ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2699

В. Лелек

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ К РАСЧЕТАМ ГЕТЕРОГЕННОГО ЯДРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P-2699

В. Лелек

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ К РАСЧЕТАМ ГЕТЕРОГЕННОГО ЯДРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Метод ложных источников

Расчет гетерогенного ядра для нитевидного источника в цилиндре с замедлителем встречается с трудностями, возникающими из-за того, что в конечной среде невозможно пользоваться Фурье-преобразованием уравнения /1/ , которое описывает гетерогенный реактор:

$$D\Delta N(r,\phi)-\frac{D}{L^2}N(r,\phi)+\eta\gamma\sum_k W(r,\phi|r_k,\phi_k)N(r_k,\phi_k)-\gamma\sum_k\frac{1}{r}\delta(r-r_k)\times$$
$$\delta(\phi-\phi_k)N(r_k,\phi_k)=0, \tag{1.1}$$

где N – плотность нейтронов,

D – коэффициент диффузии,

$W(r,\phi|r_k,\phi_k)$ – вероятность того, что нейтрон, родившийся в т. (r_k,ϕ_k), станет тепловым в т. (r,ϕ),

γ – тепловая постоянная,

(r_k,ϕ_k) – координаты стержней,

$N(r_k,\phi_k)$ – плотность нейтронов в стержне.

Трудности имеются и потому, что выражение для вероятности замедления $W(r,\phi|r_k,\phi_k)$ довольно сложное. Решение разделим на две части. В первой рассчитаем вероятность замедления w, во второй – гетерогенное ядро.

А. Расчет вероятности замедления

Для нитевидного источника в бесконечной среде с возрастом τ вероятность замедления дается соотношением

$$W(r,\phi|r_k,\phi_k)=\frac{1}{4\pi\tau}\exp\{[-r^2-r_k^2+2rr_k\cos(\phi-\phi_k)]/4\tau\}, \tag{1.2}$$

как решение уравнения Ферми

$$\Delta W(r,\phi|r_k,\phi_k)=\frac{\partial}{\partial\tau}W(r,\phi|r_k,\phi_k), \tag{1.2a}$$

или выражением

$$W(r,\phi|r_k,\phi_k) = \frac{1}{2r} K_0\left[\sqrt{\frac{r^2 + r_k^2 - 2rr_k\cos(\phi-\phi_k)}{r}}\right], \qquad (1.3)$$

если для описания замедления будем пользоваться упрощенным уравнением

$$-r\Delta W(r,\phi|r_k,\phi_k) + W(r,\phi|r_k,\phi_k) = \frac{1}{r}\delta(r-r_k)\delta(\phi-\phi_k). \qquad (1.3а)$$

Для конечной среды (цилиндра с радиусом R), у которой начало координат помещено в центре, должно быть выполнено условие

$$W_k(R,\phi|r_k,\phi_k) = 0. \qquad (1.4)$$

Условие (1.4) должно быть выполнено для всех ϕ. W_k – является вероятностью замедления в конечной среде, а (r_k,ϕ_k) – координаты источника.

Для выполнения условия (1.4) решим уравнения (1.2а) или (1.3а) в бесконечной среде, поместив на расстоянии $r_k^* > R$ ложные источники с плотностью $\theta(\phi_k^*)$. Плотность ложных источников определим из условия (1.4), которое будет интегральным уравнением Фредгольма первого рода для функций $\theta(\phi_k^*)$

$$W(R,\phi|r_k,\phi_k) + \int_0^{2\pi} W(R,\phi|r_k^*,\phi_k^*)\theta(\phi_k^*)\,d\phi_k^* = 0. \qquad (1.5)$$

Если речь идет о границе с другой средой, должны быть выполнены следующие условия (величины, относящиеся к среде внутри цилиндра, означаем индексом 1 и снаружи -2):

$$a_{12} W_{1k}(R,\phi|r_k,\phi_k) = W_{2k}(r,\phi|r_k\phi_k) \qquad (1.6а)$$

$$b_{12}\frac{\partial}{\partial r} W_{1k}(r,\phi|r_k,\phi_k)|_R = \frac{\partial}{\partial r} W_{2k}(r,\phi|r_k,\phi_k)|_R. \qquad (1.6в)$$

Для удовлетворения условий (1.6) будем поступать аналогично предыдущему случаю. Представим себе две бесконечные среды из вещества 1 и 2, для вероятностей замедления которых выполняются соотношения (1.6). Для этого поместим в среду 1 на расстояние $r_{1k}^* \gtrless R$ ложные источники с плотностью $\theta_1(\phi)$ и в среду 2 на расстояние $r_{2k}^* < R$ с плотностью $\theta_2(\phi)$. Плотности ложных источников определим из условий (1.6), которые будут иметь форму системы двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода для функций θ_1 и θ_2.

$$a_{12}W_1(R,\phi|r_k,\phi_k) + a_{12}\int_0^{2\pi} W_1(R,\phi|r_{1k}^*,\phi_{1k}^*)\theta_1(\phi_{1k}^*)\,d\phi_{1k}^* = \int_0^{2\pi} W_2(R,\phi|r_{2k}^*\phi_{2k}^*)\theta_2(\phi_{2k}^*)\,d\phi_{2k}^* \qquad (1.7а)$$

$$b_{12}\frac{\partial}{\partial r}W_1(r,\phi|r_k,\phi_k)|_R+b_{12}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}W_1(r,\phi|r^*_{1k},\phi^*_{1k})|_R\,\theta_1(\phi^*_{1k})d\phi^*_{1k}=$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}W_2(r,\phi|r^*_{2k},\phi^*_{2k})\theta_2(\phi^*_{2k})d\phi^*_{2k}\ . \qquad (1.7в)$$

Аналитическое решение уравнений (1.5) и (1.7) в случае вероятности замедления в форме (1.2) получить не удалось, ограничимся упрощенным решением для случая (1.3).

Используя формулы разложения для функций Бесселя [2]

$$K_0\left[\sqrt{\frac{r^2+r_k^2-2rr_k\cos(\phi-\phi_k)}{\tau}}\right]=\begin{cases} I_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)K_0\left(\frac{r_k}{\sqrt{\tau}}\right)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)K_n\left(\frac{r_k}{\sqrt{\tau}}\right)\cos(\phi-\phi_k);\ r<r_k \\ I_0\left(\frac{r_k}{\sqrt{\tau}}\right)K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)K_n\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)\cos(\phi-\phi_k);\ r>r_k \end{cases}$$

в уравнении (1.5), сразу получаем коэффициенты Фурье-функций $\theta(\phi)$.

Если обозначим

$$C_n=\int_0^{2\pi}\theta(\phi)\cos n\phi\,d\phi\ ,\quad S_n=\int_0^{2\pi}\theta(\phi)\sin n\phi\,d\phi\ ,$$

то

$$\left.\begin{matrix}C_n\\ S_n\end{matrix}\right\}=\frac{K_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau}}\right)}{I_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau}}\right)}\cdot\frac{I_n\left(\frac{r_k}{\sqrt{\tau}}\right)}{\left(K_n\left(\frac{r_k^*}{\sqrt{\tau}}\right)\right.}\begin{cases}\cos n\phi_k\\ \sin n\phi_k\end{cases}\ .$$

Хотя окончательное решение не зависит от выбора (r_k,ϕ_k) , оказывается, что ряд Фурье-функций $\theta(\phi)$ сходится только для $r_k^*\in(R,\frac{R^2}{r_k})$.

Используя те же формулы для функций Бесселя, исключаем из уравнений (1.7) коэффициенты Фурье-функций $\theta_1(\phi)$ и $\theta_2(\phi)$. В качестве примера приводим их значения для $\theta_2(\phi)$

$$\left.\begin{matrix}C_{2n}\\ S_{2n}\end{matrix}\right\}=a_{12}b_{12}\frac{\tau_2}{\tau_1^{3/2}}\,\frac{K_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)I_n'\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)-I_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)K_n'\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)}{\frac{a_{12}}{\sqrt{\tau_2}}I_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)K_n'\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_2}}\right)-\frac{b_{12}}{\sqrt{\tau_1}}K_n\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_2}}\right)I_n'\left(\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}\right)}\cdot\frac{I_n\left(\frac{r_k}{\sqrt{\tau_1}}\right)}{I_n\left(\frac{r_k^*}{\sqrt{\tau_2}}\right)}\begin{cases}\cos n\phi_k\\ \sin n\phi_k\end{cases} \qquad (1.9)$$

B. Расчет гетерогенного ядра

Гетерогенное ядро будем опять рассчитывать введением новых ложных источников (в данном случае тепловых нейтронов) с плотностью $\Theta(\phi)$, которую определим из условий для плотности нейтронов на границе. Замечаем, что из определения гетерогенного ядра $H(r,\phi|r_k,\phi_k)$

$$N(r,\phi)=\sum_k H(r,\phi|r_k,\phi_k)N(r_k,\phi_k)$$

вытекает, что гетерогенное ядро должно удовлетворять тем же самым условиям на границе, что и плотность нейтронов. Источники помещаем на тех же самых расстояниях, что и $\theta(\phi)$. Для случая цилиндра, который граничит с вакуумом, гетерогенное ядро имеет форму:

$$H_k(r,\phi|r_k,\phi_k) = H(r,\phi|r_k,\phi_k) + \int_0^{2\pi} H_w(r,\phi|r_k^*,\phi_k^*)\theta(\phi_k^*)d\phi_k^* +$$
$$+ \frac{\gamma}{2\pi D}\int_0^{2\pi} K_0\left[\sqrt{\frac{r^2+r_k^{*2}-2rr_k^*\cos(\phi-\phi_k^*)}{L^2}}\right]\Theta(\phi_k^*)\,d\phi_k^* \quad , \tag{1.10}$$

где H_w означает ту часть ядра H (для бесконечной среды), которая возникает как Фурье-образ вероятности замедления, $\Theta(\phi)$ получим из условия

$$H_k(R,\phi|r_k,\phi_k) = 0, \tag{1.11}$$

которое решается аналогично (1.5). Условие для сходимости ряда Фурье-функции $\Theta(\phi)$ то же самое.

Для источника в цилиндре, который помещен в другую бесконечную среду, решение аналогично. Вводим плотности ложных источников $\Theta_1(\phi)$ и $\Theta_2(\phi)$, помещенных на том же расстоянии, что и $\theta_1(\phi)$ и $\theta_2(\phi)$. С их помощью напишем гетерогенные ядра и из условий непрерывности на границе

$$H_{1k}(R,\phi|r_k,\phi_k) = H_{2k}(R,\phi|r_k,\phi_k) \tag{1.12а}$$

$$p_{12}\frac{\partial}{\partial r}H_{1k}(r,\phi|r_k,\phi_k)\Big|_R = \frac{\partial}{\partial r}H_{2k}(R,\phi|r_k,\phi_k)\Big|_R \tag{1.12в}$$

определим Фурье-коэффициенты функций $\Theta_1(\phi)$ и $\Theta_2(\phi)$. Если обозначить $\mathcal{C}_{2n} = \int_0^{2\pi}\Theta_2(\phi)\cos n\phi\, d\phi$, то

$$\mathcal{C}_{2n} = \frac{p_{12}h_1}{m_2L_1}\frac{K_n(\frac{R}{L_1})I_n'(\frac{R}{L_1}) - K_n'(\frac{R}{L_1})I_n(\frac{R}{L_1})}{\frac{1}{L_2}I_n(\frac{R}{L_1})K_n'(\frac{R}{L_2}) - \frac{p_{12}}{L_1}I_n'(\frac{R}{L_1})K_n(\frac{R}{L_2})}\cdot\frac{I_n(\frac{r_k}{L_1})}{I_n(\frac{r_{2k}^*}{L_2})}\cos n\phi_k +$$

$$+\frac{p_{12}k_1}{m_2}\frac{\frac{1}{L_1}K_n(\frac{R}{\sqrt{r_1}})I_n'(\frac{R}{L_1}) - \frac{1}{\sqrt{r_1}}K_n'(\frac{R}{\sqrt{r_1}})I_n(\frac{R}{L_1})}{\frac{1}{L_2}I_n(\frac{R}{L_1})K_n'(\frac{R}{L_2}) - \frac{p_{12}}{L_1}I_n'(\frac{R}{L_1})K_n(\frac{R}{L_2})}\cdot\frac{I_n(\frac{r_k}{L_1})}{I_n(\frac{r_{2k}^*}{L_2})}\cos n\phi_k -$$

$$-\frac{p_{12}k_1}{m_2}\frac{\frac{1}{\sqrt{r_1}}I_n(\frac{R}{L_1})I_n'(\frac{R}{\sqrt{r_1}}) - \frac{1}{L_1}I_n'(\frac{R}{L_1})I_n(\frac{R}{\sqrt{r_1}})}{\frac{1}{L_2}I_n(\frac{R}{L_1})K_n'(\frac{R}{L_2}) - \frac{p_{12}}{L_1}I_n'(\frac{R}{L_1})K_n(\frac{R}{L_2})}\cdot\frac{K_n(\frac{r_{1k}^*}{\sqrt{r_1}})}{I_n(\frac{r_{2k}^*}{L_2})}C_{1n} + \tag{1.13}$$

$$+\frac{k_2}{m_2}\frac{\frac{1}{L_2}I_n\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n'\left(\frac{R}{L_2}\right)-\frac{p_{12}}{L_1}I_n'\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n\left(\frac{R}{L_2}\right)}{\frac{1}{L_2}I_n\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n'\left(\frac{R}{L_2}\right)-\frac{p_{12}}{L_1}I_n'\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n\left(\frac{R}{L_2}\right)}C_{2n}-$$

$$-\frac{k_2}{m_2}\frac{\frac{1}{\sqrt{r_2}}I_n\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n'\left(\frac{R}{\sqrt{r_2}}\right)-\frac{p_{12}}{L_1}I_n'\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n\left(\frac{R}{\sqrt{r_2}}\right)}{\frac{1}{L_2}I_n\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n'\left(\frac{R}{L_2}\right)-\frac{p_{12}}{L_1}I_n'\left(\frac{R}{L_1}\right)K_n\left(\frac{R}{L_2}\right)}\cdot\frac{I_n\left(\frac{r_{2k}^*}{\sqrt{r_2}}\right)}{I_n\left(\frac{r_{2k}^*}{L_2}\right)}\mathcal{C}_{2n}\;;$$

где

$$k_i=-\frac{1}{2\pi D_i}\frac{L_i^2\eta}{L_i^2-r_i}\;;\quad m_i=-\frac{1}{2\pi D_i}\;;\; h_i=\frac{1}{2\pi D_i}\frac{L_i^2(\eta-1)+r_i}{L_i^2-r_i}\;;\; p_{12}=\frac{D_1}{D_2}\;;$$

$$i=1,2\,.$$

Можно просто показать, что ядра H_{1k} и H_{2k} не зависят от выбора положения ложных источников, как можно было ожидать. Приводим еще выражение для H_{2k}

$$H_{2k}(r,\phi|r_k,\phi_k)=\int_0^{2\pi}H_{2w}(r,\phi|r_{2k}^*,\phi_{2k}^*)\theta_2(\phi_{2k}^*)d\phi_{2k}^*+$$
$$+\frac{\gamma}{2\pi D}\int_0^{2\pi}K_0\left[\sqrt{\frac{r^2+r_{2k}^{*2}-2rr_{2k}^*\cos(\phi-\phi_{2k}^*)}{L_2^2}}\right]\Theta_2(\phi_{2k}^*)d\phi_{2k}^*\,. \tag{1.14}$$

2. Применение полученных результатов к стержням, обтекаемым теплоносителем

Метод расчета для двух сред можно просто применить к расчету влияния теплоносителя на параметры реактора. Если источник нейтронов находится в центре цилиндра, из соображений симметрии очевидно, что только коэффициенты C_{20} и $\mathcal{C}_{20}$ будут ненулевыми для источников θ_2 и Θ_2.

Из формы гетерогенного ядра H_{2k} ясно, что для бесконечной среды с источником в центре и эффективными константами η_{ef} и γ_{ef} (которые определяются из уравнений)

$$\eta_{ef}\gamma_{ef}=\eta\gamma\cdot\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}W(r,\phi|r_{2k}^*,\phi_{2k}^*)\theta_2(\phi_{2k}^*)d\phi_{2k}^*d\phi}{2\pi W(r,0|0,0)}\,, \tag{2.1}$$

$$\gamma_{ef}=\gamma\int_0^{2\pi}\bar{\Theta}_2(\phi)d\phi \tag{2.2}$$

решение в области $r>R$ то же самое, что и в случае двух сред с реальными константами. $\bar{\Theta}_{2_{2\pi}}$ в соотношении (2.2) получается из Θ_2 вычитанием членов, которые в выражении $\int_0^{2\pi}K_0\left[\sqrt{\frac{r^2+r_{2k}^{*2}-2rr_{2k}^*\cos(\phi-\phi_{2k}^*)}{L_2^2}}\right]\Theta_2(\phi_{2k}^*)d\phi_{2k}^*$ зависят от r_{2k}^*. Эти члены, как и должно быть, сокращаются с членами, которые возникают из выражения $\int_0^{2\pi}H_{2w}\theta_2\,d\phi$. В выражении для $\mathcal{C}_{2n}$ это четвертый член.

В случае пучка стержней можно применить соотношения (2.1) и (2.2), но надо провести суммирование по всем стержням, которое для определенного размещения стержней в пучке можно заменить интегрированием. Применение формул (2.1) и (2.2) имеет серьезное ограничение: в них не учтено влияние остальных стержней. Для бесконечной решетки получается для θ и Θ также система интегральных уравнений Фредгольма, однако получить ее решение аналитически не удалось. Для конечного числа стержней n получается система $2n$ связанных интегральных уравнений для плотностей источников.

Влияние остальных стержней можно учесть по методу эквивалентной ячейки, то есть решая проблему стержня с охладителем в цилиндрической ячейке с условием $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$ на окраине ячейки. В конечном реакторе можно потом пользоваться результатами работ /3/ и /4/ для введения поправок, возникающих из-за непостоянства градиента потока в стержне.

3. Заключение

Метод ложных источников является по сути добавлением к решению для бесконечной среды решения гомогенного уравнения в соответствующей области, которое представляется как добавочный источник. Ясно, что метод упрощает математическую трактовку результатов.

Думаем, что численный расчет η_{ef} и γ_{ef} имеет смысл только для конкретной задачи и потому в работе он не проводился.

Ясно, что введение величин η_{ef} и γ_{ef}, при помощи которых проблема расчета реактора со стержнями и теплоносителем сводится уже к хорошо разработанной теории реактора с нитевидными стержнями, сильно упрощает задачу.

Литература

1. А.Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. Москва, 1959, Атомиздат.

2. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Москва, 1962, ГИФМЛ.

3. А.Д. Галанин. Атомная энергия 9, 89 (1960).

4. А.Д. Галанин, Б.П. Кочуров. Атомная энергия 15, 107 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1966 г.