17/VI

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2697

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.А. Хелашвили

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ

1966

Р-2697

4273/1 кр

А.А. Хелашвили

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ

В предыдущей работе [1] была рассмотрена задача рассеяния двухчастичной связанной системы на силовом центре. Мы показали, что такая задача сводится к многоканальной двухчастичной задаче рассеяния центра инерции составной системы на некотором "обобщенном" потенциале, зависящем от внутреннего движения составной системы.

Было дано общее определение этого потенциала, на основе которого мы построили его в явном виде для частного случая юкавских потенциалов.

Это выражение "обобщенного" потенциала выглядит следующим образом:

$$W_{\beta a}(\vec{p}\,'-\vec{p}) = W_{n\ell' m', n\ell m}(\vec{p}\,'-\vec{p}) =$$

$$= \sum_{\ell_2 m_2} B^{\ell\ell_2\ell'}_{m m_2 m'} Y_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec{p}\,'-\vec{p}}{|\vec{p}\,'-\vec{p}|}\right) \int_{\lambda_{\beta a}}^{\infty} G^{nn'}_{\ell\ell_2\ell'}(\lambda) \frac{|\vec{p}\,'-\vec{p}|^{\ell_2}}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\lambda^2} \left[(-1)^{\ell_2} V_1((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)+V_2((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)\right],$$

$$|\ell-\ell'| \le \ell_2 \le \ell+\ell', \tag{1}$$

где V_i – потенциалы взаимодействия частиц с внешним полем. (Относительно других обозначений см. работу [1]).

Как мы видим из (1), потенциалы – довольно сложные функции, поскольку кроме $(\vec{p}\,'-\vec{p})^2$ зависят также от направления вектора $\vec{p}\,'-\vec{p}$.

Сначала мы рассмотрим простейший случай, когда в связанной системе имеется только один уровень ($n=n'=1$, $\ell=\ell'=0$). Тогда задача заметно упрощается и сводится к одноканальному рассеянию частицы на потенциале

$$W_{00}(\vec{p}\,'-\vec{p}) = W_{00}((p'-p)^2) = \mathrm{const}\int_{\lambda_0}^{\infty} G_0(\lambda)\frac{d\lambda}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\lambda^2}\left[V_1((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)+V_2((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)\right]. \tag{2}$$

В таком случае уравнение для волновой функции имеет вид:

$$(s-\vec{p}^{\,2})F_0(\vec{p})-4m\int d\vec{q}\,W_{00}((\vec{p}-\vec{q})^2)F_0(\vec{q})=0\,. \tag{3}$$

Здесь

$$s=4m(E-\epsilon^0_{12})\,, \tag{4}$$

где E – полная энергия, $\epsilon^0_{12}=-|\epsilon^0_{12}|$ – энергия связи двухчастичной системы, m – масса частиц.

Функция Грина уравнения (3) имеет вид:

$$\mathcal{G}_0(p)=(s+i0-\vec{p}^{\,2})^{-1}=[4m(E+i0-\epsilon^0_{12})-\vec{p}^{\,2}]^{-1}, \tag{5}$$

а соответствующее уравнение Липмана-Швингера для амплитуды рассеяния $T_{00}(\vec{p}\,',\vec{p})$ выглядит следующим образом:

$$T_{00}(\vec{p}\,',\vec{p})=W_{00}((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)-\int d\vec{q}\,W_{00}((\vec{p}\,'-\vec{q})^2)\frac{T_{00}(\vec{q},\vec{p})}{q^2-s-i0}\,. \tag{6}$$

В дальнейшем мы опустим индексы у W и T, что не приведет к недоразумению.

Пусть

$$V_1((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)=V_2((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)=\int\limits_{\mu_0}^{\infty}\frac{\eta(\mu)\,d\mu}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\mu^2}\,, \tag{7}$$

тогда

$$W((\vec{p}\,'-\vec{p})^2)=\int\limits_{\lambda_0}^{\infty}d\lambda\int\limits_{\mu_0}^{\infty}d\mu\,G_0(\lambda)\eta(\mu)\cdot\frac{1}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\mu^2}\cdot\frac{1}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\lambda^2}=$$

$$=\int\limits_{\lambda_0}^{\infty}d\lambda\int\limits_{\mu_0}^{\infty}d\mu\,\frac{G_0(\lambda)\eta(\mu)}{\lambda^2-\mu^2}\left(\frac{1}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\mu^2}-\frac{1}{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2+\lambda^2}\right),$$

$$\lambda_0=4m|\epsilon^0_{12}|\,. \tag{8}$$

В координатном представлении потенциал будет иметь вид:

$$W(r)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda_0}^{\infty}d\lambda\int\limits_{\mu_0}^{\infty}d\mu\,\frac{G_0(\lambda)\eta(\mu)}{\lambda^2-\mu^2}\left[\frac{e^{-\mu r}}{r}-\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right]. \tag{9}$$

§ 1. Аналитические свойства амплитуды по энергии

Изучим теперь аналитические свойства амплитуды на основе уравнения (6). Ядром этого уравнения служит выражение:

$$k(\vec{p}\,',\vec{p}\,;s) = \frac{1}{\vec{p}\,'^2 - s - i0}\, W((\vec{p}\,'-\vec{p})^2) = \int e^{i\vec{p}\,'\vec{x}}\, k(\vec{x},\vec{y};s)\, e^{-i\vec{p}\vec{y}}\, d\vec{x}\, d\vec{y}\,, \tag{10}$$

где

$$k(\vec{x},\vec{y};s) = W(|\vec{y}|)\, \mathcal{G}_0(\vec{x},\vec{y};s), \tag{11}$$

$$\mathcal{G}_0(\vec{x},\vec{y};s) = \frac{1}{4\pi}\, \frac{e^{i\sqrt{s}\,|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,. \tag{12}$$

С помощью (8), (10) и (12) нетрудно убедиться, что ядро $k(\vec{p}\,',\vec{p};s)$ является аналитической функцией от s во всей плоскости s за исключением положительной реальной оси и является равномерно ограниченным в каждой внутренней подобласти при обычном ограничении на передачу импульса

$$0 \le t \le 4\nu_0^2\,, \quad \nu_0 = \min(\mu_0, \lambda_0)\,, \tag{13}$$

где, t – переданный импульс

$$t = (\vec{p}\,' - \vec{p})^2\,. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь норму Шмидта /2/

$$\|K\|^2 = \int d^3p\, d^3p'\, |k(p',p;s)|^2 = \frac{\pi}{|\operatorname{Im}\sqrt{s}\,|} \int d\vec{q}\, |W(\vec{q}^{\,2})|^2\,. \tag{15}$$

Как видно из (8), $W(\vec{q}^{\,2})$ - аналитическая функция по s на реальной оси и ведет себя на бесконечности как $O(q^{-4})$.

Поэтому интеграл от $|W(\vec{q}^{\,2})|^2$ сходится, и выражение (15) конечно, если s не лежит на положительной реальной оси. В этом случае

$$\|K\|^2 < \infty \tag{16}$$

и ядро (10) определяет оператор Шмидта $K(s)$. Заметим, что уравнение (6) можно переписать в операторном виде

$$T(s) = W - \mathcal{G}_0(s)\, W\, T(s) = W - K(s)\, T(s),$$

формальное решение которого записывается так

$$T(s) = [1 + K(s)]^{-1}\, W\,. \tag{17}$$

Воспользуемся теперь важной теоремой, доказанной Лавлесом [3]:

<u>Теорема:</u> Пусть s – комплексный параметр и операторы $K(s)$ удовлетворяют следующим трем условиям:

1) оператор $K(s)$ есть аналитический оператор по s в некоторой связной области D_s;

2) для каждого $s \in D_s$ и некоторого независящего от s конечного числа n, $[K(s)]^n$ есть оператор Шмидта;

3) существует по крайней мере одна точка s_0 в D_s, для которой $|K(s)| < 1$.

Тогда $[1 + K(s)]^{-1}$ есть мероморфный оператор в D_s и вычеты в его полюсах имеют конечный ранг.

Как мы показали выше, ядро $k(\vec{p}\,', \vec{p}; s)$ было аналитической функцией в s-плоскости с разрезом $\mathrm{Re}\, s \geq 0$.

Кроме того, $K(s)$ есть оператор Шмидта. Заметим, что

$$|K| \leq \|K\| .$$

В действительности, I – ограниченный оператор, но не оператор Шмидта, поскольку ядром этого оператора служит δ-функция.

Мы видим, что можем удовлетворить всем требованиям теоремы Лавлеса и поэтому заключаем, что $T(s)$ есть аналитический оператор в комплексной s-плоскости с разрезом вдоль действительной оси,

$$\mathrm{Re}\, s \geq 0 . \tag{18}$$

Кроме того, $T(s)$ может иметь полюса на отрицательной вещественной оси, что соответствует связанным состояниям двухчастичной системы с внешним полем. Назовем эту область мероморфности D_s. Поскольку $\|K\|^2 < \infty$, мы могли применить к уравнению Липмана–Швингера метод Фредгольма и пришли бы к тем же самым результатам.

Вспоминая теперь (4), заключаем, что по полной энергии в амплитуде $T(E)$ разрез начинается в отрицательной области

$$-|\epsilon^0_{12}| \leq E < \infty . \tag{19}$$

В этом сказывается наличие двухчастичного связанного состояния.

На основе вышедоказанных свойств можем написать дисперсионное соотношение по s при фиксированной передаче импульса:

$$T(s,t) = W(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds' \operatorname{Im} T(s',t)}{s'-s-i0} - \sum_i \frac{\Gamma_i(t)}{s+s_i}, \qquad (20)$$

справедливое при $t \le 4\nu_0^2$, где $\nu_0^2 = \min(\mu_0^2, \lambda_0^2)$.

§ 2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния по передаче импульса

Для изучения аналитических свойств амплитуды по передаче будем действовать как в работе /4/. Запишем формально явное решение уравнения (6) в виде:

$$T(\vec{p}', \vec{p}) = W((\vec{p}'-\vec{p})^2) + \int d\vec{q}_1 dq_2 W((p'-q_1)^2) \mathcal{G}(\vec{q}_1^2, \vec{q}_2^2; s) W((\vec{q}_2 - \vec{p})^2), \qquad (21)$$

где $\mathcal{G}(\vec{q}_1^2, \vec{q}_2^2; s)$ – Фурье-образ полной функции Грина. Используя наше представление потенциала (8), находим, что

$$T'(\vec{p}', \vec{p}) = T(\vec{p}', \vec{p}) - W((\vec{p}'-\vec{p})^2)$$

разбивается на четыре типа амплитуд

$\mu\mu-$
$$T'^{\mu\mu}(\vec{p}', \vec{p}) = \int d\vec{q}_1 dq_2 \int_{\mu_0}^\infty d\mu \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda \phi(\mu,\lambda) \int_{\mu_0}^\infty d\mu' \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda' \phi(\mu',\lambda') \times$$
$$\times \frac{\mathcal{G}(\vec{q}_1^2, \vec{q}_2^2; s)}{[(\vec{p}'-\vec{q}_1)^2 + \mu^2][(\vec{q}_2-\vec{p})^2+\mu^2]}, \qquad (22_1)$$

$\left.\begin{array}{l}\mu\lambda- \\ \lambda\mu-\end{array}\right\}$
$$T'^{\mu\lambda}_{\lambda\mu}(\vec{p}', \vec{p}) = \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int_{\mu_0}^\infty d\mu \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda \phi(\mu,\lambda) \int_{\mu_0}^\infty d\mu' \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda' \phi(\mu',\lambda') \frac{\mathcal{G}(\vec{q}_1^2, \vec{q}_2^2; s)}{[(\vec{p}'-\vec{q}_1)^2 + \mu^2][(\vec{q}_2-\vec{p})^2+\lambda^2]}, \qquad (22_2)$$

$\lambda\lambda$
$$T^{\lambda\lambda}(\vec{p}', \vec{p}) = \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int_{\mu_0}^\infty d\mu \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda \phi(\mu,\lambda) \int_{\mu_0}^\infty d\mu' \int_{\lambda_0}^\infty d\lambda' \phi(\mu'\lambda') \frac{\mathcal{G}(\vec{q}_1^2, \vec{q}_2^2; s)}{[(\vec{p}'-\vec{q}_1)^2 + \lambda^2][(\vec{q}_2-\vec{p})^2+\lambda^2]}, \qquad (22_3)$$

где
$$\phi(\mu,\lambda) = \frac{G_0(\lambda)\eta(\mu)}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Для выполнения некоторых интеграций введем полярные координаты Лемана /5/

$$\vec{p} = p(1,0,0)$$

$$\vec{p}' = p(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{q}_j = q_j(\sin\beta_j \cos\alpha_j, \sin\beta_j \sin\alpha_j, \cos\beta_j),$$

где θ – угол рассеяния:

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}'}{p^2} .$$

Вводя новые переменные

$$\chi = a_1 - a_2 , \quad \xi_j = \frac{\mu_j^2 + p^2 + q_j^2}{2pq_j \sin\beta_j} , \quad \zeta_j = \frac{\lambda_j^2 + p^2 + q_j^2}{2pq_j \sin\beta_j} ,$$

можно проводить интеграцию по углам и для амплитуд каждого вида получаем следующее представление:

$$T'^{ij}(s, \cos\theta) = \int_{z_0^{ij}}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\chi \, \frac{w(z, s, \chi)}{z - \cos(\theta - \chi)} , \tag{23}$$

где

$$z_0^{\mu\mu} = 1 + \frac{2\mu_0^2}{p^2} , \quad z_0^{\lambda\lambda} = 1 + \frac{2\lambda_0^2}{p^2} , \quad z_0^{\lambda\mu} = z_0^{\mu\lambda} = \min(z_0^{\lambda\lambda}, z_0^{\mu\mu}) . \tag{24}$$

Иначе говоря, для полной амплитуды мы можем написать представление

$$T'(s, \cos\theta) = \int_{z_0}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\chi \, \frac{w'(z, s, \chi)}{z - \cos(\theta - \chi)} , \tag{25}$$

где

$$z_0 = \min(z_0^{\lambda\lambda}, z_0^{\mu\mu}) . \tag{26}$$

А это означает, что амплитуда T' будет аналитической функцией в комплексной плоскости $\cos\theta$ внутри эллипса Лемана с центром в начале координат, с большой полуосью z_0 и малой полуосью $(z_0^2 - 1)$.

В t – плоскости этому соответствует аналитичность в эллипсе, который пересекает вещественную ось в точках

$$t = 2p^2 (1 - z_0) \qquad \text{и} \qquad t = 2p^2 [1 - (z_0^2 - 1)^{½}] . \tag{27}$$

Поскольку аналогичное представление справедливо и для $T^{*\prime}$, то оно справедливо отдельно для $\mathrm{Re}\,T'$ и $\mathrm{Im}\,T'$.

Такой же результат был получен в работе [6], где рассматривалась задача рассеяния частицы на связанном состоянии. Однако там не удается расширить область аналитичности на всю t –плоскость.

Возможно ли расширение области аналитичности вне эллипса Лемана в нашем статическом случае?

Для выяснения этого вопроса рассмотрим ряд Фредгольма интегрального уравнения [4]. Решение запишем в виде

$$T(\vec{p}',\vec{p}) = W((\vec{p}'-\vec{p})^2) + \int d\vec{q}\,\frac{N(\vec{p}',\vec{q};s)}{D(s)}\,W((\vec{q}-\vec{p})^2)\,, \qquad (28)$$

где N и D – числитель и знаменатель Фредгольма.

Поскольку ядро уравнения (6), как мы убедились выше, квадратично интегрируемо, то ряды N и D равномерно сходятся. В области D_s T –мероморфная от s функция, поэтому знаменатель $D(s)$ может обратиться в нуль только при $\mathrm{Re}\,s<0$. Для вещественных $s>0$ $D(s)$ не обращается в нуль. Кроме того, $D(s)$ не зависит от направлений $\vec{p}'$ и $\vec{p}$ и при доказательстве аналитичности по t она не играет никакой роли.

Рассмотрим поэтому только разложение числителя:

$$N(\vec{p}',\vec{q};s) = \frac{W((\vec{p}'-\vec{q})^2)}{q^2-s-i0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{q^2-s-i0}\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d\vec{k}_i}{\vec{k}_i^2-s-i0}\times$$

$$\begin{vmatrix} W((\vec{p}'-\vec{q})^2), & W((\vec{p}'-\vec{k}_1)^2), & \ldots, & W((\vec{p}'-\vec{k}_n)^2) \\ W((\vec{k}_1-\vec{q})^2), & 0 & ,\ldots, & W((\vec{k}_1-\vec{k}_n)^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W((\vec{k}_n-\vec{q})^2), & W((\vec{k}_n-\vec{k}_1)^2), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} \qquad (29)$$

Рассмотрим n-ый член этого ряда. Он будет содержать некоторый детерминат, общий член которого имеет вид:

$$N_\ell^{(n)}(\vec{p}',\vec{q};s) = \int\prod_{j=1}^{\ell}\frac{d\vec{k}_j}{\vec{k}_j^2-s-i0}\cdot\frac{\Phi_\ell^{(n)}(s)}{q^2-s-i0}\;W((\vec{p}'-\vec{k}_1)^2)W((\vec{k}_1-\vec{k}_2)^2)\ldots W((\vec{k}_{\ell-1}-\vec{k}_\ell)^2)W((\vec{k}_\ell-\vec{q})^2), \qquad (30)$$

где $\ell\le n$, $\Phi_\ell^{(n)}(s)$ функция получается в результате интегрирования по остальным импульсам ($\vec{k}_{\ell+1}$, $\vec{k}_{\ell+2},\ldots,\vec{k}_n$). Подставим теперь представление потенциала (8) в (30) и отделяя интегрирование по dk_j^2 с помощью δ –функции, получаем для вклада в $T(\vec{p}',\vec{p})$ от произвольного слагаемого следующее выражение:

$$T'^{(n)}_\ell(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{\Phi_\ell^{(n)}(s)}{D(s)}\int\prod_{j=1}^{\ell+1}\frac{\tilde\phi(\lambda_j,\mu_j)\,d\lambda_j\,d\mu_j\,\tilde\phi(\lambda_{\ell+2},\mu_{\ell+2})\,d\lambda_{\ell+2}\,d\mu_{\ell+2}}{u_j-s-i0}\,du_j\times$$

$$\times\int d\vec{k}_1\ldots d\vec{k}_{\ell+1}\,\frac{\delta(k_1^2-u_1)\,\delta(k_2^2-u_2)\ldots\delta(k_{\ell+1}^2-u_{\ell+1})}{[\mu_1^2+(\vec{p}'-\vec{k}_1)^2][\lambda_1^2+(\vec{p}'-\vec{k}_1)^2]\ldots[\mu_{\ell+2}^2+(\vec{k}_{\ell+1}-\vec{p})^2][\lambda_{\ell+2}^2+(\vec{k}_{\ell+1}-\vec{p})^2]}\,. \qquad (31)$$

Здесь
$$\tilde\phi(\lambda_j,\mu_j) = G_0(\lambda_j)\,\eta(\mu_j)\,.$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\frac{1}{[\mu_j^2+(\vec{k}_{j-1}-\vec{k}_j)^2][\lambda_j^2+(\vec{k}_{j-1}-\vec{k}_j)^2]}=\frac{1}{\lambda_j^2-\mu_j^2}\left(\frac{1}{\mu_j^2+(\vec{k}_{j-1}-\vec{k}_j)^2}-\frac{1}{\lambda_j^2+(\vec{k}_{j-1}-\vec{k}_j)^2}\right).$$

Тогда (31) разбивается на ряд членов, произвольный из которых будет иметь вид

$$T'^{(n)}_{\ell(MN)}(\vec{p}\,',\vec{p})=\frac{\Phi^{(n)}_{\ell}(s)}{D(s)}\int\prod_{j=1}^{\ell+1}\frac{\phi(\lambda_j,\mu_j)\,d\lambda_j\,d\mu_j\,\phi(\lambda_{\ell+2},\mu_{\ell+2})d\lambda_{\ell+2}d\mu_{\ell+2}}{u_j-s-i0}\,du_j\times$$

$$\times\int d\vec{k}_1\ldots d\vec{k}_{\ell+1}\frac{\delta(k_1^2-u_1)\delta(k_2^2-u_2)\ldots\delta(k_{\ell+1}^2-u_{\ell+1})}{[\nu_1^2+(\vec{p}\,'-\vec{k}_1)^2][\nu_2^2+(\vec{k}_1-\vec{k}_2)^2]\ldots[\nu_{\ell+1}^2+(\vec{k}_{\ell+1}-\vec{p})^2]}, \tag{32}$$

где ν_j обозначает μ_j или λ_j, причем в этом выражении знаменатели с μ_j встречаются M раз, а с λ_j – N раз.

Воспользуемся теперь формулой Фубини /7/

$$\int d\vec{k}_1\frac{\delta(k_1^2-u_1)}{[\nu_1^2+(\vec{p}\,'-\vec{k}_1)^2][\nu_2^2+(\vec{k}_1-\vec{k}_2)^2]}=\frac{\pi}{2}\int\frac{dt_1}{t_1+(\vec{p}\,'-\vec{k}_2)^2}\frac{\theta(\sqrt{t_1}-\nu_1-\nu_2)\theta(\Delta)}{\sqrt{\Delta}}, \tag{33}$$

где

$$\Delta=\Delta(\nu_1^2,\nu_2^2\,|p'^2u_1u_2|\,t_1)=-\begin{vmatrix} p'^2 & \frac12(\nu_1^2+p'^2+u_1) & \frac12(t_1+p'^2+u_1)\\ \frac12(\nu_1^2+p'^2+u_1) & u_1 & \frac12(\nu_2^2+u_1+u_2)\\ \frac12(t_1+p'^2+u_1) & \frac12(\nu_2+u_1+u_2) & u_2\end{vmatrix},$$

при $u_1=k_1^2,\ u_2=k_2^2$.

Последовательным применением этой формулы получаем

$$T'^{(n)}_{\ell(MN)}(s,t)=\frac{\Phi^{(n)}_{\ell}(s)}{D(s)}\int\prod_{j=1}^{\ell+1}\frac{\phi(\lambda_j,\mu_j)d\lambda_j\,d\mu_j\phi(\lambda_{\ell+2},\mu_{\ell+2})d\lambda_{\ell+2}\,d\mu_{\ell+2}}{u_j-s-i0}\,du_j\times$$

$$\times\int_{t^{(n)}_{o\ell(MN)}}^{\infty}\frac{dt_{\ell+1}}{t_{\ell+1}+t}\,\rho^{(n)}_{\ell(MN)}(t_{\ell+1};s;u_1,\ldots,u_{\ell+1};\nu_1,\ldots,\nu_{\ell+2}), \tag{34}$$

где

$$t^{(n)}_{o\ell(MN)}\geq(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_M+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_N)^2,\ M+N=\ell+2. \tag{35}$$

Чтобы получить спектральное представление, нужно интеграл по $dt_{\ell+1}$ поставить во главе всего выражения. Нетрудно видеть, что такая перестановка законна, и мы получаем

$$T'^{(n)}_{\ell}(s,t) = \int_{t^{(n)}_{0\ell}}^{\infty} \frac{dt'\psi(s,t')}{t'+t}, \tag{36}$$

где

$$t^{(n)}_{0\ell} = \min(t^{(n)}_{0\ell}, MN).$$

Все вышеизложенные рассуждения можно провести и для $T'^{*}_{\ell}(s,t)$. Поэтому спектральное представление (36) справедливо для каждого члена разложения Фредгольма отдельно для мнимой и действительной частей амплитуды. Из (36) видно, что при фиксированном $s>0$ каждый член разложения Фредгольма амплитуды $T'(s,t)$ является аналитической функцией по t, регулярной во всей плоскости t с разрезом вдоль отрицательной вещественной оси от $-\infty$ до $-4\nu_0^2$, где $\nu_0^2 = \min(\lambda_0^2, \mu_0^2)$. Для аналитичности амплитуды $T'(s,t)$ нужно еще доказать равномерную сходимость ряда Фредгольма для любой конечной области t-плоскости без разреза. Это доказательство проводится путем процедуры, изложенной в работе [8]. В результате заключаем, что $T'(s,t)$ является аналитической по t функцией во всей комплексной t-плоскости за исключением разреза

$$(-\infty, -4\nu_0^2), \quad \text{где} \quad \nu_0^2 = \min(\lambda_0^2, \mu_0^2). \tag{37}$$

Заключение

Таким образом, мы показали, что амплитуда $T(s,t)$ является аналитической функцией по s во всей комплексной s-плоскости за исключением разреза $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ и, возможно, полюсов на отрицательной вещественной оси, которые соответствуют связанным состояниям сложной частицы в поле. Эти аналитические свойства можно выразить с помощью дисперсионного соотношения (20) по s при фиксированной передаче t. Кроме того, доказанные в предыдущем параграфе аналитические свойства мнимой части амплитуды по передаче t позволяют продолжить дисперсионное соотношение (20), которое доказано только для вещественных $t < 4\nu_0^2$, на всю разрезанную плоскость t и определить аналитическую функцию двух комплексных переменных s и t, которая будет регулярна в топологическом произведении двух разрезанных плоскостей s и t, исключая при этом, конечно, полюса s_i в плоскости s. Поэтому для амплитуды рассеяния $T(s,t)$ мы будем иметь представление Мандельстама.

В заключение автор приносит свою искреннюю благодарность А.А. Логунову за постановку вопроса, а также проф. А. Н. Тавхелидзе и М.А. Мествиришвили за полезные обсуждения.

Литература

1. А.А. Хелашвили. Препринт ОИЯИ Р-2565, Дубна 1966.
2. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц. "Линейные операторы" (общая теория). ИИЛ, Москва, 1962.
3. C.Lovelace. Three–Particle Systems and Unstable Particles, I, Imperial Colledge Preprint, 1963.
4. R. Blankenbeder et al. Ann. of Phys., 10, 62 (1960). (Перевод в сборнике "Теория сильных взаимодействия при больших энергиях", ИИЛ, Москва, 1963).
5. H.Lehmann. Nuovo Cim., 10, 579 (1958).
6. G. Immirzi.. Nuovo Cim., 34, 1361 (1965).
7. S.Fnbini. "Theoretical Physics", p.365, Vienna, 1963.
8. R. Jost and A.Pais. Phys. Rev., 82, 840 (1951).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1966 г.