить $\exp[-iH_g(t-t_0)]\Psi_{шр}(t_0)$? Тем не менее, существует известный формальный рецепт вычисления для случая, когда $U(t,t_0)$ действует на вектора из S_0. Пользуются выражением $U(t,t_0)$ через операторы, рождающие и уничтожающие именно "голые" частицы. Возникающие бесконечности можно удалять процедурой перенормировки при условии, что $t = \infty$, $t_0 = -\infty$. Любопытен модельный пример [20], когда эта программа проводится до конца и дает тот же результат, что и аппарат, использующий "одетые" частицы.

§ 3. Определение амплитуд Фока

При корректном решении задач модели, когда в качестве начальных берутся физические (одетые) состояния, оказывается, что мезоны на самом деле с источниками не взаимодействуют, см.[2], гл. 12; [6], гл. 9. Может показаться, что этому противоречит факт ортогональности S_0 и S_g. Действительно, означает ли эта ортогональность, что у волновой функции мезона, рассеивающегося на источнике, равны нулю все коэффициенты ее разложения по плоским волнам $\exp i(kx)$, т.е. волновым функциям свободного мезона ? Такую полную несравнимость этих функций трудно себе представить.

Просматривая соответствующие выкладки Ван Хова[1], можно убедиться, что ортогональность при разных g вытекает из ортогональности вакуумных векторов. Напомним, что в этих вакуумных состояниях содержатся источники. Поэтому фактически получена ортогональность волновых функций источников-нуклонов с разными "зарядами" g (или разной силой взаимодействия с мезонами). Обычно ортогональность волновых функций частиц разного рода постулируется отдельно, в данной же модели она получается автоматически, хотя "нуклоны" модели могут и не отличаться так резко, как, скажем, протон и нейтрон. Это соображение подсказывает, что для сравнения поведения мезонов при разных g надо суметь описать только одни мезоны, не описывая нуклонов- источников (но и не выбрасывая, конечно, факта наличия взаимодействия).

Напомним еще, что до сих пор состояния описывались векторами вида (1.12), которые не могут иметь смысла амплитуд вероятности.

Нужное нам описание может быть построено в терминах соответственно определенных амплитуд Фока. При каждом g определим их соотношениями

$$(\Omega_g, a_g(k_1)\dots a_g(k_n)\Psi^g(t)) = \Phi(k_1,\dots k_n; t);$$
$$(\Omega_g, u_g(x_1)\dots u_g(x_n)\Psi^g(t)) = F(x_1,\dots x_n; t), \quad \Psi^g(t)\in S_g \tag{3.1}$$

соответственно в импульсном и координатном представлениях. Фактически вместо $\Psi^g(t)$ вводятся коэффициенты разложения его по системе векторов (1.12) с тем же g. Именно эти коэффициенты имеют смысл амплитуды вероятности. В частности, одночастичное состояние (1.19) имеет лишь одну неравную нулю Фоковскую амплитуду

$$(\Omega_g, a_g(k_1)\Psi^g(k)) = (\Omega_g, a_g(k_1)a_g^+(k)\Omega_g) = \delta(k_1-k), \tag{3.2}$$

$$(\Omega_g, u_g(x)\Psi^g(k)) = e^{ikx}(\Omega_g, \Omega_g) = e^{ikx}. \tag{3.3}$$

Эта амплитуда не зависит от g. В рассматриваемой модели вообще все Фоковские амплитуды стационарных состояний (1.12) совпадают со свободными – мезоны с источниками на самом деле не взаимодействуют, ср. (1.6).

Можно также переписать теорию в терминах таких функций Грина

$$(\Omega_g, u_g(x_2, t_2)u_g(x_1, t_1)\Omega_g), \quad t_2 > t_1. \tag{3.4}$$

В этом определении мы употребляем не только физический вакуум, но и "одетые" операторы (свои для каждого g). Последнее отличает эти функции от обычных, см., например, (17.16) в [2].

Амплитуды (3.1) подчиняются системе уравнений типа Фока-Тамма-Данкова[x]. Она получается умножением уравнения Шредингера $i\partial\Psi^g/\partial t = H_g\Psi^g$ слева на $\langle\Omega_g | a_g(k_1)\dots a_g(k_n)$. В нашей модели система будет незацепляющейся

$$i\partial\Phi(k_1,\dots k_n;t)/\partial t = (\epsilon_{k_1} + \dots + \epsilon_{k_n})\Phi(k_1,\dots k_n;t). \tag{3.5}$$

З а к л ю ч е н и е

Основные выводы работы: 1) В случае локального взаимодействия имеются математические основания для введения "одетых" операторов.

2) При каждом значении константы связи g существует представление "одетых" операторов с вакуумным вектором, но эти вектора при разных g лежат в ортогональных пространствах. Нет необходимости вводить неканонические представления.

3) "Одетые" операторы могут быть выражены через "голые" с помощью унитарного преобразования (связывающего вышеупомянутые ортогональные пространства).

4) Уравнения Фока-Тамма-Данкова представляют собой удобный аппарат для решения физических задач в теории с точечным источником. Однако входящие в них ампли-

x/ Отличие от нового метода Тамма-Данкова заключается в употреблении в определениях (3.1) "одетых" операторов, а не "голых", а от старого, кроме того, и в употреблении физического вакуума [21]. Интересно отметить, что использование амплитуд типа (3.1) в модели Ван Хова-Рюижгрока позволило избежать расходимостей, проявляющихся при обычном подходе с "голыми" операторами, см. [22], стр. 211.

туды Фока должны быть определены надлежащим образом.

Можно думать, что в основном эти выводы будет действительны и для более сложных моделей, таких, как модель Ли, Рюижгрока - Ван-Хова и др. (см. [2], гл. 12). Однако проведение такой же программы для этих моделей встретит значительные трудности. Прежде всего отметим, что в этих моделях физический вакуум уже не содержит источников (и совпадает с вакуумом H_0) и центр тяжести работы переносится на нахождение "одетых" состояний с одним нуклоном. Все точные решения, известные в этих моделях, являются разложениями по собственным векторам H_0 , т.е. они годятся только для случая нелокальных взаимодействий. Необходимо уметь находить точные решения и в случае точечного взаимодействия прежде чем начать исследование, аналогичное изложенному.

Последующие этапы, по-видимому, останутся теми же: определение "одетых" состояний и операторов, обоснование выбора канонического представления для них, определение амплитуд Фока и т.д. Возникнут новые задачи типа построения корректной теории возмущений (например, для уравнений Фока - Тамма-Данкова).

Приношу благодарность Ф.А. Березину, О.М. Завьялову, Б.М. Степанову и А.С. Шварцу за полезные консультации.

Литература

1. L.Van Hove. Physica, 18 , 145 (1952).
2. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, Москва, 1963.
3. R.Haag, Dan. Mat. Fys. Medd. 29, n.12 (1955).
4. И. Фон Нейман. Математические основы квантовой механики. "Наука", Москва, 1964, гл. II.
5. O.W.Greenberg, S.S.Schweber. Nuovo Cim., 8, 378 (1958).
6. Э. Хенли. В Тирринг. Элементарная квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1963.
7. L.Van Hove. Physica, 21, 901 (1955); Physica 22, 343 (1956).
8. H.Ekstein. Phys. Rev., 101, 880 (1956); Nuovo Cim. 4, 1017 (1956).
9. K.O.Friedrichs. Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, New York, 1953.
10. A.S.Wightman, S.S.Schweber. Phys. Rev., 98, 812 (1955).
11. A.S.Wightman, Introduction to some Aspects of the Relativistic Dynamics of Quantized Fields. French Summer School of Theor. Phys., Corsica, 1964, Lectures.
12. J.T.Lopuszanski. Acta Phys. Hungar., 19, 29 (1965).
13. S.Albertoni, F.Duimio. Nuovo Cim., 6, 1193 (1957).
14. J.Von Neumann. Compositio Mathematica, 6, 1 (1938).
15. H.Araki, E.J.Woods. Journ. Math. Phys. 4, 640 (1963).

16. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ГИТТЛ, Москва, 1947, § 7.

17. L.Van Hove. Acad. Roy. de Belgique, Bulletin, 37, 1055 (1951).

18. D.Shale., Journ. Math. Phys. 3, 915 (1962).

19. Ф.А. Березин. Метод вторичного квантования. "Наука", Москва, 1965.

20. H.Gelman, K.Haller. Journ. Math. Phys. 6, 1653 (1965).

21. В.П. Силин, В.Я. Фейнберг. УФН, 56, 569 (1955).

22. Th.W.Ruijgrok. Physica, 24, 205 (1958); 25, 357 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1966 г.