С 323.4
О-368

ЯФ, 1966, т. 4, № 6, 28/VI
с. 1231-1247.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 2696

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТЕНЗОРНЫЕ ТОКИ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ SU(6)

1966

Р - 2696

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТЕНЗОРНЫЕ ТОКИ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ SU(6)

1. Введение

Обычные группы внутренней симметрии (изотопическая, $SU(3)$) связаны с сохраняющимися векторными токами. Четвертые компоненты этих токов дают вторично квантованные генераторы. Будучи трехмерными скалярами, они не могут перепутывать разные спиновые состояния полей. Нам хотелось бы подчеркнуть, что преобразования популярной сейчас группы $SU(6)$ [1], для которых характерно спиновое перепутывание, могут порождаться только тензорными токами, но не векторными. В работе построены локальные симметричные тензорные токи: синглет $J_{\mu\nu}$ и октет $J^{a}_{\mu\nu}$ (п.2,3), которые генерируют релятивистские преобразования кварков, 35-, 56- и 189- плетов (п.4,5), совпадающие в системе покоя с преобразованиями $SU(6)$. Эти токи строго сохраняются в силу свободных уравнений движения. Попутно указана связь с часто обсуждаемой в литературе [2] алгеброй токов, среди которых псевдовекторные токи являются по сути дела четвертыми компонентами некоторых сохраняющихся тензорных токов. (п.4).

Теорию со взаимодействием (п.7) можно мыслить как теорию, в которой тензорные токи $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$ служат источниками для полей 2^+ (по аналогии с тем, как сохраняющиеся векторные токи суть источники полей 1^- [3]). Отсюда следует, во-первых, что фундаментальную роль должен играть супермультиплет 189, содержащий именно октет и синглет полей 2^+, - такую же роль, как присоединенные представления (например, октет в $SU(3)$) для полей 1^-. Существенно, что экспериментально найденные резонансы 2^+ образуют как раз октет и синглет: $K^*(1430), T = \frac{1}{2}, Y = \pm 1$; $A_2(1320), T = 1, Y = 0$; $f(1250), f'(1525), T = 0, Y = 0$ [4]. В этой связи важна идентификация остальных состояний из 189-плета [5]. Во-вторых, единый ток - источник обуславливает универсальность взаимодействий с полями 2^+ и, следовательно, жесткую связь между константами взаимодействия всех полей с полями 2^+. В другом аспекте гипотеза об универсальности обсуждалась в [6].

В полученных преобразованиях свободных полей параметры зависят от 4-скорости, и если бы эти преобразования были применимы в теории со взаимодействием, то приводили бы к бесконечно большому числу ограничений на амплитуды и фактически обратили бы их в нуль (п.6). Но они, по-видимому, неприменимы, поскольку построенные токи $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$, сохраняющиеся в свободном случае, перестают сохраняться в случае взаимодействия. Поэтому преобразования и токи нуждаются в модификации : в теории со взаимодействием преобразования и токи должны быть существенно нелинейными. Такая ситуация имеет аналогию в теории тяготения Эйнштейна при трактовке последней с полевой точки зрения [7,8]. Там также тензорный ток (тензор энергии-импульса) существенно нелинейным образом модифицируется взаимодействием [8]. Что касается нелинейности законов преобразования, то теория тяготения тоже дает такой пример (пока в теории поля единственный) – закон преобразовании спиноров, который после включения гравитационного взаимодействия становится бесконечным рядом по гравитационному полю [9].

Пока проблема восстановления истинной теории находится только в начальной стадии. Однако уже сейчас можно высказать некоторые соображения о месте и роли группы $SU(6)$ и о причинах трудностей при ее прямолинейных релятивизациях (п.7).

Истинная теория будет инвариантна относительно новых нелинейных преобразований, но не относительно преобразований $SU(6)$. Только в применении к одночастичным состояниям и к статическим эффектам [1] эта общая группа редуцируется до $SU(6)$, а что касается амплитуд, то она свяжет, вообще говоря, процессы с разным числом частиц. Таким образом, группа $SU(6)$ есть динамическая группа по терминологии Пайса. Стоит отметить, что при модификации токов за счет взаимодействия нейтральный ток, по-видимому, дополнится до тензора энергии-импульса, так что истинная нелинейная группа будет содержать в качестве подгрупп однородную группу Лоренца и группу $SU(3)$.

В Приложении 4 показано, что полученная в свободном случае группа с параметрами, зависящими от 4-скорости, распадается на бесконечное число конечно-параметрических групп, переходящих в $SU(6)$ в системе покоя. В числе таких групп содержатся группа W-спина [10], группа Барнса [11] и другие.

2. Общие замечания о векторных и тензорных токах

Известно, что если теория инвариантна относительно некоторых преобразований, то в ней сохраняются соответствующие токи

$$\partial_\mu J_{\mu\ldots}(x) = 0\,, \tag{1}$$

где точки стоят вместо возможных других индексов. Обратно, если из уравнений движения следует сохранение некоторого тока $J_{\mu\ldots}$ (1), то уравнения движения теории будут инвариантны относительно преобразований всех полей вида

$$f \to f' = e^{-iV} f e^{iV}\,, \tag{2}$$

где

$$V = -i\int d\vec{x}\, J_{4\ldots}(x)\,\omega_{\ldots} \tag{3}$$

генераторы преобразований, в которые включены параметры преобразований $\omega_{\ldots}$. Это очевидно, поскольку V не зависит ни от координат, ни от времени. Генераторы V являются операторами сохраняющихся величин. Например, в случае сохраняющихся векторных токов j_μ генераторы

$$Q = -i\int d\vec{x}\, j_4(x) \tag{4}$$

есть сохраняющиеся операторы электрического заряда, изотопического спина и т.д., порождающие согласно (2) соответствующие преобразования полей. Подчеркнем, что генераторы Q суть трехмерные скаляры, и поэтому они принципиально не могут перепутывать поля с разными спинами.

Поскольку нас интересует группа $SU(6)$, которая включает преобразования с перепутыванием спина, то для нее с необходимостью нужны тензорные токи, как минимум симметричные тензорные токи второго ранга $J_{\mu\nu} = J_{\nu\mu}$. Отметим, что если из уравнений движения следует закон сохранения этого тока

$$\partial_\mu J_{\mu\nu} = 0 , \tag{5}$$

то параллельно будет сохраняться и его "момент"[x/]:

$$J_{\mu,\nu\lambda} = x_\nu J_{\lambda\mu} - x_\lambda J_{\nu\mu} , \tag{6}$$

$$\partial_\mu J_{\mu,\nu\lambda} = 0 . \tag{7}$$

Благодаря этому, в теории с сохраняющимися симметричными тензорными токами существует два типа генераторов, способных изменять спин на 1:

$$V = -\int d\vec{x}\, J_{4\nu}\omega_\nu , \tag{8}$$

$$V = -i\int d\vec{x}\, J_{4,\nu\lambda}\omega_{\nu\lambda} , \tag{9}$$

и соответственно два типа преобразований, если оба эти генератора не обращаются в нуль.

Один пример тока $J_{\mu\nu}$ хорошо известен – это симметричный тензор энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}$, параллельно с которым сохраняется его "момент", $M_{\mu,\nu\lambda} = x_\nu \Theta_{\lambda\mu} - x_\lambda \Theta_{\nu\mu}$ – тензор плотности момента количества движения. Соответствующие преобразования – это сдвиги и четырехмерные вращения.

Мы покажем ниже, что можно найти такие локальные симметричные тензорные токи, которые индуцируют преобразования группы $SU(6)$. Как известно, группа $SU(6)$ хорошо оправдала себя в применении к одночастичным состояниям (классификация по су-

---

[x/] Отметим, что в случае сохранения антисимметричного тензорного тока $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ параллельно будет сохраняться "момент" $J_{\mu,\nu\lambda} = x_\nu J_{\lambda\mu} + x_\lambda J_{\nu\mu}$.

пермультиплетам, статические электромагнитные свойства[1]). Поэтому в качестве первого шага мы обратимся к тензорным токам, сохраняющимся в силу свободных уравнений, оставляя на будущее модификацию этих токов взаимодействием[x/].

Нетрудно построить все возможные сохраняющиеся тензорные токи, составленные из скалярных, спинорных, векторных и тензорных полей (см. Приложение 1)[xx/]. Среди токов есть такие, для которых отличны от нуля оба сорта генераторов: и (8) и (9). Это, например, токи типа тензора энергии-импульса. Для некоторых других токов, наоборот, оба сорта генераторов равны нулю. Нас будет интересовать третий тип токов, у которых генераторы (8) равны нулю, а генераторы (9) отличны от нуля. Для рассматриваемой системы полей выбор таких токов однозначен. Именно эти токи дают релятивистскую группу преобразований одночастичных состояний, которая в системе покоя совпадает с группой SU(6).

3. Сохраняющиеся токи, связанные с SU(6)

Мы будем интересоваться четырьмя представлениями группы SU(6): кварковым, 35, 56 и 189. В соответствии с их содержанием в рассматриваемой релятивистской схеме эти супермультиплеты будут описываться следующими наборами полей.

1) Кварки – дираковским спинором ψ, у которого подразумевается также кварковый индекс.

2) 35-плет: псевдоскалярный и векторный октеты ϕ^a и b^a_μ ($a = 1, \dots 8$) и векторный синглет b_μ. Поля b_μ и b^a_μ подчиняются дополнительному условию (выделяющему спин 1):

$$\partial_\mu b^a_\mu = 0, \quad \partial_\mu b_\mu = 0. \qquad (10)$$

3) 56-плет содержит спинорный октет ψ^a со спином 1/2 и декаплет ψ^{ab}_μ со спином 3/2.

$$\partial_\mu \psi^{ab}_\mu = 0, \quad \gamma_\mu \psi^{ab}_\mu = 0, \qquad (11)$$

$$\psi^{ab}_\mu = -\psi^{ba}_\mu, \quad f_{abc}\psi^{ab}_\mu = 0, \quad (u_{ab})_{cd}\psi^{cd}_\mu = 2i\psi^{ab}_\mu. \qquad (12)$$

---

x/ В отличие от спинорной электродинамики, где взаимодействие не меняет формального выражения для свободного тока, здесь, как и в теории тяготения Эйнштейна, токи претерпят существенную модификацию и станут нелинейными. Однако первый член разложения каждого тока по константе связи формально будет совпадать с выражением для свободного тока. (См. п.7).

xx/ Структуру сохраняющихся тензорных токов, построенных из спиноров, в связи с теорией тяготения анализировали Кобзарев и Окунь[12].

Здесь и ниже мы пользуемся восьмиричным векторным формализмом для SU(3), развитым в [13] (см. также Приложение 2).

4) 189-плет: симметричные тензорные синглет $h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$ и октет $h^{a}_{\mu\nu}=h^{a}_{\nu\mu}$, антисимметричные тензорные октеты $b^{a}_{\mu\nu}=-b^{a}_{\nu\mu}$, $\chi^{a}_{\mu\nu}=-\chi^{a}_{\nu\mu}$ и поле $\xi^{ab}_{\mu\nu}=-\xi^{ab}_{\nu\mu}$, описывающее 10- и 10^{*}-плеты, и, наконец, скалярный 27-плет ϕ^{ab}. Поля подчиняются дополнительным условиям:

$$\partial_\mu h_{\mu\nu}=0,\quad \partial_\mu h^{a}_{\mu\nu}=0,\quad \partial_\mu b^{a}_{\mu\nu}=0,\ \partial_\mu \chi^{a}_{\mu\nu}=0,\ \partial_\mu \xi^{ab}_{\mu\nu}=0, \tag{13}$$

$$\xi^{ab}_{\mu\nu}=-\xi^{ba}_{\mu\nu},\quad f_{abc}\,\xi^{ab}_{\mu\nu}=0,\ \ \phi^{ab}=\phi^{ba},\ d_{abc}\,\phi^{ab}=0. \tag{14}$$

Поля $h_{\mu\nu}$ и $h^{a}_{\mu\nu}$ описывают одновременно спины 2^{+} и 0^{+}, а поля $b^{a}_{\mu\nu}$, $\chi_{\mu\nu}$ и $\xi^{ab}_{\mu\nu}$ – спин 1^{+} x/.

Нас интересуют симметричные тензорные токи: синглет и октет $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$, моменты которых дают генераторы SU(6). Мы сразу приведем для них готовые выражения. Синглетный тензорный ток записывается следующим образом:

$$J_{\mu\nu}=J_{\mu\nu 6}+J_{\mu\nu 35}+J_{\mu\nu 56}+J_{\mu\nu 189}, \tag{15}$$

где

$$J_{\mu\nu 6}(x)=-\frac{i}{16M}\,\partial_\rho\,[\bar\psi(\sigma_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu+\sigma_{\nu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\mu)\psi], \tag{16}$$

$$J_{\mu\nu 35}(x)=\tfrac{1}{4}\partial_\rho\,[b_\rho\overleftrightarrow{\partial}_\mu b_\nu+b^{a}_\rho\overleftrightarrow{\partial}_\mu b^{a}_\nu]+(\mu\nu), \tag{17}$$

$$J_{\mu\nu 56}(x)=-\frac{1}{8m}\,\partial_\rho[\tfrac{1}{2}\bar\psi^{a}\sigma_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi^{a}+3m\bar\psi^{ab}_\rho\gamma_\mu\psi^{ab}_\nu-3m\bar\psi^{ab}_\mu\gamma_\nu\psi^{ab}_\rho+(\mu\nu)], \tag{18}$$

$$J_{\mu\nu 189}(x)=-\tfrac{1}{4}\partial_\rho\,[h_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h_{\rho\lambda}+h^{a}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h^{a}_{\rho\lambda}+b^{a}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu b^{a}_{\rho\lambda}+\chi^{a}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\chi^{a}_{\rho\lambda}+$$
$$+\xi^{ab}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\xi^{ab}_{\rho\lambda}+(\mu\nu)]. \tag{19}$$

---

x/ Вместо полей $b^{a}_{\mu\nu}$, $\chi^{a}_{\mu\nu}$ и $\xi^{a}_{\mu\nu}$ можно было бы использовать векторные поля.

Октетный тензорный ток имеет вид:

$$J^b_{\mu\nu} = J^b_{\mu\nu 6} + J^b_{\mu\nu 35} + J^b_{\mu\nu 56} + J^b_{\mu\nu 189} \quad . \tag{20}$$

где

$$J^b_{\mu\nu 6}(x) = -\frac{i}{16M}\partial_\rho\,[\bar\psi\lambda^b(\sigma_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu + \sigma_{\nu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\mu)\psi] \ , \tag{21}$$

$$J^b_{\mu\nu 35}(x) = \tfrac{1}{4}\partial_\rho\,[d_{abc}\,b^a_\rho\overleftrightarrow{\partial}_\mu b^c_\nu + \sqrt{\tfrac{2}{3}}(b^b_\rho\overleftrightarrow{\partial}_\mu b_\nu + b_\rho\overleftrightarrow{\partial}_\mu b^b_\nu) + \tag{22}$$

$$+ \frac{i}{2\mu} f_{abc}\,\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\,\phi^a\overleftrightarrow{\partial}_\nu\overleftrightarrow{\partial}_\sigma b^c_\tau + (\mu\nu)] \ ,$$

$$J^b_{\mu\nu 56}(x) = \frac{1}{4m}\partial_\rho[-\tfrac{1}{2}(id_{abc} + \tfrac{2}{3} f_{abc})\bar\psi^a\sigma_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi^c + 6md_{abc}(\bar\psi^{ad}_\mu\gamma_\nu\psi^{cd}_\rho - \bar\psi^{ad}_\rho\gamma_\nu\psi^{cd}_\mu) +$$

$$+ \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}(\bar\psi^a\gamma_\nu\overleftrightarrow{\partial}_\sigma\psi^{ab}_\tau - \bar\psi^{ab}_\tau\gamma_\nu\overleftrightarrow{\partial}_\sigma\psi^a) + (\mu\nu)] \ , \tag{23}$$

$$J^b_{\mu\nu 189}(x) = \frac{1}{12}\partial_\rho\,\{-\sqrt{6}\,h_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu(h^b_{\rho\lambda} - \sqrt{3}\,b^b_{\rho\lambda}) - \sqrt{6}(h^b_{\mu\lambda} - \sqrt{3}\,b^b_{\mu\lambda})\overleftrightarrow{\partial}_\nu h_{\rho\lambda} - 2\sqrt{6}\,b^a_{\rho\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\phi^{ab} +$$

$$+ (\sqrt{8} - \sqrt{5})b^b_{\rho\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h_{\sigma\sigma} + 4\sqrt{3}(\xi^{ab}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\chi_{\rho\lambda} + \chi^a_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\xi^{ab}_{\rho\lambda}) + 2f_{abc}[(\sqrt{3}\,h^a_{\mu\lambda} + b^a_{\mu\lambda})\overleftrightarrow{\partial}_\nu\chi^c_{\rho\lambda} + \chi^c_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu(\sqrt{3}\,h^a_{\rho\lambda} + b^a_{\rho\lambda}) +$$

$$+ (\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{5}{6}})\chi^a_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h^c_{\sigma\sigma} + 3\sqrt{2}\,\xi^{ad}_{\mu\rho}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\phi^{cd}] + 3d_{abc}[h^a_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu(h^c_{\rho\lambda} + \sqrt{3}\,b^c_{\rho\lambda}) + b^a_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu(\sqrt{3}\,h^c_{\rho\lambda} + b^c_{\rho\lambda}) +$$

$$+ (\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}})b^a_{\rho\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h^c_{\sigma\sigma} + 2\chi^a_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\chi^c_{\rho\lambda} + 4\xi^{ad}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\xi^{cd}_{\rho\lambda}] + \sqrt{3}(u_{ab})_{bd}[(\sqrt{3}\,h^a_{\mu\lambda} + b^a_{\mu\lambda})\overleftrightarrow{\partial}_\nu\xi^{cd}_{\rho\lambda} +$$

$$+ \xi^{cd}_{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\nu(\sqrt{3}\,h^a_{\rho\lambda} + b^a_{\rho\lambda}) + (\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}})\xi^{cd}_{\rho\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\nu h^a_{\sigma\sigma}] + (\mu\nu)\} . \tag{24}$$

Здесь $A\overleftrightarrow{\partial}_\nu B = A\partial_\nu B - \partial_\nu A \cdot B$, а $(\mu\nu)$ означает симметризацию. Все эти токи определены с точностью до членов, которые, сохраняясь, не дают вклада в генераторы (8) и (9).

В группу $SU(6)$ входят преобразования группы $SU(3)$, и поэтому к выписанным выше тензорным токам должен быть добавлен векторный ток

$$j_\mu(x) = \tfrac{1}{2}\bar\psi\gamma_\mu\lambda^b\psi + \tfrac{1}{4} f_{abc}(\phi^a\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi^c + b^a_\nu\overleftrightarrow{\partial}_\mu b^c_\nu - 4\bar\psi^a\gamma_\mu\psi^c - \tag{25}$$

$$-8\bar\psi^{ad}_\nu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^{cd}_\nu + h^a_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\mu h^c_{\nu\lambda} + b^a_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\mu b^c_{\nu\lambda} + \chi^a_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi^c_{\nu\lambda} + 2\xi^{ad}_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\xi^{cd}_{\nu\lambda} + 2\phi^{ad}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi^{cd}) \ ,$$

генерирующий преобразования $SU(3)$.

Токи (15)-(25) сохраняются в силу обычных свободных уравнений:

для кварков $\qquad (\gamma\partial + M)\psi(x) = 0;$ (26)

для 35-плета $\qquad (\Box - \mu^2)\,\phi^a(x) = 0\ ,$ (27)

$$[(\Box - \mu^2)\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu]\begin{pmatrix} b^a_\nu \\ b_\nu \end{pmatrix} = 0\ ; \tag{28}$$

для 56-плета $$(\gamma\partial + m)\psi^{a}(x) = 0 \,, \tag{29}$$

$$[\gamma\partial\delta_{\mu\rho} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma\partial\gamma_\rho - \gamma_\mu\partial_\rho - \frac{1}{3}\partial_\mu\gamma_\rho + m\delta_{\mu\rho}]\psi_\rho^{ab}(x) = 0 \,;^{x/} \tag{30}$$

для 189-плета

$$[(\Box - \mathfrak{M}^2)\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\lambda\partial_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho\partial_{\mu\lambda} + \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda^\xi\partial_\rho]\begin{pmatrix} h_{\lambda\rho} \\ h^{a}_{\lambda\rho} \\ b^{a}_{\lambda\rho} \\ \chi^{a}_{\lambda\rho} \\ \xi^{ab}_{\lambda\rho} \end{pmatrix} = 0,^{xx/} \tag{31}$$

$$(\Box - \mathfrak{M}^2)\phi^{ab} = 0 \,. \tag{32}$$

Из этих уравнений следуют дополнительные условия (10), (11) и (13), исключающие лишние спины и обеспечивающие положительность энергии.

4. Генераторы релятивистских преобразований SU(6)

Представим свободные поля, входящие во все мультиплеты в виде разложений по плоским волнам: поля полуцелого спина как

$$\psi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}\, 2p_0}\,[u(\vec{p})e^{ipx} + C\bar{w}(\vec{p})e^{-ipx}] \,, \tag{33}$$

где u – оператор уничтожения частиц, $\bar{w}$ –оператор рождения античастиц, а C –обычная матрица зарядового сопряжения; разложения для полей целого спина запишем как

---

x/ Это слегка модифицированное уравнение Рариты-Швингера (путем умножения на $\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu\gamma_\nu$ матрица при m превращена в единичную). Существует целое двухпараметрическое семейство уравнений для спина 3/2:

$$[\delta_{\mu\rho}(\gamma\partial) + A\gamma_\mu(\gamma\partial)\gamma_\rho + B\gamma_\mu\partial_\rho + C\partial_\mu\gamma_\rho + m(\delta_{\mu\rho} + D\gamma_\mu\gamma_\rho)]\psi_\rho = 0 \,,$$

где $A = -(2+4B)^{-1}(B^2 + 2BD - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}D)$, $C = -(1+2B)^{-1}[B + \frac{2}{3}(D+1)]$, ($D \neq ½$). К этому семейству принадлежит и уравнение (26), и уравнение Рариты-Швингера в оригинальной форме. В свободном случае все эти уравнения эквивалентны.

xx/ Уравнение (31) для симметричных полей $h_{\mu\nu}$ и $h^{a}_{\mu\nu}$ соответствует значению параметров $p = -1$, $q = 0$ по классификации в /8/. Оно описывает спин 2 и спин 0 с одной и той же массой $\mathfrak{M}$. Уравнение (31) для антисимметричных полей совпадает с уравнением, приведенным в /14/, и является модификацией уравнения Кеммера /15/.

$$b_\mu(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}\, 2p_0}\left[b_\mu(\vec{p})\, e^{ipx} + b^{+}_\mu(\vec{p})\, e^{-ipx}\right]. \tag{34}$$

Теперь подставим эти разложения для полей в (15)-(25) и вычислим генераторы (4), (8) и (9). При этом мы убедимся, что генераторы (8) равны нулю. Генераторы (4) и (9) могут быть записаны таким образом[x/]:

$$Q = Q_8 + Q_{35} + Q_{56} + Q_{189}, \tag{35}$$

$$Q_8 = \frac{1}{4M}\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b\, \bar{u}\lambda_b u + \text{ЗСЧ}, \tag{36}$$

$$Q_{35} = i\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b f_{abc}\left(\phi^{a+}\phi^c + b^{a+}_\mu b^c_\mu\right), \tag{37}$$

$$Q_{56} = \frac{i}{2m}\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b f_{abc}\left(\bar{u}^a u^c + 2\bar{u}^{ad}_\mu u^{cd}_\mu\right) + \text{ЗСЧ}, \tag{38}$$

$$Q_{189} = i\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b f_{abc}\left(h^{a+}_{\mu\nu} h^c_{\mu\nu} + b^{a+}_{\mu\nu} b^c_{\mu\nu} + \chi^{a+}_{\mu\nu}\chi^c_{\mu\nu} + 2\xi^{ad+}_{\mu\nu}\xi^{cd}_{\mu\nu} + 2\phi^{ad+}\phi^{cd}\right), \tag{39}$$

$$V = U + W, \tag{40}$$

$$U = U_8 + U_{35} + U_{56} + U_{189}, \tag{41}$$

$$U_8 = \frac{1}{8M}\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega_{\mu\nu}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{M}\, \bar{u}\gamma_\rho\gamma_5 u + \text{ЗСЧ}, \tag{42}$$

$$U_{35} = -i\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega_{\mu\nu}\left(b^{+}_\mu b_\nu + b^{a+}_\mu b^a_\nu\right), \tag{43}$$

$$U_{56} = \frac{1}{8m}\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega_{\mu\nu}\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\, \bar{u}^a\gamma_\rho\gamma_5 u^a - 6i\bar{u}^{ab}_\mu u^{ab}_\nu\right) + \text{ЗСЧ}, \tag{44}$$

$$U_{189} = -2i\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega_{\mu\nu}\left(h^{+}_{\mu\lambda} h_{\nu\lambda} + h^{a+}_{\mu\lambda} h^a_{\nu\lambda} + b^{a+}_{\mu\lambda} b^a_{\nu\lambda} + \chi^{a+}_{\mu\lambda}\chi^a_{\nu\lambda} + \xi^{ab+}_{\mu\lambda}\xi^{ab}_{\nu\lambda}\right), \tag{45}$$

$$W = W_8 + W_{35} + W_{56} + W_{189}, \tag{46}$$

$$W_8 = \frac{1}{8M}\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b_{\mu\nu}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{M}\, \bar{u}\gamma_\rho\gamma_5\lambda^b u + \text{ЗСЧ}. \tag{47}$$

$$W_{35} = -i\int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^b_{\mu\nu}\Big[d_{abc}\, b^{a+}_\mu b^c_\nu + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(b^{+}_\mu b^b_\nu - b^{b+}_\nu b_\mu\right) + \tfrac{1}{2} f_{abc}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{\mu}\left(b^{a+}_\rho\phi^c + b^a_\rho\phi^{c+}\right)\Big], \tag{48}$$

[x/] Примеры вывода этих выражений для генераторов см. в конце Приложения 1.

$$W_{56} = \frac{1}{2m} \int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^{b}_{\mu\nu} \{\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda}{m} [(\tfrac{1}{2} d_{abc} - \tfrac{1}{3} f_{abc}) \bar{u}^{a} \gamma_\rho \gamma_5 u^{c} + \bar{u}^{a} u^{ab}_{\rho} - \bar{u}^{ab}_{\rho} u^{a}] - 6 i d_{abc} \bar{u}^{ad}_{\mu} u^{cd}_{\nu} + \text{ЗСЧ} \}, \tag{49}$$

$$W_{189} = i \int \frac{d\vec{p}}{2p_0}\, \omega^{b}_{\mu\nu} \{ h^{a+}_{\mu\lambda} [d_{abc} (\tfrac{1}{2} h^{c}_{\nu\lambda} + \sqrt{3}\, b^{c}_{\nu\lambda}) + \frac{2}{\sqrt{3}} f_{abc} \chi^{c}_{\nu\lambda} + (u_{ab})_{cd} \xi^{cd}_{\nu\lambda}] +$$

$$+ \frac{1}{3} (1 - \sqrt{\tfrac{2}{5}}) h^{a+}_{\sigma\sigma} [\sqrt{3}\, d_{abc} b^{c}_{\mu\nu} + (\frac{5}{\sqrt{3}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}}) f_{abc} \chi^{c}_{\mu\nu} + (u_{ab})_{cd} \xi^{cd}_{\mu\nu}] + h^{+}_{\mu\lambda} [-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, h^{b}_{\nu\lambda} +$$

$$+ \sqrt{2}\, b^{b}_{\nu\lambda}] + b^{a+}_{\mu\lambda} [\tfrac{1}{2} d_{abc} b^{c}_{\nu\lambda} + \frac{2}{3} f_{abc} \chi^{c}_{\nu\lambda} + \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{ab})_{cd} \xi^{cd}_{\nu\lambda}] + \chi^{a+}_{\mu\lambda} (\frac{4}{\sqrt{3}} \xi^{ab}_{\nu\lambda} + d_{abc} \chi^{c}_{\nu\lambda}) -$$

$$- (\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{6}) b^{b+}_{\mu\nu} h_{\sigma\sigma} + 2 d_{abc} \xi^{ad+}_{\mu\lambda} \xi^{cd+}_{\nu\lambda} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, b^{a+}_{\mu\nu} \phi^{ab} + [\sqrt{2}\, f_{abc} \xi^{ad+}_{\mu\nu} \phi^{cd}] \} + \text{ЭС}. \tag{50}$$

В этих формулах все поля подразумеваются функциями от $\vec{p}$: $u(\vec{p})$, $\bar{u}(\vec{p})$, $b_\mu(\vec{p})$, $b^{+}_{\mu}(\vec{p})$ и т.д. В генераторах для частиц с полуцелым спином „ЗСЧ" означает: зарядо-сопряженный член, генерирующий преобразования античастиц.

Генераторы U и W обнаруживают прямое сходство с используемыми в модной сейчас алгебре токов пространственными интегралами от псевдовекторных токов. Действительно, если устранить из генераторов U и W "параметры" $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \omega_{\mu\nu}\, p_\lambda$ и $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \omega^{b}_{\mu\nu} p_\lambda$, то останутся псевдовекторные величины вида $\int \frac{d\vec{p}}{2p_0} j_{\rho 5}(\vec{p})$, например, в случае кварков из (47) получим $\int \frac{d\vec{p}}{2p_0} \bar{u}(\vec{p}) \gamma_\rho \gamma_5 u(\vec{p})$. Однако у нас эти псевдовекторные величины возникли из проинтегрированных по $\vec{x}$ четвертых компонент сохраняющихся тензорных токов. Поэтому не возникает вопроса о сохранении псевдовекторных токов и выясняется их происхождение и связь с SU(6).

5. Явный вид релятивистских преобразований SU(6)

Инфинитезимальные преобразования полей в терминах генераторов Q, U и W записываются так:

$$\delta f = -i [Q + U + W, f], \tag{51}$$

где f – любое из рассматриваемых полей. Чтобы отсюда получить явный вид преобразований в неоператорной форме, нужно воспользоваться перестановочными соотношениями :

для кварков[x/]

$$\{u(\vec{p}), \bar{u}(\vec{q})\} = (-i\gamma p + M) 2p_0\, \delta(\vec{p} - \vec{q}); \tag{52}$$

для 35-плета

$$[\phi^{a}(\vec{p}), \phi^{b+}(\vec{q})] = \delta_{ab} 2p_0\, \delta(\vec{p} - \vec{q}), \tag{53}$$

[x/] Антикоммутаторы для операторов $w(\vec{p})$, описывающих античастицы, такие же как для $u(\vec{p})$.

$$[b^a_\mu(\vec{p}), b^{b+}_\nu(\vec{q})] = \delta_{ab}(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\mu^2}) 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{54}$$

$$[b_\mu(\vec{p}), \; b^+_\nu(\vec{q})] = (\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\mu^2}) 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) ; \tag{55}$$

для 56-плета

$$\{u^a(\vec{p}), \bar{u}^b(\vec{q})\} = \delta_{ab}(-i\gamma p + m) 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{56}$$

$$\{u^{ab}_\mu(\vec{p}), \bar{u}^{cd}_\nu(\vec{q})\} = \frac{1}{4}(e^+_{ab})_{cd} P^{(\frac{3}{2})}_{\mu\nu} (-i\gamma p + m) 2p_0 \delta(p - q) ; \tag{57}$$

где $\frac{1}{4}(e^+_{ab})_{cd}$ – проекционный оператор (т.е. если его обозначить $\Pi_{ab,cd}$, то для него

$$\Pi_{ab,cd}\Pi_{cd,ef} = \Pi_{ab,ef}), \tag{58}$$

осуществляющий проецирование на 10-плет; $P^{(\frac{3}{2})}_{\mu\nu}$ – проекционный оператор, проецирующий на подпространство состояний со спином 3/2[x/]

$$P^{(\frac{3}{2})}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}(\hat{s}^2 - \frac{3}{4})_{\mu\nu} = \frac{2}{3}(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\mu\nu} \tag{59}$$

($\hat{s}^2$ – оператор квадрата спина, $\hat{\sigma}_{\mu\nu} = (\delta_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2})\sigma_{\mu'\nu'}(\delta_{\nu'\nu} + \frac{p_{\nu'} p_\nu}{m^2})$;

для 189-плета

$$[h_{\mu\nu}(\vec{p}), h^+_{\lambda\rho}(\vec{q})] = P^{(2+0)}_{\mu\nu,\lambda\rho} 2p_0 \, \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{60}$$

$$[h^a_{\mu\nu}(\vec{p}), \; h^{b+}_{\lambda\rho}(\vec{q})] = P^{(2+0)}_{\mu\nu,\lambda\rho} \delta_{ab} 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{61}$$

$$[b^a_{\mu\nu}(\vec{p}), \; b^{b+}_{\lambda\rho}(\vec{q})] = \delta_{ab} P''^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\rho} 2p_0 \, \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{62}$$

$$[\chi^a_{\mu\nu}(\vec{p}), \; \chi^{b+}_{\lambda\rho}(\vec{q})] = \delta_{ab} P''^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\rho} 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{63}$$

$$[\xi^{ab}_{\mu\nu}(\vec{p}), \xi^{cd+}_{\lambda\rho}(\vec{q})] = \frac{1}{4}(u_{mn})_{ab}(u_{mn})_{cd} P''^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\rho} 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}) , \tag{64}$$

$$[\phi^{ab}(\vec{p}), \phi^{cd+}(\vec{q})] = (c_{ab})_{cd} \; 2p_0 \, \delta(\vec{p} - \vec{q}) . \tag{65}$$

---

x/ О проекционных операторах см. Приложение 3.

Остальные коммутаторы или антикоммутаторы равны нулю. В формулах (60) и (61) $P^{(2+0)}_{\mu\nu,\lambda\rho}$ – проекционный оператор вида

$$P^{(2+0)}_{\mu\nu,\lambda\rho} = P^{(2)}_{\mu\nu,\lambda\rho} + \frac{1}{3}\left(\delta_{\lambda\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\mathfrak{M}^2}\right)\left(\delta_{\lambda\rho} + \frac{p_\lambda p_\rho}{\mathfrak{M}^2}\right), \tag{66}$$

где $P^{(2)}_{\mu\nu,\lambda\rho}$ совпадает с оператором $P^{(2)}$ из Приложения 1 к статье /8/, если в последнем заменить $\square$ на $\mathfrak{M}^2$. Точно так же выражение для проекционного оператора $P''^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\rho}$ берется из /8/ с заменой $\square$ на $+\mathfrak{M}^2$. Наконец, комбинации $\frac{1}{2}(u_{mn})_{ab}(u_{mn})_{cd}$ и $(c_{ab})_{cd}$ есть проекционные операторы, обладающие свойством (58) и осуществляющие соответствующие проецирования в первом случае на 10-плюс 10^*-плеты, а во втором – на 27-плет.

Вычисляя теперь с помощью (52)-(57) и (60)-(65)[x/] коммутаторы в (51), находим явный вид преобразований полей:

преобразования кварков

$$\delta\psi(x) = \frac{i}{4}\left[2\omega^a\lambda_a + \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{M}\gamma_\rho\gamma_5(\omega_{\mu\nu} + \omega^a_{\mu\nu}\lambda_a)\right]\psi, \tag{67}$$

преобразования 35-плета

$$\delta\phi^a(x) = -f_{abc}\,\omega^b\phi^c - \frac{1}{2}f_{abc}\,\omega^b_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{\mu}b^c_\rho, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\delta b^a_\mu(x) = &-\omega^b f_{abc}b^c_\mu + \hat{\omega}_{\mu\nu}b^a_\nu + d_{abc}\hat{\omega}^b_{\mu\nu}b^c_\nu + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\omega}^a_{\mu\nu}b_\nu + \\ &+ \frac{1}{2}f_{abc}\omega^b_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\frac{p_\gamma}{\mu}\phi^c,\end{aligned} \tag{69}$$

$$\delta b_\mu(x) = \hat{\omega}_{\mu\nu}b_\nu + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\omega}^b_{\mu\nu}b^b_\nu; \tag{70}$$

преобразования 56-плета

$$\begin{aligned}\delta\psi^a(x) = &-\omega^b f_{abc}\psi^c + \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\Big\{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma_5\psi^a + \\ &+ \omega^b_{\mu\nu}\left(\frac{i}{2}d_{abc} + \frac{1}{3}f_{abc}\right)\gamma_\rho\gamma_5\psi^c + i\omega^b_{\mu\nu}\psi^{ab}_\rho\Big\},\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi^{ab}_\mu(x) = &-\omega^c(f_{ace}\psi^{eb}_\mu + f_{bce}\psi^{ae}_\mu) + P^{(\frac{3}{2})}_{\mu\nu}\Big\{\frac{3}{2}\omega_{\nu\lambda}\psi^{ab}_\lambda - \\ &- i\omega^c_{\nu\lambda}(f_{ace}\psi^{eb}_\lambda + f_{bce}\psi^{ae}_\lambda) - \frac{1}{2}\omega^c_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\frac{p_\gamma}{m}(c^+_{ab})_{cd}\psi^d\Big\};\end{aligned} \tag{72}$$

преобразования 189-плета

---

x/ Разумеется, достаточно одновременных перестановочных соотношений, однако для свободных полей удобнее использовать эти.

$$\delta h_{\mu\nu} = \hat\omega_{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{\frac{5}{8}}\right)\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\mathfrak{M}^2}\right)\omega^a_{\alpha\beta} b^a_{\alpha\beta} - \hat\omega^a_{\mu\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt6} h^a_{\lambda\nu} - \frac{1}{\sqrt2} h^a_{\lambda\nu}\right) + (\mu\nu), \tag{73}$$

$$\delta h^a_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} f_{abc}\omega^b h^c_{\mu\nu} + \hat\omega'_{\mu\lambda} h^a_{\lambda\nu} + \frac{1}{\sqrt6}\hat\omega^a_{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \omega^b_{\mu\lambda}\Big\{\tfrac{1}{2} d_{abc}(h^c_{\lambda\nu} + \sqrt3\, b^c_{\lambda\nu}) + \frac{1}{\sqrt3} f_{abc}\chi^c_{\lambda\nu} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(u_{ab})_{cd}\,\xi^{cd}_{\lambda\nu}\Big\} - \frac{1}{6}\left(1-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\mathfrak{M}^2}\right)\omega^b_{\alpha\beta}\Big\{\sqrt3\, d_{abc} b^c_{\alpha\beta} + \left(\frac{5}{\sqrt3} + \sqrt{\frac{15}{2}}\right) f_{abc}\chi^c_{\alpha\beta} +$$

$$+ (u_{ab})_{cd}\,\xi^{cd}_{\alpha\beta}\Big\} + (\mu\nu), \tag{74}$$

$$\delta b^a_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} f_{abc}\omega^b b^c_{\mu\nu} + \hat\omega_{\mu\lambda} b^a_{\lambda\nu} - \frac{1}{\sqrt6}\hat\omega^b_{\mu\nu}\phi^{ab} + \frac{1}{3\sqrt2}\left(1-\sqrt{\frac{5}{8}}\right)\hat\omega^a_{\mu\nu} h_{\lambda\lambda} + \frac{1}{2\sqrt3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\hat\omega^b_{\mu\nu} d_{abc} h^c_{\lambda\lambda} -$$

$$-\hat\omega^b_{\mu\lambda}\Big\{d_{abc}\left(\frac{\sqrt3}{2} b^c_{\lambda\nu} - \tfrac{1}{2} b^c_{\lambda\nu}\right) + \frac{1}{3} f_{abc}\chi^c_{\lambda\nu} + \frac{1}{2\sqrt3}(u_{ab})_{cd}\,\xi^{cd}_{\lambda\nu}\Big\} - \frac{1}{\sqrt2}\hat\omega^a_{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - (\mu\nu), \tag{75}$$

$$\delta\chi^a_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\omega^b f_{abc}\chi^c_{\mu\nu} + \hat\omega_{\mu\lambda}\chi^a_{\lambda\nu} - \frac{1}{3\sqrt3}\left(1+\sqrt{\frac{5}{8}}\right)\hat\omega^b_{\mu\nu} f_{abc} h^c_{\lambda\lambda} +$$

$$+ \hat\omega^b_{\mu\lambda}\Big\{f_{abc}\left(\frac{1}{\sqrt3} h^c_{\lambda\nu} + \frac{1}{3} b^c_{\lambda\nu}\right) - \frac{2}{\sqrt3}\xi^{ab}_{\lambda\nu} - d_{abc}\chi^c_{\lambda\nu}\Big\} - (\mu\nu), \tag{76}$$

$$\delta\xi^{ab}_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\omega^c\left(f_{ace}\xi^{eb}_{\mu\nu} + f_{bce}\xi^{ae}_{\mu\nu}\right) + \hat\omega_{\mu\lambda}\xi^{ab}_{\lambda\nu} + \frac{1}{6}\left(1-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)(u_{ab})_{cd}\,\hat\omega^c_{\mu\nu} h^d_{\sigma\sigma} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt8}\hat\omega^c_{\mu\lambda}(u_{ab} d_c)_{de}\phi^{de} +$$

$$+ \omega^c_{\mu\lambda}\Big\{\frac{1}{6}[u_{ab}, f_c]_{de}\,\xi^{de}_{\lambda\nu} - \tfrac{1}{2}(u_{ab})_{cd}\left(h^d_{\lambda\nu} + \frac{1}{\sqrt3} b^d_{\lambda\nu}\right) - \frac{1}{\sqrt{12}}\langle u_{ab} u_{cd}\rangle\chi^d_{\lambda\nu}\Big\} - (\mu\nu), \tag{77}$$

$$\delta\phi^{ab} = -\omega^c\left(f_{acd}\phi^{db} + f_{bcd}\phi^{ad}\right) + \hat\omega^c_{\alpha\beta}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}(c_{ab})_{cd}\, b^d_{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt2}\{c_{ab}, f_c\}_{de}\,\xi^{de}_{\alpha\beta}\right]. \tag{78}$$

В этих формулах $p_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\hat\omega_{\mu\nu}$ сокращенно обозначает $(\delta_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2})\omega_{\mu'\nu'}(\delta_{\nu'\nu} + \frac{p_{\nu'} p_\nu}{m^2})$, где в качестве массы берется масса соответствующего мультиплета, а $\langle u_{ab} u_{cd}\rangle = Sp(u_{ab} u_{cd})$.

Заметим, что в случае полей с полуцелым спином комбинации типа $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{M}\gamma_\rho\gamma_5\psi$ с учетом свободного уравнения Дирака можно заменить на $\hat\sigma_{\mu\nu}\psi = (\delta_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{M^2})\sigma_{\mu'\nu'}(\delta_{\nu'\nu} + \frac{p_{\nu'} p_\nu}{M^2})$, так, что, например, закон преобразования кварков можно переписать в виде

$$\delta\psi = \frac{i}{4}\left[2\omega^a\lambda_a + \hat\sigma_{\mu\nu}(\omega_{\mu\nu} + \omega^a_{\mu\nu}\lambda_a)\right]\psi \; . \tag{67^1}$$

Формулы (68)-(78) выглядят достаточно громоздко, но их достоинство в том, что в них явно выписаны преобразования каждой составляющей мультиплета. Разумеется, для каждого мультиплета преобразования могут быть записаны кратко и единым образом:

$$\delta f = (\omega^b I_b + \omega_{\mu\nu} S_{\mu\nu} + \omega^b_{\mu\nu} N^b_{\mu\nu}) f , \tag{79}$$

где f для 35-плета, 56-плета и 189-плета обозначает соответственно столбцы

$$\begin{pmatrix} \phi^a \\ b^a_\mu \\ b_\mu \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \psi^a \\ \psi^{ab}_\mu \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} \\ h^a_{\mu\nu} \\ h^a_{\mu\nu} \\ \chi^a_{\mu\nu} \\ \xi^{ab}_{\mu\nu} \\ \phi^{ab} \end{pmatrix} , \tag{80}$$

а выражения для $SU(3)$ -оператора I_b, спинового оператора $S_{\mu\nu}$ x/ и смешивающего оператора $N^b_{\mu\nu}$ восстанавливаются с помощью (68)-(78).

В системе покоя ($\vec{p} = 0$) преобразования (67)-(78) совпадают с преобразованиями группы $SU(6)$. Так, например, преобразование (67) для кварков запишется в следующем виде:

$$\delta\psi = \frac{1}{2} [\omega^a \lambda_a + \sigma_i (\omega_i + \omega^a_i \lambda_a)]\psi \ ; \ (\omega_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} , \ i,j,k = 1,2,3) . \tag{67''}$$

Таким образом, полученные выше преобразования есть релятивизация группы $SU(6)$. Для кварков эта релятивизация совпадает с релятивизацией Салама /16/. Единственное отличие в том, что три нерелятивистские спиновые матрицы дополняются в общей системе отсчета до антисимметричного тензора вместо 4-вектора. Для кварков этот антисимметричный тензор составляют релятивистские спиновые матрицы $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ или $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda}{M} \gamma_\rho \gamma_5$ и соответственно для других представлений. Наши параметры $\omega_{\mu\nu}$ и параметры Салама E_ρ связаны соотношением

$$\omega_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda}{M} = E_\rho \quad . \tag{81}$$

Преобразование Салама также соответствует тензорным токам, но уже несимметричным и сохраняющимся только по одному из индексов.

---

x/ Для каждого поля этот оператор можно записать в виде $\hat{s}_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} + p^{-2} (p_\mu s_{\nu\lambda} - p_\nu s_{\mu\lambda}) p_\lambda$, где $s_{\mu\nu}$ -спиновые матрицы: $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ для спинорного поля, $-i(\delta_{a\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{a\nu}\delta_{\beta\mu})$ для векторного b_a и т.д.

6. Специфика полученной группы преобразований и связанные с ней трудности

Достоинство рассмотренной выше релятивизации SU (6) в том, что, во-первых, она не потребовала введения лишних импульсов (в отличие от релятивизаций типа SL (6), $\tilde{U}_{12}$ и т.д.), и, во-вторых, в этой связи не возникло трудностей с неинвариантностью свободных уравнений. Обычные свободные уравнения инвариантны относительно полученных преобразований.

Однако найденные преобразования обладают существенным недостатком: параметры ω^a, $\omega_{\mu\nu}$ и $\omega^a_{\mu\nu}$ в них оказываются зависящими от 4-скорости. Действительно, применяя скобочную операцию Ли

$$(\delta_2\,\delta_1 - \delta_1\,\delta_2)f = \delta_{ok} f \;, \tag{82}$$

где вариации δ_1, δ_2 суть преобразования (67)-(78) с параметрами ω^a_1, $\omega_{1\mu\nu}$, $\omega^a_{1\mu\nu}$ и ω^a_2, $\omega_{2\mu\nu}$ и $\omega^a_{2\mu\nu}$ соответственно x/, мы найдем, что скобочная вариация δ_{ok} имеет в качестве параметров

$$\omega^a_{ok} = -f_{abc}\,[\omega^b_1\,\omega^c_2 + \tfrac{1}{4}\omega^b_{1\mu\nu}\,\omega^c_{2\mu\nu} + u_\mu u_\nu\,\omega^b_{1\mu\lambda}\,\omega^c_{2\nu\lambda}] \;, \tag{83}$$

$$\omega_{\mu\nu ok} = -(\delta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)[\omega_{1\mu\alpha}\,\omega_{2\nu\beta} + \tfrac{2}{3}\,\omega^a_{1\mu\alpha}\,\omega^a_{2\nu\beta} - (\mu\nu)] \;, \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\omega^a_{\mu\nu\, ok} = &-(\delta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)\,[\omega^a_{1\mu\alpha}\omega_{2\nu\beta} + \omega_{1\mu\alpha}\omega^a_{2\nu\beta} + d_{abc}\,\omega^b_{\mu\alpha}\;\omega^c_{\nu\beta} - (\mu\nu)] - \\ &- f_{abc}\,(\omega^b_1\,\omega^c_{2\mu\nu} - \omega^b_2\,\omega^c_{1\mu\nu}) \,.\end{aligned} \tag{85}$$

Очевидно, что только при одной 4-скорости $\frac{p_\mu^{\text{кварк}}}{M} = \frac{p_\mu^{35}}{\mu} = \frac{p_\mu^{56}}{m} = \frac{p_\mu^{189}}{\mathfrak{M}} = u_\mu$ преобразования кварков, 35-плета, 56-плета, 189-плета и т.д. будут образовывать представления одной и той же группы. Каждому значению 4-скорости соответствует своя собственная группа. Фактически мы имеем дело с группой, обладающей бесконечно большим числом параметров xx/. Отсюда ясно, что инвариантность относительно таких преобразований в случае взаимодействия означала бы бесконечно большое число ограничений на амплитуды процессов, которым ничего не оставалось бы как только обратиться в нуль.

7. SU (6) как динамическая группа

Проведенное только что обсуждение показывает, что рассмотренная релятивистская группа должна существенно модифицироваться взаимодействием и поэтому применение ее

---

x/ Из (51) и (82) легко получить перестановочные соотношения для генераторов
$$[Q_2 + U_2 + W_2, Q_1 + U_1 + W_1] = i(Q_{ok} + U_{ok} + W_{ok}) \;,$$
где в Q_{ck}, U_{ck} и W_{ck} входят параметры (83)-(85).

xx/ Возможность выделения из этой группы конечно-параметрических подгрупп обсуждается в Приложенини 4.

к амплитудам незаконно. Вместе с тем представляется очень правдоподобным, что группу SU (6) можно применять к одночастичным состояниям, так как она блестяще оправдала себя при классификации частиц и резонансов и объяснения их статических свойств (магнитных моментов) [1]. Таким образом, эти аргументы говорят в пользу гипотезы Пайса о том, что SU (6) есть динамическая группа. Другими словами, система взаимодействующих полей должна быть инвариантна относительно некоторой глубокой и очень сложной группы, которая лишь в применении к одночастичным состояниям редуцируется до SU(6). Теория, а потому и амплитуды, инвариантны относительно этой группы, но не относительно SU (6) и ее непосредственных линейных релятивизаций.

Один путь восстановления истинной группы следующий. Хорошо известно, что сохраняющиеся векторные токи можно использовать как источники векторных полей со спином 1 [3]. Обратно, из требования, чтобы взаимодействующие векторные поля обладали спином 1, можно восстановить сохраняющиеся векторные токи и теории, которым присущи соответствующие симметрии. Поскольку в группе SU (6) основную роль играют сохраняющиеся тензорные токи $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$, то естественно рассматривать их как источники для тензорных полей 2^{+} [x]. Иначе говоря, мы предполагаем, что уравнения движения для поля 2^{+} в искомой теории записываются в виде

$$[(\Box - \mathfrak{M}^2)\delta_{\mu\lambda}\,\delta_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\lambda\,\delta_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\lambda\delta_{\mu\rho} + \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho]\begin{pmatrix} h_{\lambda\rho} \\ h^{a}_{\lambda\rho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\,J_{\mu\nu} \\ g'\,J^{a}_{\mu\nu}\end{pmatrix}. \qquad (86)$$

Токи $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$ могут быть восстановлены из требования, чтобы тензорные поля удовлетворяли условию Лоренца

$$\partial_\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h^{a}_{\mu\nu} = 0\,. \qquad (87)$$

Можно ожидать, что окончательные выражения для токов чрезвычайно нелинейны и представляют собой ряды по степеням константы связи. Однако мы уже знаем первые члены этих рядов: они формально совпадают с выражениями для свободных токов п.4. Отправляясь от этого первого приближения можно восстановить следующие так, чтобы условие Лоренца (87) выполнялось во всех порядках по константе связи, а взаимодействующие токи $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$ строго сохранялись. Ситуация здесь аналогична, но более сложна чем та,с которой мы знакомы в теории тяготения Эйнштейна, где при восстановлении теории свободный тензор энергии-импульса приходится дополнять членами, содержащими любые степени гравитационного поля [8].

Тот факт, что для получения SU(6) достаточно синглетного и октетного токов $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$, позволяет выяснить, к какому супермультиплету группы SU (6) относятся поля со спином 2^{+}. Этот супермультиплет должен содержать октет и синглет 2^{+}.

---

[x] Так как $J_{\mu\mu}$ и $J^{a}_{\mu\mu}$ не равны нулю, то тензорное поле наряду с 2^{+} будет описывать и состояния 0^{+}. Разбиение $J_{\mu\nu}$ и $J^{a}_{\mu\nu}$ на части 2^{+} и 0^{+}, как и в теории тяготения, было бы нелокальным.

Группа $SU(6)$ имеет только 4 представления, содержащих спины 2, но не выше: 189, 280, 280^x и 405. Однако мультиплеты 280 и 280^x не содержат синглета 2^+ и содержат лишние декаплеты 2^+, а 405 -плет содержит лишний 27-плет 2^+. Мультиплет же 189 содержит как раз то, что нужно: синглет и октет 2^+, и не содержит лишних семейств 2^+. Естественно заключить, что поля $h_{\mu\nu}$ и $h^a_{\mu\nu}$ принадлежат к 189-плету. К 189-плету должен быть прибавлен 35-плет, содержащий поля 1^-, источниками для которых служат сохраняющиеся векторные токи, генерирующие преобразования $SU(3)$. Поэтому супермультиплеты 189 и 35 должны играть столь же фундаментальную роль, что и присоединенные представления для частиц 1^- в обычных группах внутренних симметрий (например, октет в $SU(3)$). Важно, что экспериментально обнаруженные резонансы со спином 2 имеют именно положительную четность и образуют именно синглет и октет:

$$f(1253),\quad T=0;\quad f'(1525),\quad T=0;\quad A\quad(1324),\quad T=1;\ K^*(1430), T=\tfrac{1}{2}, Y=\pm 1. \qquad /4/$$

Естественно лишний раз подчеркнуть целесообразность полной экспериментальной идентификации остальных состояний из 189-плета /5/. Кроме вывода о фундаментальности 189 -плета, мы приходим к заключению <u>об универсальности взаимодействия с частицами 2^+</u>: в правой части уравнения (86) стоит единый ток, умноженный на одну общую константу связи; тем самым константы связи с полем 2^+ для всех полей выражаются через одну величину.

Возвращаясь к вопросу восстановления теории со взаимодействием, приведем аргументы, что не только токи, но и преобразования полей окажутся чрезвычайно нелинейными. Дело в том, что, как говорилось в п.6, параметры фактически зависят от 4-скорости, из-за чего группа по существу является бесконечно-параметрической. Поэтому возникает необходимость как-то так видоизменить преобразования, чтобы из скобочных параметров (или, что и то же самое, из структурных соотношений) выпали члены , зависящие от 4-скорости, и за этот счет число параметров стало конечным.

Попытаемся добиться этого следующим образом. В 189-плет входят поля 1^+, описываемые антисимметричными тензорами. В пределе массы 0 этих полей они определены с точностью до калибровочных преобразований типа

$$\delta b^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda^a_\nu - \partial_\nu \lambda^a_\mu + \text{мультипликативная часть}$$

(нас интересует только поле $b^a_{\mu\nu}$, которое может быть объединено с $h^a_{\mu\nu}$ в один несимметричный тензор). Выберем функции λ^a_ν так, чтобы

$$\partial_\mu \lambda^a_\nu - \partial_\nu \lambda^a_\mu = \frac{1}{g}\,\omega^a_{\mu\nu}, \quad \text{тогда} \quad \delta b^a_{\mu\nu} = \frac{1}{g}\,\omega^a_{\mu\nu} + \ldots \qquad x/$$

x/ Массовый член поля $b^a_{\mu\nu}$ и только он нарушает инвариантность относительно аддитивных добавок.

Аддитивная добавка к полю $b^a_{\mu\nu}$ может быть использована для обеспечения независимости скобочных параметров ω_a и $\omega^a_{\mu\nu}$ от 4-скорости. Вместе с тем отсутствие в 189-плете синглета 1^+ не дает возможности исправить $\omega_{\mu\nu\,ok}$. Это подсказывает, что ток $J_{\mu\nu}$ в истинной теории должен быть дополнен до тензора энергии-импульса.

Совокупность соответствующих модификаций такова. Во-первых, повсюду в преобразованиях нужно произвести замены параметров

$$\omega^a \to \omega^a + g f_{abc}\, \omega^b_{\lambda\rho}\, b^c_{\lambda\sigma}\, u_\lambda\, u_\sigma , \tag{88}$$

$$\omega_{\mu\nu} \to \omega_{\mu\nu} + \frac{2}{3} g (\omega^a_{\mu\lambda}\, b^a_{\nu\rho} - (\mu\nu))\, u_\lambda\, u_\rho , \tag{89}$$

$$\omega^a_{\mu\nu} \to \omega^a_{\mu\nu} + g\, d_{abc}\, (\omega^b_{\mu\lambda}\, b^c_{\nu\rho} - (\mu\nu))\, u_\lambda\, u_\rho , \tag{90}$$

где $u_\lambda = \frac{1}{iM}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ в (67), $u_\lambda = \frac{1}{i\mu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ в (68)-(70), $u_\lambda = \frac{1}{im}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ в (71) и (72) и $u_\lambda = \frac{1}{i\mathfrak{M}}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ в (73)-(78). Во-вторых, кроме того, в преобразование каждого из полей (67)-(78) нужно добавить дополнительный член:

$$\delta' f = \delta f + [\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu} - \frac{4g}{3i}\omega^a_{\mu\alpha}\, b^a_{\nu\beta}(\delta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)]\, P (x_\mu\, \partial_\nu - x_\nu\, \partial_\mu)\, f , \tag{91}$$

где P -проекционный оператор, соответствующий полю f : $P = 1$ для ϕ^a и ϕ^{ab}, $P = \frac{-i\gamma u + 1}{2}$ для ψ и ψ^a, $P = \delta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ для b^a_μ и b_μ, $P = \frac{-i\gamma u + 1}{2} P^{(3/2)}$ для ψ^{ab}_μ, $P = P^{(2+0)}$ для $h_{\mu\nu}$ и $h^a_{\mu\nu}$ и, наконец, $P = P'^{(1)}$ для $b^a_{\mu\nu}$, $\chi^a_{\mu\nu}$ и $\xi^{ab}_{\mu\nu}$. Добавочный член с $\omega_{\mu\nu}$ в (91) дополняет спиновые операторы в первоначальных преобразованиях до полного момента количества движения[x/]. Теперь новые преобразования содержат (вместо спиновой группы в старых) однородную группу Лоренца, которая получается, если положить в них $\omega^a = \omega^a_{\mu\nu} = 0$ и оставить только $\omega_{\mu\nu}$. Это следствие замены источника синглета 2^+, тока $J_{\mu\nu}$, на тензор энергии-импульса.

В результате в низшем порядке по константе связи скобочные параметры перестают зависеть от 4-скорости:

$$\omega^a_{ok} = - f_{abc}\, (\omega^b_1\, \omega^c_2 + \tfrac{1}{2}\omega^b_{1\mu\nu}\, \omega^c_{2\mu\nu}),$$

[x/] Оператор $P(x_\mu\,\partial_\nu - x_\nu\,\partial_\mu)$ соответствует, по терминологии Ю.М. Широкова, орбитальному моменту центра инерции относительно начала координат и в сумме с релятивистским оператором спина образует полный момент количества движения/17/. При таком разбиении полного момента обе составляющие коммутируют с уравнениями движения.

$$\omega_{\mu\nu\,ok} = -(\omega_{1\mu\lambda}\,\omega_{2\nu\lambda} + \frac{2}{3}\omega^{a}_{1\mu\lambda}\,\omega^{a}_{2\nu\lambda} - (\mu\nu)),$$

$$\omega^{a}_{\mu\nu\,ok} = -(\omega^{a}_{1\mu\lambda}\omega_{2\nu\lambda} + \omega_{1\mu\lambda}\,\omega^{a}_{2\nu\lambda} + d_{abc}\,\omega^{b}_{1\mu\lambda}\,\omega^{c}_{2\nu\lambda} - (\mu\nu)) - f_{abc}(\omega^{b}_{1}\,\omega^{c}_{2\mu\nu} - \omega^{b}_{2}\,\omega^{c}_{1\mu\nu}).$$

В следующих порядках понадобятся новые модификации преобразований. Уже на изложенном этапе преобразования стали нелинейными (за счет включения поля $b^{a}_{\mu\nu}$), и дальше нелинейность будет нарастать. Компенсирование лишних членов в законе преобразования путем добавления нелинейностей имеет тесную аналогию с законом преобразования спиноров в теории тяготения /9/.

Итак, истинная группа симметрии, оставляющая в применении к одночастичным состояниям свой след в форме группы SU(6), представляется весьма нелинейными преобразованиями взаимодействующих полей. Хотя мы пока далеки от полного проведения изложенной выше программы и полного восстановления истинных преобразований симметрии и соответствующей теории, однако нам кажется, что изложенная точка зрения позволяет понять известные трудности непосредственных линейных релятивизаций SU(6) и наметить путь построения реальной модели очень нелинейной теории взаимодействующих полей с SU(6) -симметрией одночастичных состояний, но в целом инвариантной не относительно SU(6), а относительно некоторых сложных нелинейных преобразований. Эта истинная симметрия свяжет, вообще говоря, амплитуды с разным числом частиц, наподобие тождеств Уорда.

Авторы глубоко признательны Б.Н. Валуеву, М.А. Маркову, Нгуену Ван Хьеу, В. Тыбору и А.Н. Заславскому за обсуждения.

Приложение I. Пространственная структура сохраняющихся векторных и тензорных токов, построенных из свободных полей

Мыслимые выражения для векторных и тензорных токов, сохраняющихся в силу свободных уравнений

$$k_\mu j_\mu = 0\,, \qquad k_\mu J_{\mu\nu} = 0\,,$$

соответствуют возможным структурам для вершин рис.I. Волнистая линия представляет либо векторное, либо тензорное поле, которое при построении вершины свертывается с интересующим нас током, соответственно векторным или тензорным. При той или иной спин-четности число возможных выражений для тока равно числу независимых формфакторов в соответствующей вершине. Подсчет производится по правилам векторного сложения спинов и допустимых орбитальных моментов, и результаты его приведены в таблицах I - 6.

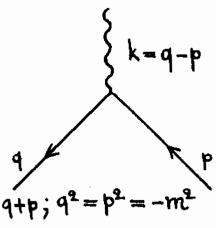

Рис.I

Таблица I. Число формфакторов в вершине со спин-четностью 0^+.

0^+	1									
0^-	–	1								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	1							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	1	1						
1^+	–	1	–	–	2					
1^-	1	–	–	–	1	2				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	1	1	–	–	2			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	1	1	–	–	2	2		
2^+	1	–	–	–	1	2	–	–	3	
2^-	–	1	–	–	2	1	–	–	2	3
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Таблица 2. Число формфакторов в вершине со спин-четностью I^-.

0^+	1									
0^-	–	1								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	2							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	2	2						
1^+	1	2	–	–	4					
1^-	2	1	–	–	3	4				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	3	3	–	–	5			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	3	3	–	–	5	5		
2^+	2	1	–	–	4	5	–	–	7	
2^-	1	2	–	–	5	4	–	–	6	7
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Таблица 3. Число формфакто- в вершине со спин-четностью 2^+

0^+	1									
0^-	–	1								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	2							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	2	2						
1^+	1	2	–	–	5					
1^-	2	1	–	–	4	5				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	4	4	–	–	7			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	4	4	–	–	7	7		
2^+	3	2	–	–	6	7	–	–	10	
2^-	2	3	–	–	7	6	–	–	9	10
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Таблица 4. Число формфакторов в вершине со спин-четностью 0^-.

0^+	–									
0^-	1	–								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	1							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	1	1						
1^+	1	–	–	–	1					
1^-	–	1	–	–	2	1				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	1	1	–	–	2			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	1	1	–	–	2	2		
2^+	–	1	–	–	2	1	–	–	2	
2^-	1	–	–	–	1	2	–	–	3	2
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Таблица 5. Число формфакторов в вершине со спин-четностью I^+.

0^+	–									
0^-	1	–								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	2							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	2	2						
1^+	2	1	–	–	3					
1^-	1	2	–	–	4	3				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	3	3	–	–	5			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	3	3	–	–	5	5		
2^+	1	2	–	–	5	4	–	–	6	
2^-	2	1	–	–	4	5	–	–	7	6
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Таблица 6. Число формфакторов в вершине со спин-четностью 2^-.

0^+	–									
0^-	1	–								
$\frac{1}{2}^+$	–	–	2							
$\frac{1}{2}^-$	–	–	2	2						
1^+	2	1	–	–	4					
1^-	1	2	–	–	5	4				
$\frac{3}{2}^+$	–	–	4	4	–	–	7			
$\frac{3}{2}^-$	–	–	4	4	–	–	7	7		
2^+	2	3	–	–	7	6	–	–	9	
2^-	3	2	–	–	6	7	–	–	10	9
	0^+	0^-	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	1^+	1^-	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	2^+	2^-

Ниже мы приводим перечень возможных сохраняющихся векторных и тензорных токов, построенных из различных полей. В том числе рассматривается описание скалярных частиц векторным полем φ_μ, удовлетворяющим уравнению

$$p_\mu \varphi_\nu(p) = p_\nu \varphi_\mu(p) \quad .$$

<u>Векторные токи</u>

I) $0^- 0^+ \to I^+$, $0^+ 0^+ \to I^-$, $0^- 0^- \to I^-$

$$F \, \ell_\mu \varphi_2(q) \varphi_1(p)$$

2) $\frac{I^-}{2} \frac{I^+}{2} \to I^-$, $\frac{I^+}{2} \frac{I^+}{2} \to I^+$, $\frac{I^-}{2} \frac{I^-}{2} \to I^+$

$$F_1 \bar{u}(q) \gamma_\mu u(p) + F_2 \ell_\mu \bar{u}(q) u(p)$$

3) $\frac{I^-}{2} \frac{I^+}{2} \to I^+$, $\frac{I^+}{2} \frac{I^+}{2} \to I^-$, $\frac{I^-}{2} \frac{I^-}{2} \to I^-$

$$F_1 \left[k^2 \bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma_5 u(p) - 2im k_\mu \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \right] + F_2 \ell_\mu \bar{u} \gamma_5 u$$

4) $I^+ 0^+ \to I^+$, $I^- 0^- \to I^+$, $I^+ 0^- \to I^-$, $I^- 0^+ \to I^-$

$$F_1 \ell_\mu \varphi(q) k_\nu a_\nu(p) + F_2 \left[k^2 \varphi(q) a_\mu(p) - k_\mu k_\nu a_\nu(p) \varphi(q) \right]$$

5) $I^- 0^+ \to I^+$, $I^+ 0^- \to I^+$, $I^+ 0^+ \to I^-$, $I^- 0^- \to I^-$

$$F \, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} k_\nu \ell_\lambda a_\rho(q) \varphi(p)$$

6) $I^- I^+ \to I^-$, $I^+ I^+ \to I^+$, $I^- I^- \to I^+$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left[F_1 k_\alpha a_\beta b_\gamma + F_2 k_\alpha \ell_\beta a_\gamma (kb) + F_3 k_\alpha \ell_\beta b_\gamma (ka) \right]$$

7) $I^- I^+ \to I^+$, $I^+ I^+ \to I^-$, $I^- I^- \to I^-$

$$F_1 \ell_\mu (ab) + F_2 \ell_\mu (ak)(kb) + F_3 \left[a_\mu (kb) - (ak) b_\mu \right] +$$
$$+ F_4 \left\{ 2 k_\mu (ak)(kb) - k^2 \left[a_\mu (kb) + (ak) b_\mu \right] \right\}$$

<u>Векторные токи, построенные из поля φ_μ, описывающего спин 0, и полей со спином I a_μ, b_μ</u>

I) $0^- 0^+ \to I^+$, $0^+ 0^+ \to I^-$, $0^- 0^- \to I^-$

$$F \, \ell_\mu \varphi_{1\sigma} \varphi_{2\sigma}$$

2) $I^+ 0^+ \to I^+$, $I^- 0^- \to I^+$, $I^+ 0^- \to I^-$, $I^- 0^+ \to I^-$

$$F_1 \ell_\mu (a\varphi) + F_2 \left[(k\varphi) a_\mu - \varphi_\mu (ak) \right]$$

3) $I^- 0^+ \to I^+$, $I^+ 0^- \to I^+$, $I^+ 0^+ \to I^-$, $I^- 0^- \to I^-$

$$F \, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \ell_\nu a_\lambda \varphi_\rho$$

Антисимметричные тензорные токи

I) $0^-0^+\to I^+$, $0^-0^-\to I^-$, $0^+0^+\to I^-$

$$F\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda \ell_\rho \varphi_1\varphi_2$$

2) $I^-0^-\to I^+$, $I^+0^+\to I^+$, $I^+0^-\to I^-$, $I^-0^+\to I^-$

$$F_1\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha a_\beta\varphi + F_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha \ell_\beta (ka)\varphi$$

3) $I^-0^+\to I^+$, $I^+0^-\to I^+$, $I^-0^-\to I^-$, $I^+0^+\to I^-$

$$F\left[k^2(\ell_\mu a_\nu-\ell_\nu a_\mu)\varphi-(\ell_\mu k_\nu-\ell_\nu k_\mu)(ka)\varphi\right]$$

4) $I^+I^+\to I^+$, $I^-I^-\to I^+$, $I^-I^+\to I^-$

$$F_1\left[k^2(a_\mu b_\nu-a_\nu b_\mu)-(ak)(k_\mu b_\nu-k_\nu b_\mu)+(k_\mu a_\nu-k_\nu a_\mu)(kb)\right]+$$
$$+F_2\left[-(ak)(\ell_\mu b_\nu-\ell_\nu b_\mu)+(\ell_\mu a_\nu-\ell_\nu a_\mu)(kb)\right]+$$
$$+F_3\left[(k_\mu\ell_\nu-k_\nu\ell_\mu)(ak)(kb)+\frac{k^2}{2}(ak)(\ell_\mu b_\nu-\ell_\nu b_\mu)+\frac{k^2}{2}(\ell_\mu a_\nu-\ell_\nu a_\mu)(kb)\right]$$

5) $I^-I^+\to I^+$, $I^+I^+\to I^-$, $I^-I^-\to I^-$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left[F_1k_\lambda\ell_\rho(ak)(bk)+F_2(ak)k_\lambda b_\rho+F_3a_\rho k_\lambda(bk)+F_4k_\lambda\ell_\rho(ab)\right]$$

6) $\frac{I^+}{2}$, $\frac{I^+}{2}\to I^-$, $\frac{I^-}{2}\,\frac{I^-}{2}\to I^-$, $\frac{I^-}{2}\,\frac{I^+}{2}\to I^+$

$$F_1\left[(m_1-m_2)\bar u(q)\sigma_{\mu\nu}u(p)-\ell_\mu\bar u(q)\gamma_\nu u(p)+\ell_\nu\bar u(q)\gamma_\mu u(p)\right]+$$
$$+F_2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda\bar u(q)\gamma_\rho\gamma_5u(p)\qquad (q^2=-m_2^2\ ,\ p^2=-m_1^2)$$

7) $\frac{I^+}{2}$, $\frac{I^+}{2}\to I^+$, $\frac{I^-}{2}\,\frac{I^-}{2}\to I^+$, $\frac{I^-}{2}\,\frac{I^+}{2}\to I^-$

$$F_1\left\{\bar u(q)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5u(p)+\frac{1}{m_1+m_2}\left[\ell_\mu\bar u(q)\gamma_\nu\gamma_5u(p)-\ell_\nu\bar u(q)\gamma_\mu\gamma_5u(p)\right]\right\}+$$
$$+F_2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda\bar u(q)\gamma_\rho u(p)$$

Антисимметричные тензорные токи, построенные из поля со спином 0 φ_μ и полей со спином I a_μ и b_μ

I) $0^-0^-\to I^+$, $0^-0^-\to I^-$, $0^+0^+\to I^-$

$$F\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varphi_{1\lambda}(q)\varphi_{2\rho}(p)$$

2) $I^-0^-\to I^+$, $I^+0^+\to I^+$, $I^+0^-\to I^-$, $I^-0^+\to I^-$

$$F_1\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha\ell_\beta(a\varphi)+F_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha a_\beta(k\varphi)$$

3) $I^-0^+ \to I^+$, $I^+0^- \to I^+$, $I^-0^- \to I^-$, $I^+0^+ \to I^-$

$$F\left[(\ell_\mu k_\nu - \ell_\nu k_\mu) a\varphi - 2(\ell_\mu a_\nu - \ell_\nu a_\mu)(k\varphi)\right]$$

<u>Симметричные тензорные токи</u>

1) $0^+0^+ \to 2^+ + 0^+$, $0^-0^- \to 2^+ + 0^+$, $0^-0^+ \to 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \varphi_1 \varphi_2$$

2) $I^+0^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^-0^- \to 2^+ + 0^+$, $I^+0^- \to 2^- + 0^-$, $I^-0^+ \to 2^- + 0^-$

$$F\left[\ell_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} k_\alpha \ell_\beta a_\gamma \varphi + \ell_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} k_\alpha \ell_\beta a_\gamma \varphi\right]$$

3) $I^+0^- \to 2^+ + 0^+$, $I^-0^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^+0^+ \to 2^- + 0^-$, $I^-0^- \to 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right](ak)\varphi + F_3\left[(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu)(ak)\varphi - k^2(\ell_\mu a_\nu + \ell_\nu a_\mu)\varphi\right]$$

4) $I^-I^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^+I^+ \to 2^- + 0^-$, $I^-I^- \to 2^- + 0^-$

$$(\ell_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + \ell_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma})\left[F_1 k_\alpha a_\beta b_\gamma + F_2 k_\alpha \ell_\beta (kb) + F_3 k_\alpha \ell_\beta (ak) b_\gamma\right] +$$
$$+ F_4\left[(k_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + k_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma})(kb) - k^2 (b_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + b_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma})\right] k_\alpha \ell_\beta a_\gamma +$$
$$+ F_5\left[(k_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + k_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma})(ak) - k^2 (a_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + a_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma})\right] k_\alpha \ell_\beta b_\gamma$$

5) $I^+I^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^-I^- \to 2^+ + 0^+$, $I^-I^+ \to 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right](ab) + \left[F_3 \ell_\mu \ell_\nu + F_4 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right](ak)(kb) +$$
$$+ F_5\left[2(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu)(ak)(kb) - k^2 (ak)(\ell_\mu b_\nu + \ell_\nu b_\mu) - k^2 (a_\mu \ell_\nu + a_\nu \ell_\mu)(kb)\right] +$$
$$+ F_6\left[(a_\mu \ell_\nu + a_\nu \ell_\mu)(bk) - (ak)(\ell_\nu b_\mu + \ell_\mu b_\nu)\right] +$$
$$+ F_7\left[k^2 (a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu) - (a_\mu k_\nu + a_\nu k_\mu)(bk) - (ak)(k_\nu b_\mu + k_\mu b_\nu) + 2\delta_{\mu\nu}(ak)(bk)\right]$$

6) $\frac{I^-}{2}\frac{I^+}{2} \to 2^+ + 0^+$, $\frac{I^+}{2}\frac{I^+}{2} \to 2^- + 0^-$, $\frac{I^-}{2}\frac{I^-}{2} \to 2^- + 0^-$,

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \bar{u}(q) u(p) + F_3 \bar{u}(q)(\gamma_\mu \ell_\nu + \gamma_\nu \ell_\mu) u(p)$$

7) $\frac{1}{2}^- \frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^- + 0^-$, $\frac{1}{2}^+\frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $\frac{1}{2}^-\frac{1}{2}^- \longrightarrow 2^+ + 0^+$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \bar{u}(q)\gamma_5 v(p) + F_3\left[k^2 \bar{u}(q)(\gamma_\mu \ell_\nu + \gamma_\nu \ell_\mu)\gamma_5 v(p) - \right.$$
$$\left. - 2im\,(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu)\bar{u}(q)\gamma_5 v(p)\right]$$

8) $\frac{3}{2}^-\frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $\frac{3}{2}^+\frac{1}{2}^- \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $\frac{3}{2}^+\frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^- + 0^-$, $\frac{3}{2}^- \frac{1}{2}^- \longrightarrow 2^- + 0^-$,

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \bar{u}\,(kv) + F_3\, \bar{u}\,(\gamma_\mu \ell_\nu + \gamma_\nu \ell_\mu)(kv) +$$
$$+ F_4\left[(k_\mu \ell_\nu + k_\nu \ell_\mu)\,\bar{u}\,(kv) - k^2\,\bar{u}\,(\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu)\right] +$$
$$+ F_5\left[\bar{u}\,(k_\mu \gamma_\nu + k_\nu \gamma_\mu)(kv) - k^2\,\bar{u}\,(\gamma_\mu v_\nu + \gamma_\nu v_\mu)\right]$$

9) $\frac{3}{2}^+\frac{1}{2}^- \longrightarrow 2^- + 0^-$, $\frac{3}{2}^-\frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^- + 0^-$, $\frac{3}{2}^+\frac{1}{2}^+ \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $\frac{3}{2}^-\frac{1}{2}^- \longrightarrow 2^+ + 0^+$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \bar{u}\,\gamma_5 (kv) +$$
$$+ F_3\left[\bar{u}\,(\gamma_\mu \ell_\nu + \gamma_\nu \ell_\mu)\gamma_5 (kv) - 2im\,\bar{u}\,\gamma_5 (\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu)\right]$$
$$+ F_4\left[(k_\mu \ell_\nu + k_\nu \ell_\mu)\,\bar{u}\,\gamma_5 (kv) - k^2\,\bar{u}\,\gamma_5\,(\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu)\right] +$$
$$+ F_5\left[\bar{u}\,(k_\mu \gamma_\nu + k_\nu \gamma_\mu)\gamma_5 (kv) - k^2\,\bar{u}\,(\gamma_\mu \gamma_5 v_\nu + \gamma_\nu \gamma_5 v_\mu) + \right.$$
$$\left. + 2im\,\bar{u}\,\gamma_5 (k_\nu v_\mu + k_\mu v_\nu) - 4im\,\delta_{\mu\nu}\,\bar{u}\,\gamma_5 (kv)\right]$$

10) $\frac{3}{2}^-\frac{3}{2}^+ \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $\frac{3}{2}^+\frac{3}{2}^+ \longrightarrow 2^- + 0^-$, $\frac{3}{2}^-\frac{3}{2}^- \longrightarrow 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \bar{u}_\sigma v_\sigma + F_3\,\bar{u}_\sigma(\ell_\mu \gamma_\nu + \ell_\nu \gamma_\mu) v_\sigma + \left[F_4 \ell_\mu \ell_\nu + F_5(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right](\bar{u}k)(kv)$$
$$+ F_6\left[2(k_\mu \ell_\nu + k_\nu \ell_\mu)(\bar{u}k)(kv) - k^2(\bar{u}k)(\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu) - k^2\,(\bar{u}_\nu \ell_\mu + \bar{u}_\mu \ell_\nu)(kv)\right]$$
$$+ F_7\left[(\bar{u}k)(\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu) - (\bar{u}_\mu \ell_\nu + \bar{u}_\nu \ell_\mu)(kv)\right]$$
$$+ F_8\left[2(\bar{u}k)(k_\mu \gamma_\nu + k_\nu \gamma_\mu)(kv) - k^2(\bar{u}k)(\gamma_\mu v_\nu + \gamma_\nu v_\mu) - k^2\,(\bar{u}_\mu \gamma_\nu + \bar{u}_\nu \gamma_\mu)(kv)\right] +$$
$$+ F_9\left[(\bar{u}k)(\gamma_\mu v_\nu + \gamma_\nu v_\mu) - (\bar{u}_\mu \gamma_\nu + \bar{u}_\nu \gamma_\mu)(kv)\right]$$

II) $(2^+ + 0^+)(2^+ + 0^+) \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $(2^- + 0^-)(2^- + 0^-) \longrightarrow 2^+ + 0^+$, $(2^- + 0^-)(2^+ + 0^+) \longrightarrow 2^- + 0^-$ $(h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu})$.

$$
\begin{aligned}
&\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] h'_1 h_1 + \left[F_3 \ell_\mu \ell_\nu + F_4 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] h'_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \\
&+ \left[F_5 \ell_\mu \ell_\nu + F_6 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] k_\alpha h'_{\alpha\beta} k_\gamma h_{\gamma\beta} + \left[F_7 \ell_\mu \ell_\nu + F_8 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} k_\lambda k_\rho h_{\lambda\rho} \\
&+ \left[F_9 \ell_\mu \ell_\nu + F_{10} (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} h_1 + \left[F_{11} \ell_\mu \ell_\nu + F_{12} (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] h'_1 k_\alpha k_\beta h_{\alpha\beta} + \\
&+ F_{13} \left[(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu) k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} h_1 - k^2 (\ell_\mu k_\alpha h'_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h'_{\alpha\mu}) h_1\right] + \\
&+ F_{14} \left[(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu) h'_1 k_\alpha k_\beta h_{\alpha\beta} - k^2 h'_1 (\ell_\mu k_\alpha h_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h_{\alpha\mu})\right] \\
&+ F_{15} \left[2(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu) k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} k_\gamma k_\delta h_{\gamma\delta} - k^2 (\ell_\mu k_\alpha h'_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h'_{\alpha\mu}) k_\gamma k_\delta h_{\gamma\delta} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - k^2 k_\gamma k_\delta h'_{\gamma\delta} (\ell_\mu k_\alpha h_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h_{\alpha\mu})\right] + \\
&+ F_{16} \left[(\ell_\mu k_\alpha h'_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h'_{\alpha\mu}) k_\gamma k_\delta h_{\gamma\delta} - k_\gamma k_\delta h'_{\gamma\delta} (\ell_\mu k_\alpha h_{\alpha\nu} + \ell_\nu k_\alpha h_{\alpha\mu})\right] + \\
&+ F_{17} \left[k^2 (k_\alpha h'_{\alpha\mu} k_\beta h_{\beta\nu} + k_\alpha h'_{\alpha\nu} k_\beta h_{\beta\mu}) - k_\alpha k_\gamma k_\delta (h'_{\alpha\mu} k_\nu + h'_{\alpha\nu} k_\mu) h_{\gamma\delta} - \right. \\
&\qquad \left. - k_\alpha k_\gamma k_\delta h'_{\gamma\delta} (h_{\alpha\mu} k_\nu + h_{\alpha\nu} k_\mu) + 2 \delta_{\mu\nu} k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} k_\gamma k_\delta h_{\gamma\delta}\right] + \\
&+ F_{18} \left[2 (\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu) k_\alpha h'_{\alpha\beta} k_\gamma h_{\gamma\beta} - k^2 (\ell_\mu h'_{\alpha\nu} + \ell_\nu h'_{\alpha\mu}) k_\beta h_{\beta\alpha} - k^2 k_\beta h'_{\beta\alpha} (\ell_\mu h_{\alpha\nu} + \ell_\nu h_{\alpha\mu})\right] \\
&+ F_{19} \left[(\ell_\mu h'_{\alpha\nu} + h'_{\alpha\mu} \ell_\nu) k_\beta h_{\beta\alpha} - k_\beta h'_{\beta\alpha} (\ell_\mu h_{\alpha\nu} + \ell_\nu h_{\alpha\mu})\right] + \\
&+ F_{20} \left[k^2 (h'_{\alpha\mu} h_{\alpha\nu} + h'_{\alpha\nu} h_{\alpha\mu}) - (h'_{\alpha\mu} k_\nu + h'_{\alpha\nu} k_\mu) k_\beta h_{\beta\alpha} - k_\beta h'_{\beta\alpha} (h_{\alpha\mu} k_\nu + h_{\alpha\nu} k_\mu) + \right. \\
&\qquad \left. + 2 \delta_{\mu\nu} k_\alpha h'_{\alpha\beta} k_\gamma h_{\gamma\beta}\right] + \\
&+ F_{21} \left[k^4 h'_{\mu\nu} h_1 - k^2 k_\alpha (k_\mu h'_{\alpha\nu} h_1 + k_\nu h'_{\alpha\mu} h_1) + k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta} h_1\right] + \\
&+ F_{22} \left[k^4 h'_1 h_{\mu\nu} - k^2 k_\alpha h'_1 (k_\mu h_{\alpha\nu} + k_\nu h_{\alpha\mu}) + k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta h'_1 h_{\alpha\beta}\right] + \\
&+ F_{23} \left[k^4 h'_{\mu\nu} - k^2 k_\alpha (k_\mu h'_{\alpha\nu} + k_\nu h'_{\alpha\mu}) + k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta h'_{\alpha\beta}\right] k_\gamma k_\delta h_{\gamma\delta} + \\
&+ F_{24} \quad k_\gamma k_\delta h'_{\gamma\delta} \left[k^4 h_{\mu\nu} - k^2 k_\alpha (k_\mu h_{\alpha\nu} + k_\nu h_{\alpha\mu}) + k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta h_{\alpha\beta}\right]
\end{aligned}
$$

Симметричные тензорные токи, построенные из поля со спином 0 φ_μ и полей со спином I a_μ и ℓ_μ

I) $0^+0^+ \to 2^+ + 0^+$, $0^-0^- \to 2^+ + 0^+$, $0^-0^+ \to 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right] \varphi'_\lambda \varphi_\lambda$$

2) $I^+0^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^-0^- \to 2^+ + 0^+$, $I^+0^- \to 2^- + 0^-$, $I^-I^+ \to 2^- + 0^-$

$$F\left(\ell_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} + \ell_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\right) \ell_\alpha a_\beta \varphi_\gamma$$

3) $I^+0^- \to 2^+ + 0^+$, $I^-0^+ \to 2^+ + 0^+$, $I^+0^+ \to 2^- + 0^-$, $I^-0^- \to 2^- + 0^-$

$$\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\right](a\varphi) + F_3\left[(\ell_\mu k_\nu + \ell_\nu k_\mu)(a\varphi) - 2(\ell_\mu a_\nu - \ell_\nu a_\mu)(k\varphi)\right]$$

. . .

Тождества, связывающие различные выражения для токов и выбор независимых выражений

Все выписанные выше токи независимы. Однако можно записать и другие выражения, которые при помощи некоторых тождеств сводятся к выписанным.

Прежде всего отметим красивое тождество

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\delta_{\sigma\tau} = \varepsilon_{\sigma\nu\lambda\rho}\delta_{\mu\tau} + \varepsilon_{\mu\sigma\lambda\rho}\delta_{\nu\tau} + \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\delta_{\lambda\tau} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\delta_{\rho\tau},$$

которое получается путем полной антисимметризации по индексам $\mu\nu\lambda\rho\sigma$ с учетом того факта, что в 4-мерном пространстве они не могут быть все разными. Оно лежит в основе очень многих тождеств, связывающих различные выражения для токов.

Теперь проиллюстрируем связи между токами, построенными из дираковских частиц (здесь $p^2 = -m_1^2$, $q^2 = -m_2^2$):

$$\left(1 - \frac{qp}{m_1 m_2}\right)\bar{u}(q)\gamma_\nu u(p) = -\frac{i}{m_1 m_2}(q_\nu m_1 + p_\nu m_2)\bar{u}(q)u(p) + \frac{1}{m_1 m_2}\varepsilon_{\nu\tau\sigma\rho}p_\tau q_\sigma \bar{u}(q)\gamma_\rho\gamma_5 u(p)$$

$$\left(1 + \frac{qp}{m_1 m_2}\right)\bar{u}(q)\gamma_\nu\gamma_5 u(p) = -\frac{i}{m_1 m_2}(m_1 q_\nu - m_2 p_\nu)\bar{u}(q)\gamma_5 u(p) - \frac{1}{m_1 m_2}\varepsilon_{\nu\tau\sigma\rho}p_\tau q_\sigma \bar{u}(q)\gamma_\rho u(p)$$

$$\left(1 + \frac{qp}{m_1 m_2}\right)\bar{u}(q)\sigma_{\mu\nu}u(p) = \frac{i}{m_1 m_2}\Big[(p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu)\bar{u}(q)u(p) - \varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}p_\tau q_\sigma \bar{u}(q)\gamma_5 u(p) +$$
$$+ i(m_1 q_\mu - m_2 p_\mu)\bar{u}(q)\gamma_\nu u(p) - i(m_1 q_\nu - m_2 p_\nu)\bar{u}(q)\gamma_\mu u(p)\Big]$$

$$\left(1 - \frac{pq}{m_1 m_2}\right)\bar{u}(q)\sigma_{\mu\nu}u(p) = \frac{i}{m_1 m_2}\Big\{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda q_\rho \bar{u}(q)\gamma_5 u(p) - (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu)\bar{u}(q)u(p) -$$
$$- i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(m_1 q_\lambda + m_2 p_\lambda)\bar{u}(q)\gamma_\rho\gamma_5 u(p)\Big\}$$

$$\left(1-\frac{pq}{m_1m_2}\right)\bar u(q)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u(p)=-\frac{i}{m_1m_2}\Big\{(p_\mu q_\nu-p_\nu q_\mu)\bar u(q)\gamma_5 u(p)-\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}p_\tau q_\sigma\bar u(q)u(p)-$$
$$-i(m_1q_\mu+m_2p_\mu)\bar u(q)\gamma_\nu\gamma_5 u(p)+i(m_1q_\nu+m_2p_\nu)\bar u(q)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)\Big\}$$

$$\bar u(q)\gamma_5 u(p)=\frac{i(\alpha m_2p_\sigma-\beta m_1q_\sigma)}{m_1m_2}\bar u(q)\gamma_\sigma\gamma_5 u(p)$$

$$\alpha+\beta=1$$

$$\bar u(q)u(p)=-\frac{i(\alpha m_2p_\sigma+\beta m_1q_\sigma)}{m_1m_2}\bar u(q)\gamma_\sigma u(p)$$

Первые пять соотношений получены путем введения с помощью уравнений

$$(i\gamma p+m_1)u(p)=0,\quad \bar u(q)(i\gamma q+m_2)=0$$

дополнительных матриц: $\bar u\,\Gamma u=\bar u\frac{i\gamma q}{-m_2}\Gamma\frac{i\gamma p}{-m_1}u$ и разложения комбинации $\gamma q\,\Gamma\gamma p$ по полной системе дираковских матриц. Последние два соотношения получены с помощью приема:

$$\bar u\,\Gamma u=\bar u\,\Gamma\frac{i\gamma p}{-m_1}u=\bar u\frac{i\gamma q}{-m_2}\Gamma u=\bar u\left(\alpha\Gamma\frac{i\gamma p}{-m_1}+\beta\frac{i\gamma q}{-m_2}\Gamma\right)u\qquad(\alpha+\beta=1)$$

Произвольные параметры α и β удобно выбрать, например, в виде $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ или в виде $\alpha=\frac{m_1}{m_1+m_2}$, $\beta=\frac{m_2}{m_1+m_2}$.

При рассмотрении структуры вершин $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}$ и $\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$ достаточно использовать только матрицы I и γ_μ. Матрица γ_5 могла бы входить только в комбинациях

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha \ell_\beta\,\bar u(q)\gamma_5 v_\gamma(p),\ \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha\bar v'_\beta(q)\gamma_5 v_\gamma(p),\ \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\ell_\alpha\bar v'_\beta(q)\gamma_5 v_\gamma(p)\ .$$

Все эти комбинации можно свести к указанным с помощью тождества

$$\varepsilon_{\beta\mu\alpha\gamma}\gamma_5=\delta_{\beta\gamma}\delta_{\mu\alpha}-\delta_{\mu\gamma}\delta_{\beta\alpha}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}-\delta_{\alpha\gamma}\gamma_\beta\gamma_\mu+\delta_{\mu\gamma}\gamma_\beta\gamma_\alpha-\delta_{\beta\gamma}\gamma_\mu\gamma_\alpha-\delta_{\mu\alpha}\gamma_\beta\gamma_\gamma+$$
$$+\delta_{\alpha\beta}\gamma_\mu\gamma_\gamma-\delta_{\mu\beta}\gamma_\alpha\gamma_\gamma+\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\gamma$$

При этом

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha\ell_\beta\,\bar u(q)\gamma_5 v_\gamma(p)=(k_\mu-\ell_\mu)\bar u(kv)-[k^2+(m_1-m_2)^2]\bar u v_\mu+2im_1\bar u\gamma_\mu(kv)$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha\ell_\beta\,\bar v_\gamma(q)\gamma_5 u(p)=-(k_\mu+\ell_\nu)(\bar v k)u+[k^2+(m_1-m_2)^2]\bar v_\mu u+2im_2(\bar v k)\gamma_\mu u$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\bar v'_\beta\gamma_5 v_\gamma=-i\bar v'_\sigma\sigma_{\mu\alpha}v_\sigma-\bar v'_\alpha v_\mu+\bar v'_\mu v_\alpha$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha\bar v'_\beta\gamma_5 v_\gamma=-\ell_\mu\bar v'_\sigma v_\sigma+i(m_1+m_2)\bar v'_\sigma\gamma_\mu v_\sigma-(\bar v'k)v_\mu+\bar v'_\mu(kv)$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\ell_\alpha\bar v'_\beta\gamma_5 v_\gamma=-k_\mu\bar v'_\sigma v_\sigma+i(m_1-m_2)\bar v'_\sigma\gamma_\mu v_\sigma+(\bar v'k)v_\mu-\bar v'_\mu(kv)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_\alpha \ell_\beta \bar{v}'_\gamma \gamma_5 v_\delta = -\left[k^2 + (m_1 - m_2)^2\right] \bar{v}'_\sigma v_\sigma + 2(\bar{v}'k)(kv) =$$

$$= \left[\ell^2 + (m_1 + m_2)^2\right] \bar{v}'_\sigma v_\sigma + 2(\bar{v}'k)(kv) \; .$$

Матрицы $\gamma_\mu \gamma_5$ сводятся к γ_5 и $\sigma_{\mu\nu}$

$$\bar{u}(q)\,\gamma_\mu\gamma_5 v(p) = \bar{u}(q)\frac{i\gamma q}{-m_2}\gamma_\mu\gamma_5 u(p) = \bar{u}(q)\,\gamma_\mu \frac{i\gamma p}{m_1}\gamma_5 u(p) = \bar{u}(q)\frac{i\left[-m_1(\gamma q)\gamma_\mu + m_2\gamma_\mu(\gamma p)\right]}{2m_1 m_2}\gamma_5 u(p)$$

$$= -\frac{i}{2m_1 m_2}(m_1 q_\mu - m_2 p_\mu)\bar{u}(q)\gamma_5 u(p) - \frac{1}{2m_1 m_2}(m_1 q_\sigma + m_2 p_\sigma)\bar{u}(q)\sigma_{\mu\sigma}\gamma_5 u(p).$$

Матрицу γ_5 можно исключить по только что приведенным формулам, а матрицы $\sigma_{\mu\nu}$ также не могут остаться, ибо в симметричном тензорном токе оба индекса σ не могут быть значащими. Один из индексов всегда свернут либо с p , с q либо с v_γ , а все такие выражения упрощаются.

Итак, можно ограничиться только матрицами I и γ_μ . Однако при рассмотрении вершины $\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}$ к выписанным в перечне выражениям можно было бы добавить еще 2 члена, содержащих I и γ_μ , а именно:

$$F(\bar{v}'k)(\ell_\mu\gamma_\nu + \ell_\nu\gamma_\mu)(kv) + F'\left\{k^2(\bar{v}'_\mu v_\nu + \bar{v}'_\nu v_\mu) - \right.$$

$$\left. - k_\mu\left[(\bar{v}'k)v_\nu + \bar{v}'_\nu(kv)\right] - k_\nu\left[(\bar{v}'k)v_\mu + \bar{v}'_\mu(kv)\right] + 2\delta_{\mu\nu}(\bar{v}'k)(kv)\right\} \; .$$

Однако эти выражения не независимы и связаны с приведенными двумя тождествами

$$2(\bar{v}'k)\gamma_\nu(kv) = 2im\left[\ell_\nu \bar{v}'_\sigma v_\sigma - \bar{v}'_\nu(kv) + (\bar{v}'k)v_\nu\right] - \ell^2\,\bar{v}'_\sigma\gamma_\nu v_\sigma$$

$$\ell_\mu\ell_\nu\,\bar{v}'_\sigma v_\sigma \; - \; (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\bar{v}'_\sigma v_\sigma - im\,\bar{v}'_\sigma(\ell_\mu\gamma_\nu + \ell_\nu\gamma_\mu)v_\sigma +$$

$$+(\bar{v}'k)(\ell_\mu v_\nu + \ell_\nu v_\mu) - (\bar{v}'_\mu\ell_\nu + \bar{v}'_\nu\ell_\mu)(kv) + im\left[(\bar{v}'_\mu\gamma_\nu + \bar{v}'_\nu\gamma_\mu)(kv) - (\bar{v}'k)(\gamma_\mu v_\nu + \gamma_\nu v_\mu)\right] -$$

$$-\left[k^2(\bar{v}'_\mu v_\nu + \bar{v}'_\nu v_\mu) - k_\mu\left((\bar{v}'k)v_\nu + \bar{v}_\nu(kv)\right) - k_\nu\left((\bar{v}'k)v_\mu + \bar{v}'_\mu(kv)\right) + 2\delta_{\mu\nu}(\bar{v}'k)(kv)\right] = 0$$

Эти тождества суть следствия более общего тождества

$$
l_\mu l_\nu \bar{v}'_\sigma v_\sigma - (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2)\bar{v}'_\sigma v_\sigma - \Big[k^2(\bar{v}'_\mu v_\nu + \bar{v}'_\nu v_\mu) - k_\mu\big((\bar{v}'k)v_\nu + \bar{v}'_\nu(kv)\big) -
$$

$$
- k_\nu\big((\bar{v}'k)v_\mu + \bar{v}'_\mu(kv)\big) + 2\delta_{\mu\nu}(\bar{v}'k)(kv)\Big] + 2im\big[\bar{v}'_\mu \gamma_\nu (kv) - (\bar{v}'k)\gamma_\nu v_\mu\big] +
$$

$$
+ (\bar{v}'k)(l_\nu v_\mu + l_\mu v_\nu) - (\bar{v}'_\mu l_\nu + \bar{v}'_\nu l_\mu)(kv) - 2im\, \bar{v}'_\sigma l_\mu \gamma_\nu v_\sigma = 0 .
$$

Они получаются путем свертывания последнего тождества с l_μ и путем его симметризации. Если антисимметризовать последнее тождество, придем к тождеству для антисимметричных вершин.

При большом числе векторных индексов в том или ином выражении, например, в случае токов, построенных из $h_{\mu\nu}$, существуют тождества, следующие из обращения в нуль детерминантов, построенных из символов Кронекера,

$$
\begin{vmatrix} \delta_{\mu_1\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_1\nu_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{\mu_n\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_n\nu_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{при} \quad n > 4 .
$$

Даже при $n = 5$ отсюда следует, вообще говоря, тождество только между 120 выражениями. Если мы имеем в распоряжении меньшее число выражений, то это тождество будет малополезно. Однако если выражения построены из симметричных величин типа $h_{\mu\nu}, k_\mu k_\nu$, то количество членов, связываемых тождеством, уменьшается и оно может иметь практическую пользу.

<u>Тождества, полезные при проверке группового свойства законов преобразования</u>

В тождествах, которые сейчас будут приведены, антисимметрия параметров $\omega_{\mu\nu}$ и симметрия $p_\mu p_\nu$ ведет в соответствии со сказанным выше к уменьшению числа членов.

$$
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\omega_{1\alpha\beta}\omega_{2\mu\nu}p_\gamma p_\lambda = p^2\Big[2\Big(\delta_{\delta\rho} - \frac{p_\delta p_\rho}{p^2}\Big)\Big(\delta_{\alpha\mu} - \frac{p_\alpha p_\mu}{p^2}\Big) - 4\Big(\delta_{\delta\mu} - \frac{p_\delta p_\mu}{p^2}\Big)\Big(\delta_{\alpha\rho} - \frac{p_\alpha p_\rho}{p^2}\Big)\Big] \cdot \Big(\delta_{\beta\nu} - \frac{p_\nu p_\beta}{p^2}\Big)\omega_{1\alpha\beta}\omega_{2\mu\nu}
$$

$$
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\omega_{2\mu\nu}\omega_{1\alpha\beta}p_\gamma p_\lambda = 2p^2\Big(\delta_{\alpha\mu} - \frac{p_\alpha p_\mu}{p^2}\Big)\Big(\delta_{\beta\nu} - \frac{p_\beta p_\nu}{p^2}\Big)\omega_{1\alpha\beta}\omega_{2\mu\nu}
$$

$$
\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda \omega_{1\rho\sigma}\omega_{2\mu\nu}b_\sigma = 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda\Big(\delta_{\sigma\tau} + \frac{p_\sigma p_\tau}{\mu^2}\Big)\omega_{1\mu\sigma}\omega_{2\nu\tau}b_\rho
$$

$$
\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{\mu}\omega_{\rho\sigma}b_\sigma = \Big(\delta_{\mu\rho} + \frac{p_\mu p_\rho}{\mu^2}\Big)\omega_{\rho\tau}\varepsilon_{\tau\nu\lambda\sigma}\frac{p_\lambda}{\mu}b_\sigma - \Big(\delta_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{\mu^2}\Big)\omega_{\rho\tau}\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma}\frac{p_\lambda}{\mu}b_\sigma
$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}\omega_{\alpha\beta}p_\lambda b_\nu = 2\left(\delta_{\nu\rho}+\frac{p_\nu p_\rho}{\mu^2}\right)\omega_{\rho\tau}\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma}p_\lambda b_\sigma + \left(\delta_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{\mu^2}\right)\omega_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}p_\lambda b_\rho$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{p_\gamma}{m}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\gamma_\delta\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\left(\omega^b_{1\alpha\beta}\omega^d_{2\mu\nu}-\omega^b_{2\alpha\beta}\omega^d_{1\mu\nu}\right)d_{abc}d_{cde}u^e(p)=$$

$$=2\left(\delta_{\alpha\gamma}+\frac{p_\alpha p_\gamma}{m^2}\right)\left(\delta_{\beta\delta}+\frac{p_\beta p_\delta}{m^2}\right)\omega^b_{1\alpha\beta}\omega^d_{2\gamma\delta}[d_b,d_d]_{ae}u^e(p)+$$

$$+4i\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\gamma_\rho\gamma_5\,\omega^b_{1\mu\alpha}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{p_\alpha p_\beta}{m^2}\right)\omega^d_{2\nu\beta}\{d_b,d_d\}_{ae}u^e(p)$$

$$\frac{-i\gamma p+m}{2m}\sigma_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\gamma_\rho\gamma_5+\sigma_{\mu\nu}\frac{i\gamma p+m}{2m}$$

$$\omega_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}\gamma_\rho\gamma_5 u=\hat{\omega}_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}u$$

$$\omega_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{p_\lambda}{m}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{p_\alpha p_\beta}{m^2}\right)\gamma_\alpha\gamma_5\gamma_\sigma\gamma_5 u_\rho = 2i\,\hat{\omega}_{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_5 u_\rho - 2\,\hat{\omega}_{\rho\nu}\varepsilon_{\nu\beta\lambda\sigma}\frac{p_\lambda}{m}u_\sigma -$$
$$-\left(\delta_{\beta\rho}+\frac{p_\beta p_\rho}{m^2}\right)\omega_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{p_\lambda}{m}u_\sigma$$

$$\omega_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}u_\rho=-2i\,\hat{\omega}_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_5 u_\nu$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{\omega}_{1\alpha\beta}\hat{\omega}_{2\gamma\delta}=0$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{\omega}_{1\alpha\beta}\hat{\omega}_{2\mu\gamma}u_\delta=0$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}f_{abc}\left(\hat{\omega}^b_{1\alpha\beta}\hat{\omega}^c_{2\gamma\delta}-\hat{\omega}^b_{2\alpha\beta}\hat{\omega}^c_{1\gamma\delta}\right)=0$$

$$2\,\hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\omega}_{\nu\lambda}u_\lambda=-\sigma_{\nu\lambda}\hat{\omega}_{\nu\lambda}u_\mu$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p_\lambda}{m}u_\rho=i\left(\hat{\gamma}_\nu\gamma_5 u_\mu-\hat{\gamma}_\mu\gamma_5 u_\nu\right)\qquad\left(\hat{\gamma}_\mu=\left(\delta_{\mu\mu'}+\frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}\right)\gamma_{\mu'}\right)$$

При выводе тождеств существенно используются свободные уравнения.

Получение выражений для генераторов.

Проиллюстрируем типичные операции, с помощью которых генераторы записываются в той форме, в которой они представлены в п.4. Возьмем для примера сохраняющийся ток вида

$$\bar{u}(q)\left[F_1 l_\mu l_\nu+F_2\left(l_\mu\sigma_{\nu\rho}k_\rho+l_\nu\sigma_{\mu\rho}k_\rho\right)\right]u(p)\ ,\qquad(\text{П.I.I})$$

где ток при F_2 есть линейная комбинация первых двух токов в перечне тензорных токов выше

$$\bar u(q)\left[\ell_\mu \sigma_{\nu\rho}k_\rho + \ell_\nu \sigma_{\mu\rho}k_\rho\right]u(p) = 2i\,\bar u(q)\left[-\ell_\mu \ell_\nu + iM(\ell_\mu \gamma_\nu + \ell_\nu \gamma_\mu)\right]u(p)\ .$$

Отметим, что такой ток, построенный из спиноров, использовался Кобзаревым и Окунем /12/.

Преобразуем ток (П.I.I) в x-пространство

$$J_{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-3}\int d^4p\, d^4q\, e^{-ikx}\,\bar u(q)\left[F_1 \ell_\mu \ell_\nu + F_2(\ell_\mu \sigma_{\nu\rho}k_\rho + \ell_\nu \sigma_{\mu\rho}k_\rho)\right]u(p)\ . \qquad (\text{П.I.2})$$

При этом разложения свободных полей по плоским волнам подразумеваются взятыми в виде

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d^4p\ u(p)e^{ipx} + \cdots\ , \qquad (\text{П.I.3})$$

где $u(p)$ связаны с $u(\vec p)$ в разложении (33) соотношением

$$u(p) = u(\vec p)\,\theta(p_0)\,\delta(p^2+M^2)\ . \qquad (\text{П.I.4})$$

Теперь запишем момент этого тока

$$J_{\lambda,\mu\nu} = x_\mu J_{\nu\lambda} - x_\nu J_{\mu\lambda} =$$

$$= i(2\pi)^{-3}\int d^4p\, d^4q\left\{\left(\frac{\partial}{\partial k_\mu}e^{-ikx}\right)\bar u(q)\left[F_1 \ell_\nu \ell_\lambda + F_2(\ell_\nu \sigma_{\lambda\rho}k_\rho + \ell_\lambda \sigma_{\nu\rho}k_\rho)\right]u(p) - (\mu\nu)\right\} =$$

$$= -i(2\pi)^{-3}\int d^4p\, d^4q\, e^{-ikx}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\mu}\left[\bar u(q)\left[F_1 \ell_\nu \ell_\lambda + F_2(\ell_\nu \sigma_{\lambda\rho}k_\rho + \ell_\lambda \sigma_{\nu\rho}k_\rho)\right]u(p)\right] - (\mu\nu)\right\}\ . \qquad (\text{П.I.5})$$

Для получения выражения в последней строке мы проинтегрировали по частям с учетом того, что $\frac{\partial}{\partial k_\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} - \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)$. Теперь построим оба типа генераторов, которые порождает сохраняющийся симметричный тензорный ток $J_{\mu\nu}$. Генератор первого типа записывается в виде

$$V_\nu = -i\int d\vec x\, J_{4\nu} =$$

$$= -i\int d^4p\, d^4q\, e^{ik_0x_0}\,\delta(\vec k)\,\bar u(q)\left[F_1 \ell_4 \ell_\nu + F_2(\ell_4 \sigma_{\nu\rho}k_\rho + \ell_\nu \sigma_{4\lambda}k_\lambda)\right]u(p) =$$

$$= 2\int \frac{d\vec p}{2p_0}\, F_1\, p_\nu\, \bar u(\vec p)\,u(\vec p)\ . \qquad (\text{П.I.6})$$

Последнее выражение получено с использованием соотношения (П.I.4). С учетом $\delta(\vec k)$ и (П.I.4) вектор $k_\lambda = q_\lambda - p_\lambda$ обратился в нуль, и член с формфактором F_2 не внес вклада. Естественно, что не дает вклада и член квадратичный по k_μ. Для второго генератора имеем

$$V_{\mu\nu} = -i\int d\vec x\, J_{4,\mu\nu} =$$

$$= -\int d^4p\, d^4q\, e^{ik_0x_0}\,\delta(\vec k)\left\{F_1 \ell_\nu \ell_4 \frac{\partial}{\partial k_\mu}\bar u(q)u(p) + F_2\left[\ell_\nu \bar u(q)\sigma_{4\mu}u(p) + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \ell_4 \bar u(q)\sigma_{\mu\nu}u(p) + \ell_\nu k_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\mu}\bar u(q)\sigma_{4\sigma}u(p) + \ell_4 k_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\mu}\bar u(q)\sigma_{\nu\sigma}u(p)\right] - (\mu\nu)\right\}\ .$$

(П.I.7)

Здесь, благодаря присутствию δ-функции $\delta(\vec k)$, можно всюду k_σ заменить на k_4, а $\ell_4 k_4$ на ℓk. Далее имеем

$$\ell k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \bar u(q) \sigma_{\nu 4} u(p) = \frac{\partial}{\partial k_\mu}\left[\ell k\, \bar u(q)\sigma_{\nu 4} u(p)\right] - \ell_\mu \bar u(q)\sigma_{\nu 4} u(p) = \ell_\mu \bar u(q) \sigma_{4\nu} u(p). \qquad (\text{П.I.8})$$

Член с производной обратился в нуль из-за того, что $\ell k = q^2 - p^2$,а эта комбинация есть нуль с учетом (П.I.4). Оставшийся член дополняет до симметричного выражения первый член в квадратной скобке (П.I.7), и оба они исчезают при антисимметризации. Что касается члена при F_1 , то он с учетом присутствия $\delta(\vec k)$ может быть преобразован к виду

$$F_1 \ell_4 \left(q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\mu} - q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} + p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)\left(\bar u(q) u(p)\right). \qquad (\text{П.I.9})$$

Стоящие здесь операторы момента количества движения $q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\mu} - q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\nu}$ и $p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}$ коммутируют с $\theta(q_0)\delta(q^2+M^2)$ и $\theta(p_0)\delta(p^2+M^2)$. Поэтому мы можем вынести последние комбинации из-под операторов момента, оставив там только величины $u(\vec p)$ и $\bar u(\vec q)$ (см. (П.I.4)). Интегрируя после этого при помощи всех δ -функций, получаем окончательно

$$V_{\mu\nu} = -i\int \frac{d\vec p}{2p_0}\left\{F_1\left[\left(p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)\bar u(\vec p)\cdot u(\vec p) - \bar u(\vec p)\left(p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)u(\vec p)\right] + \right.$$
$$\left. - 2F_2\, \bar u(\vec p)\sigma_{\mu\nu} u(\vec p)\right\}. \qquad (\text{П.I.10})$$

Отметим, что за счет первой поизводной по k_μ во второй тип генераторов токи, линейные по k , вклад вносят, но квадратичные по-прежнему дают нулевой вклад, поскольку переход к генератору означает обращение вектора k в нуль.

Как следствие сохранения токов,из генераторов выпала зависимость от времени (экспонента $e^{ik_0x_0}$) исчезла .

Приложение 2. Дополнительные соотношения восьмиричного формализма, развитого в[13]

$$c_{ab} d_c = \frac{1}{5}(c_{ab})_{cm} d_m + \frac{1}{4}\{c_{ab}, d_c\}_{mn} c_{mn} + \frac{1}{4}\{c_{ab}, f_c\}_{mn} u_{mn}$$

$$c_{ab} f_c = -\frac{1}{3}(c_{ab})_{cm} f_m - \frac{1}{8}\{u_{mn} f_c\}_{ab} u_{mn} + \frac{3}{10} d_{abm} u_{mc} + \frac{1}{2}\left(f_{ace} c_{eb} + f_{bce} c_{ae}\right)$$

$$u_{ab} d_c = -\frac{2}{9}[f_a, f_b]_{cm} f_m - \frac{1}{12}(u_{ab})_{mn}[u_{mn}, f_c] + \frac{1}{5}\left(f_a \delta_{bc} - f_b \delta_{ac}\right) +$$
$$+ \frac{2}{5}(u_{ab})_{cn} d_n - f_{ace} c_{eb} - f_{bce} c_{ae} - \frac{2}{3} f_{abe} c_{ec}$$

$$u_{ab} f_c = \frac{1}{2}\left(f_{ace} u_{eb} + f_{bce} u_{ae}\right) + \frac{3}{10}\langle u_{ab} u_{cm}\rangle d_m + \frac{1}{2}\{u_{ab}, f_c\}_{mn} c_{mn}.$$

Некоторые входящие сюда комбинации могут быть упрощены следующим образом :

$$\{c_{ab} f_c\}_{mn} u_{mn} = - f_{ace} u_{eb} + f_{bce} u_{ae} + \frac{3}{5} d_{abe} (u_{ec})_{mn} u_{mn}$$

$$\{c_{ab} d_c\}_{mn} c_{mn} = -\frac{2}{5} d_{abe} c_{ec} + \frac{1}{2}\left(d_{ace} c_{eb} + d_{bce} c_{ae}\right)$$

$$\{u_{mn} f_c\}_{ab} u_{mn} = - f_{ace}(u_{eb})_{mn} u_{mn} + f_{bce}(u_{ae})_{mn} u_{mn}$$

$$\{u_{ab}, f_c\}_{mn} c_{mn} = -2 d_{ace} c_{eb} + 2 d_{bce} c_{ae}$$

$$(u_{ab})_{kl}\{u_{kl}, d_c\} = \frac{4}{6}[u_{ab}, f_c] - \frac{4}{3}(u_{ab})_{cd} f_d \ .$$

Иногда полезны соотношения с перестановками индексов

$$(u_{ab})_{cd} - (u_{ac})_{bd} = -2 d_{ade}(f_e)_{bc}$$

$$(u_{ab})_{cd} + (u_{ac})_{bd} = 2 f_{ade} d_{ceb}$$

$$\langle u_{ab} u_{cd} + u_{ac} u_{db} + u_{ad} u_{bc}\rangle = 0$$

$$\langle u_{ab} u_{cd} + u_{ac} u_{bd}\rangle = \frac{5}{2}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{24}{5} d_{ade} d_{ebc} - \frac{4}{3}(c_{ad})_{bc}$$

$$(e_{ab})_{cd} + (e_{ac})_{bd} = (u_{ab})_{cd} + (u_{ac})_{bd} + \frac{i}{2}\left(\langle u_{ab} u_{cd}\rangle + \langle u_{ac} u_{bd}\rangle\right) =$$

$$= 2 f_{ade} d_{ceb} + \frac{5i}{4}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{12i}{5} d_{ade} d_{ebc} - \frac{2i}{3}(c_{ad})_{bc}$$

$$(e_{ab})_{cd} - (e_{ac})_{bd} = -2 d_{ade}(f_e)_{bc} - \frac{i}{2}\langle u_{ad} u_{bc}\rangle$$

$$(e^+_{ab})_{cd} + (e^+_{ac})_{bd} = -2 f_{ade} d_{ceb} + \frac{5i}{4}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{12i}{5} d_{ade} d_{ebc} - \frac{2i}{3}(c_{ad})_{bc}$$

$$(e^+_{ab})_{cd} - (e^+_{ac})_{bd} = 2 d_{ade}(f_e)_{bc} - \frac{i}{2}\langle u_{ad} u_{bc}\rangle$$

$$[u_{ab}, f_c]_{mn} = [u_{mn}, f_c]_{ab} \ , \qquad (u_{ab})_{mn}[u_{mn}, f_c]_{kl} = -(u_{kl})_{mn}[u_{mn}, f_c]$$

$$[e_{ab}, f_c]_{mn} = -[e^+_{mn}, f_c]_{ab} \ .$$

Приложение 3. Проекционные операторы и оператор квадрата спина

Обычные поля, например, тензорные $\varphi_{\mu_1\cdots\mu_s}$ или спинорно-тензорные $\psi_{\mu_1\cdots\mu_k}$, описывают несколько спинов. Поэтому при записи уравнений, перестановочных соотношений, пропагаторов и т.д. бывает важно осуществить проецирование на более узкое подпространство с одним или несколькими спинами. Такое проецирование на подпространства с различными спинами в наиболее общем виде производится с помощью оператора квадрата спина.

Обычно оператор квадрата спина имеет конечное число собственных значений (например, для упомянутых полей) и, следовательно, аннулирует соответствующий минимальный многочлен

$$\prod_n^s \left[\hat{S}^2 - n(n-1)\right] = 0 \ , \tag{П.3.I}$$

где n пробегает значения $0, \cdots s$ для $\varphi_{\mu_1\cdots\mu_s}$ и $\frac{I}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... $= K + \frac{I}{2}$ для $\psi_{\mu_1\cdots\mu_k}$. Например, для спинорного дираковского поля

$$\hat{S}^2 - \frac{3}{4} = 0 \quad , \tag{П.3.2}$$

для векторного поля

$$\hat{S}^2(\hat{S}^2 - 2) = 0 \quad , \qquad \hat{S}^2 = 2\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}\right) \quad , \tag{П.3.3}$$

для спинорно-тензорного

$$\left(\hat{S}^2 - \frac{3}{4}\right)\left(\hat{S}^2 - \frac{15}{4}\right) = 0 , \tag{П.3.4}$$

для тензорного поля

$$\hat{S}^2 (\hat{S}^2 - 2)(\hat{S}^2 - 6) = 0 \tag{П.3.5}$$

и т.д. Зная собственные значения $\hat{S}^2$, легко построить проекционные операторы, способные выделить у поля тот или иной спин. Так, векторное поле разбивается на части со спинами 0 и I

$$b_\mu = P^{(0)} b_\mu + P^{(1)} b_\mu = \frac{\hat{S}^2 - 2}{-2} b_\mu + \frac{\hat{S}^2}{2} b_\mu , \tag{П.3.6}$$

спинорно-тензорное ψ_μ — на части со спинами $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$

$$\psi_\mu = P^{(\frac{1}{2})} \psi_\mu + P^{(\frac{3}{2})} \psi_\mu = \frac{\hat{S}^2 - \frac{15}{4}}{-3} \psi_\mu + \frac{\hat{S}^2 - \frac{3}{4}}{3} \psi_\mu , \tag{П.3.7}$$

тензорное поле $h_{\mu\nu}$ на части со спинами 0, I и 2

$$h_{\mu\nu} = P^{(0)} h_{\mu\nu} + P^{(1)} h_{\mu\nu} + P^{(2)} h_{\mu\nu} =$$
$$= \frac{(\hat{S}^2 - 6)(\hat{S}^2 - 2)}{12} h_{\mu\nu} + \frac{(\hat{S}^2 - 6)\hat{S}^2}{-8} h_{\mu\nu} + \frac{(\hat{S}^2 - 2)\hat{S}^2}{24} h_{\mu\nu} . \tag{П.3.8}$$

И вообще оператор, проецирующий на подпространство с одним каким-либо спином σ, имеет вид

$$P^{(\sigma)} = \prod_n^{s}{}' \left[\frac{\hat{S}^2 - n(n-1)}{\sigma(\sigma-1) - n(n-1)} \right] , \tag{П.3.9}$$

где штрих означает, что в произведении пропущен множитель с $n = \sigma$. В принципе, умея строить проекционные операторы из оператора квадрата спина, легко записать некоторый класс свободных уравнений для любого спина

$$\left(\Box P^{(\sigma)} - \mu^2\right) \varphi_{\mu_1 \ldots \mu_s} = 0 \quad , \tag{П.3.I0}$$

$$\left(\Box P^{(\sigma)} - \mu^2\right) \varphi_{\mu_1 \ldots \mu_k} = 0 \quad . \tag{П.3.II}$$

Если заменить в этих уравнениях $P^{(\sigma)}$ на $P^{(\sigma_1)} + P^{(\sigma_2)} + \cdots$, то мы получим уравнения, описывающие по нескольку спинов. Проекционные операторы, построенные из оператора квадрата спина, позволяют сразу же записать в общем виде функцию распространения для поля со спином s

$$G = \frac{\Box P^{(s)} - \Box + \mu^2}{\mu^2(\Box - \mu^2)} \quad . \tag{П.3.12}$$

Среди выписанных уравнений содержится уравнение Прока

$$\left(\Box \frac{\hat{S}^2}{2} - \mu^2\right) b_\mu = \Box b_\mu - \partial_\mu \partial_\nu b_\nu - \mu^2 b_\mu = 0$$

с обратным оператором

$$G = \frac{\Box \frac{\hat{S}^2}{2} - \Box + \mu^2}{\mu^2(\Box - \mu^2)} = \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\mu^2}}{\Box - \mu^2} \tag{П.3.13}$$

и уравнение

$$\left(\Box \frac{\hat{S}^2 - 2}{-2} - m^2\right) \varphi_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \varphi_\nu - m^2 \varphi_\mu = 0 \tag{П.3.14}$$

для векторного поля φ_μ со спином 0. (Действительно, из последнего уравнения следует дополнительное условие

$$\partial_\mu \varphi_\nu = \partial_\nu \varphi_\mu \ ).$$

Однако остальные уравнения (П.3.10) и (П.13.11) неприемлемы по следующим причинам. Они содержат высокие степени операторов $\Box$ в знаменателе, т.е. нелокальны, а если попытаться компенсировать эти нелокальности умножением на $\frac{\Box}{\mu^2}$ в подходящей степени, то придем к уравнениям высокого порядка. Уравнения (П.3.11) вообще непригодны, так как они в лучшем случае суть уравнения второго порядка.

Однако необходимости в этих уравнениях нет, так как нам хорошо известны уравнения первого и второго порядка для описания того или иного спина. Из этих уравнений следуют все дополнительные условия, выделяющие определенное значение спина. Вместе с тем, в этих стандартных теориях будет оставаться справедливым выражение для функции распространения (П.3.12), и именно проекционные операторы стоят в правых частях перестановочных соотношений. (см.п.5). Однако здесь следует отметить следующее. Если поля $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ и $\psi_{\mu_1 \dots \mu_k}$ описывают только по одному максимальному значению спина s (и здесь достаточно проекционных операторов, построенных из оператора квадрата спина), то эти поля описывают по нескольку одинаковых спинов, меньших s . Так, поле ψ_μ описывает два спина $\frac{1}{2}$, и проекционный оператор $P^{(\frac{1}{2})}$ разбивается на два

$$P^{(\frac{1}{2})} = P'^{(\frac{1}{2})} + P''^{(\frac{1}{2})} \quad ,$$

которые уже не записываются в терминах оператора квадрата спина. Подобным же образом поле $h_{\mu\nu}$ описывает 3 спина 1 и два спина 0, так что

$$P^{(1)} = P'^{(1)} + P''^{(1)} + P'''^{(1)} \quad ,$$

$$P^{(0)} = P'^{(0)} + P''^{(0)} \quad .$$

(явные выражения для этих операторов см. в /8/). Одинаковые спины могут вносить противоположные по знаку вклады в энергию и потому не могут быть оставлены все вместе. Таким образом, если поле описывает немаксимальные значения спина, то при записи перестановочных соотношений и функций распространения нужно использовать проекционные операторы, не выражающиеся через оператор квадрата спина . Так,в п.5 для поля $h_{\mu\nu}$, описывавшего спины 2 и 0, приходилось наряду с $P^{(2)}$ использовать проекционный оператор для спина 0, который не выражается через оператор квадрата спина. Через такого рода операторы $P''^{(1)}$ и $P'''^{(1)}$ (явный вид см. в /8/) записываются две возможные формы уравнения для антисимметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}$ /14,15/

$$\left(\Box P''^{(1)} - m^2\right) h_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

$$\left(\Box P'''^{(1)} - m^2\right) h_{\mu\nu} = 0 \; .$$

В свободном случае эти уравнения эквивалентны и могут быть приведены одно к другому.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Параметры $\hat{\omega}_{\mu\nu}$ в общем случае представимы в виде

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, e_\mu^{(i)}\, e_\nu^{(j)}\, a_k \quad , \tag{П.4.1}$$

где $e_\mu^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ – тройка векторов, ортогональных к импульсу

$$e_\mu^{(i)}\, e_\mu^{(j)} = \delta_{ij} \; , \quad e_\mu^{(i)}\, p_\mu = 0 \; , \tag{П.4.2}$$

ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметрично по индексам, $\epsilon_{123} = 1$. Величины a_k можно теперь рассматривать как новые параметры преобразований. При этом векторы $e_\mu^{(i)}$ включатся в генераторы преобразований, так что, например в (67), генератор $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda}{M} \gamma_\rho \gamma_5$ заменится на $\epsilon_{ijk}\, e_\mu^{(i)} e_\nu^{(j)} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda}{M} \gamma_\rho \gamma_5 = -2i e_\rho^{(k)} \gamma_\rho \gamma_5$ и преобразование примет вид

$$\delta\psi = \tfrac{1}{2}[i\lambda^a \omega_a + e_\rho^{(k)} \gamma_\rho \gamma_5 \,(a_k + a_k^a \lambda_a)]\psi \; . \tag{П.4.3}$$

Из (83)–(85) для скобочных параметров теперь получается

$$\omega_{ok}^{a} = - f_{abc}(\omega_1^b\, \omega_2^c + a_{1k}^b a_{2k}^c) \; ,$$

$$a_{1ok} = -\epsilon_{ijk}\,(a_{1i}\; a_{2k} + \tfrac{2}{3} a_{1i}^a\; a_{2k}^a) \; ,$$

$$a_{lok}^a = -\epsilon_{ijk}\,(a_{1j}^a a_{2k} + a_{1j}\, a_{2k}^a + d_{abc} a_{1j}^b a_{2k}^c) - f_{abc}\,(\omega_1^b\, a_{2i}^c - \omega_2^b\, a_{1i}^c) \; .$$

Замечательно, что теперь структурные соотношения таковы же, как в нерелятивистской $SU(6)$, и больше не зависят от 4–скорости. Однако бесконечному числу параметров, о котором говорилось в п.6, теперь соответствует бесконечный произвол в выборе базиса $e_\mu^{(i)}$ для каждой из частиц, и соответственно записи генераторов преобразований. Каждый выбор соответствует выделению конечно–параметрической подгруппы, оставляющей инвариантными свободные уравнения. Если требовать инвариантности амплитуды относительно всех этих подгрупп сразу, то по–прежнему она будет обращаться в нуль.

Если бы удалось найти физический принцип однозначного выбора базиса $e_\mu^{(i)}$, то тогда, оставаясь в рамках этого выбора, можно было бы находить нетривиальные соотношения между амплитудами, как для коллинеарных процессов, так и для неколлинеарных. В двухчастичных реакциях (а тем более в многочастичных) имеется достаточное коли–

чество импульсов, чтобы через них выразить $e_\mu^{(i)}$ для каждой из частиц (например, для частицы с импульсом p)

$$e_\mu^{(1)} = \sum_i \lambda_i^{(1)} p_\mu^i \; ; \quad e_\mu^{(2)} = \sum \lambda_i^{(2)} p_\mu^i \; ; \quad e_\rho^{(3)} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} \frac{p_\lambda}{iM} \, .$$

Однако произвол остается, и важно найти физический рецепт по его устранению.

Известные рассмотрения /10,11/ коллинеарных процессов (вершины, рассеяние вперед и т.д.) в рамках $SU(6)_W$ и т.п. с изложенной точки зрения соответствуют тому или иному закреплению базиса $e_\mu^{(i)}$. Так, Барис /11/ при обсуждении вершин по сути дела закрепляет базис условиями

$$e_\mu^{(i)}(p) = e_\mu^{(i)}(q) = e_\mu^{(i)} \quad , \quad e^{(i)} p = e^{(i)} q = 0 \qquad (i=1,2) \; ;$$

$$e_\mu^{(3)}(p) = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, e_\nu^{(1)} e_\lambda^{(2)} \frac{p_\rho}{im} \quad , \quad e_\mu^{(3)}(q) = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, e_\nu^{(1)} e_\lambda^{(2)} \frac{q_\rho}{im} \, .$$

Член с вектором $e^{(3)}$ в (П.4.3) с учетом уравнения движения можно преобразовать: $e_\mu^{(3)}(p)\gamma_\mu \gamma_5 \psi(p) = \frac{i}{2} e_\mu^{(1)} \sigma_{\mu\nu} e_\nu^{(2)} \psi(p)$. Группа Липкина и Мешкова $SU(6)_W$ фактически совпадает с группой Бариса. Действительно, в системе отсчета, где $p = (0,0,p_3,ip_0)$, $q = (0,0,-p_3,ip_0)$, можно выбрать $e_\mu^{(1)} = (1000)$ и $e_\mu^{(2)} = (0100)$, так что "спиновыми матрицами" будут $-i\gamma_1\gamma_5 = \gamma_4\sigma_1$, $-i\gamma_2\gamma_5 = \gamma_4\sigma_2$ и $\sigma_{12} = \sigma_3$.

Подчеркнем, что преобразования состояний с векторами $e_\mu^{(i)}$, выраженными через импульсы других частиц, совместимы с S -матричной формой теории, но не допустимы в теории поля.

Литература*

1. F.Gursey, L.A.Radicati. Phys. Rev. Lett., 13, 173 (1964); A.Pais. Phys. Rev. Lett., 13, 175 (1964); F.Gursey, A.Pais, L.Radicati. Phys. Rev. Lett., 13, 299 (1964); A.Sakita. Phys. Rev., 136, B1756 (1964); V.G.Kadyshevsky, R.Muradyan, Ja.A.Smorodinsky. Forts. der Phys., 13, 599 (1965).

2. M.Gell–Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962); Physics, 1, 63 (1964); B.W.Lee. Phys. Rev. Lett., 14, 676 (1965); M. Gell–Mann, Y.Neeman. Ann. Phys.. (N.Y.) 30, 360 (1964); C.Ryan. Phys. Rev., 140, B 481 (1965); Phys. Letters, 17, 172 (1965); Prep. IC/66/10, IC/66/14 (1965);

3. J.J.Sakurai. Ann. Phys. (N.Y.) 11, 1 (1960);
В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 45, 966 (1963);
Ann. Phys. (N.Y.) 25, 358 (1963).

4. A.H.Rosenfeld et al. Rev. Mod. Phys., 37, 633 (1965); V.E.Barnes et al. Phys. Rev. Lett. 15, 322 (1965);
S.U. Chung et al. Phys. Rev. Lett., 15, 325 (1965).

5. Дао Вонг Дык, Фан Куи Ты. ЯФ, 2, 748 (1965);
R.Delbourgo, Phys. Lett., 15, 347 (1965); R.Delbourgo et al. Prep. IC (65) 57 (1965), D.Robaschik, A. Uhlmann. Preprint E-2557, Dubna, 1966; R.Gatto, L.Maiani, G.Preparata. Nuovo Cim., 39, 1192 (1965).

6. I.Schwinger. Phys. Rev., 140, B158 (1965); P.G.O.Freund. Preprint EFINS 65-112 (1965).

7. S.M. Gupta. Rev. Mos. Phys. 29, 334 (1957); R.P.Feynman, Acta Phys. Polonica, 24, 697 (1963).

8. V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Ann. Phys. (N.Y.) 35, 167 (1965).

9. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 48, 1625 (1965).

10. H.I.Lipkin, S.Meshkov. Phys. Rev. Lett., 14, 670 (1965); R.F.Dashen, M.Gell-Mann. Phys. Letters, 17, 145 (1965).

11. K.J.Barnes, Phys. Rev., 139, B947 (1965).

12. И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь. ЖЭТФ, 43, 1904 (1962).

13. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2559, Дубна, 1966.

14. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2330, Дубна, 1965.

15. N.Kemmer. Helv. Phys. Acta, 33, 829 (1960).

16. A.Salam. Phys. Letters, 13, 354 (1964).

17. Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 21, 748 (1951).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1966 г.