ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2692

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ В ГАЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1966

P - 2692

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ В ГАЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

I. ВВЕДЕНИЕ

Полная квантовая теория взаимодействий элементарных частиц должна включать и гравитационные взаимодействия.[ж)] Попытки построения квантовой теории тяготения имеют большую историю [I-32], но и до сих пор она еще далека от завершения. В рамках геометрического подхода Эйнштейна, когда тяготение отождествляется с метрикой пространства-времени, возникает принципиально трудная проблема квантования этой метрики. Другой, теоретико-полевой подход [8,25,32-37] заключается в том, что гравитационное поле рассматривается на тех же основаниях, что и другие поля: электромагнитное, мезонное и т.д.; иными словами, теория тяготения Эйнштейна трактуется как релятивистская теория тензорного поля. Однако ранее исходные уравнения для гравитационного поля брались из геометрической теории Эйнштейна, что рассматривалось как недостаток теоретико-полевого подхода. В настоящее время в [37] сами уравнения Эйнштейна выведены в рамках полевого, плоского подхода (на основе спинового принципа) без обращения к римановой геометрии, и, таким образом, этот подход получил право на самостоятельное существование. Трудности квантования при таком подходе носят скорее технический характер (эти трудности свойственны также и геометрическому подходу). Во-первых, уравнения Эйнштейна значительно более нелинейны, чем уравнения электродинамики и мезонных теорий. Во-вторых, уравнения Эйнштейна из-за общековариантности носят особый характер и не полностью определяют тензор $g^{\mu\nu}$; среди них фактически нет уравнений движения для величины $\partial_\mu g^{\mu\nu}$, она остается совершенно произвольной. Отсутствие таких уравнений не позволяет интерпретировать соответствующие полевые переменные на механическом языке сопряженных координат и импульсов. Этим объясняются трудности с квантованием по канонической схеме. Подчеркнем, что по существу ситуация такая же, как в максвелловской электродинамике: вектор-потенциал A_μ зависит от калибровки и не полностью определяется уравнениями движения.

Для обхода трудностей прибегают к альтернативным процедурам квантования: квантование на языке величин, инвариантных относительно общековариантных преобразований [9,2I], квантование при помощи фейнмановского метода интеграла по путям [I0,II], швингеровского вариационного принципа [I2,I3,24] и т.д. Однако при этом трудности не исчезают, а проявляются в другой форме [29]. Поэтому важное значение имеет модификация исходных уравнений теории тяготения перед квантованием. Например, Дирак [I7] придал уравнениям теории форму, аналогичную уравнениям электродинамики в калибровке излучения. К сожалению, здесь теряется явная ковариантность теории.

Другой путь - это модификация уравнений в духе формулировки Ферми-Гупты в квантовой электродинамике. В электродинамике этот подход получил наибольшее распространение, так как в нем сочетаются простота и явная ковариантность теории. Почти сразу же вслед за электро-

ж) См., например, статью М.А.Маркова, Suppl.Progr.Theor.Phys., Extra Number,85 (1965).

динамикой Гупта применил этот метод и к теории тяготения в представлении взаимодействия [8] (см.также [27]). Этот путь снимает трудности, связанные с особым характером уравнения и произвольностью $\partial_\mu g^{\mu\nu}$, и делает все степени свободы поля $g^{\mu\nu}$ равноправными и поддающимися квантованию.

В настоящей статье теоретико-полевая формулировка Гупты в теории тяготения рассматривается в двух представлениях: в гайзенберговском (п.2 и 3) и в представлении взаимодействия (п.4). При этом рассматривается целое однопараметрическое семейство возможных формулировок квантовой теории тяготения, отличающихся выбором тензора гравитационного поля. После наложения соответствующих дополнительных условий на векторы состояний все эти теории эффективно эквивалентны, т.е. будут приводить к одним и тем же результатам, например, при расчетах с помощью S - матрицы. Однако при конкретных расчетах эффектов иногда удобнее пользоваться одной формулировкой, а иногда - другой. Формулировка Гупты - один частный случай этого семейства.Отметим, что семейство пригодных для квантования теорий выделено из более широкой двухпараметрической совокупности классических теорий с различными линейными дополнительными условиями, указанной в работе [37]. В п.2 при обсуждении гайзенберговского представления из модифицированного уравнения для $g^{\mu\nu}$ в гуптовском варианте теории получено уравнение движения для величины $\partial_\mu g^{\mu\nu}$, которая теперь уже не является произвольной. Это уравнение является нелинейным, что похоже на ситуацию в теории Янга-Миллса [38] (см.Приложение I) и отличается от электродинамики, где величина $\partial_\mu A_\mu$ подчиняется свободному уравнению Даламбера. Вместе с тем отмечена трудность с наложением дополнительного условия на векторы состояния в гайзенберговском представлении.

В представлении взаимодействия (п.4) после получения перестановочных соотношений и пропагатора дан полный анализ дополнительного условия для векторов состояния и сформулирован простой рецепт построения любых одно- и многогравитонных состояний, удовлетворяющих дополнительному условию, а также физических состояний. Путем анализа матричных элементов S - матрицы между состояниями, удовлетворяющими дополнительному условию, продемонстрировано, что излучаться и поглощаться могут только два типа гравитонов: со спиральностями +2 и - 2. Тем самым дано исчерпывающее обоснование того, что второе дополнительное условие, которое накладывал Гупта, является ненужным.(См.также [27]). В пп. 4 и 5 S - матрица записана в форме, соответствующей S - матрице в калибровке излучения в квантовой электродинамике.

Проведенный анализ показывает тесное сходство квантовой теории гравитационного поля с квантовой электродинамикой (см., например, обзор [39]).

2. Теория тяготения в гайзенберговском представлении

I. Мы будем придерживаться не геометрической, а полево-теоретической точки зрения. В полевом подходе силы тяготения интерпретируются не как результат искривления пространства-времени, а как результат действия гравитационного поля, выступающего наравне с другими полями. В качестве исходного лагранжиана теории в полевом подходе Гупта [8] брал готовый лагранжиан из геометрической теории Эйнштейна и раскладывал его в ряд по степеням $a h^{\mu\nu}$, где a - гравитационная константа связи, а $h^{\mu\nu}$ - гравитационное поле. Константа a связана с постоянной k в законе Ньютона соотношением $a^2 = 32\pi k$, а $h^{\mu\nu} = a^{-1}(g^{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu})$, где $g^{\mu\nu}$ - "метрический тензор" с весом $p = -I$. В [37] было показано, что лагранжиан теории тяготения Эйнштейна можно вывести, не обращаясь к аргументам Эйнштейна, а прямо в рамках плоского пространства. При этом естественным образом получается, что он есть бесконечный ряд по гравитационной константе a, суммирующийся к

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{2}{a^2} g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) \tag{I}$$

для самодействия гравитационного поля и к другим известным выражениям для взаимодействия гравитационного поля с другими полями.

При обсуждении нам будет удобно рассматривать лагранжиан в терминах тензоров $g_p^{\mu\nu}$ с различными весами p

$$g_p^{\mu\nu} = g^{-\frac{p}{2}} g^{\mu\nu}, \qquad g_p = \mathrm{Det}\,\| g_p^{\mu\nu} \| , \tag{2}$$

где $g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu}$. (Упоминавшийся выше тензор $g^{\mu\nu} = g_{-1}^{\mu\nu}$). Мы будем подразумевать, что гравитационное поле представляется величинами $h_p^{\mu\nu}$, которые связаны с $g_p^{\mu\nu}$ соотношением

$$g_p^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + a h_p^{\mu\nu} . \tag{3}$$

В явном виде лагранжиан (I) записывается через $g_p^{\mu\nu}$ как *)

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{a^2}\Big\{ \frac{1}{2} g_p^{\mu\nu} \partial_\mu g_p^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{p\alpha\beta} + g_{p\alpha\beta} \partial_\mu g_p^{\alpha\nu} \partial_\nu g_p^{\beta\mu} - \frac{1+p}{1+2p} \partial_\mu g_p^{\mu\nu} \partial_\nu \ln g_p + \\ + \frac{2+4p+3p^2}{4(1+2p)^2} g_p^{\mu\nu} (\partial_\mu \ln g_p)(\partial_\nu \ln g_p) \Big\} g_p^{-\frac{1+p}{2(1+2p)}} \qquad \left(p \neq -\tfrac{1}{2}\right) . \tag{4}$$

Для получения выражения (4) в (I) было подставлено $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ в виде

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_p^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{p\rho\nu} + \partial_\nu g_{p\mu\rho} - \partial_\rho g_{p\mu\nu}\right) + \frac{p}{4(1+2p)}\left(\delta^{\lambda}_{\nu}\partial_\mu + \delta^{\lambda}_{\mu}\partial_\nu - g_p^{\lambda\rho} g_{p\mu\nu}\partial_\rho\right)\ln g_p . \tag{5}$$

*) Эта запись ненамного сложней записи общего лагранжиана для свободного гравитационного поля, приведенной в Приложении 2 к статье [37]. Исключительный случай $p = - I/2$, требующий специального анализа, обсуждался Пересом [40].

Вообще говоря, симметричное тензорное поле $h_p^{\mu\nu}$ описывает спин 2, спин I и два спина 0. Однако спин I, несущий отрицательную энергию и один из спинов 0 обезвреживаются за счет инвариантности лагранжиана $\int d^4x\,\overline{\mathcal{L}}$ относительно преобразований

$$\delta^* h_p^{\mu\nu} = \partial_\mu\lambda^\nu + \partial_\nu\lambda^\mu + p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma + \alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\nu h_p^{\mu\sigma} + \partial_\sigma\lambda^\mu h_p^{\sigma\nu} + p\partial_\sigma\lambda^\sigma h_p^{\mu\nu} - \lambda^\sigma\partial_\sigma h_p^{\mu\nu}\right) \quad (6)$$

или в терминах $\mathfrak{g}_p^{\mu\nu}$

$$\delta^* \mathfrak{g}_p^{\mu\nu} \doteq \alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\mu \mathfrak{g}_p^{\sigma\nu} + \partial_\sigma\lambda^\nu \mathfrak{g}_p^{\mu\sigma} + p\partial_\sigma\lambda^\sigma \mathfrak{g}_p^{\mu\nu} - \lambda^\sigma\partial_\sigma \mathfrak{g}_p^{\mu\nu}\right), \quad (6^{I})$$

где λ^μ – совершенно произвольные функции. В полевом подходе эти преобразования имеют смысл калибровочных преобразований, аналогичный смыслу калибровочных преобразований в квантовой электродинамике. [41]

2. Для обсуждения квантования гравитационного поля в гайзенберговском представлении обратимся к случаю $p = -1$, когда лагранжиан (4) записывается наиболее просто :

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_\nu \mathfrak{g}_{\alpha\beta} + \mathfrak{g}_{\alpha\beta}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\alpha\nu}\partial_\nu \mathfrak{g}^{\beta\mu} + \frac{1}{4}\mathfrak{g}^{\mu\nu}(\partial_\mu \ln \mathfrak{g})(\partial_\nu \ln \mathfrak{g})\right\}. \quad (7)$$

Из него можно получить уравнение в форме Папапетру

$$\Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\lambda} + \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho \mathfrak{g}^{\lambda\rho} = \frac{\alpha^2}{2}\Theta_{\mu\nu}, \quad (8)$$

где $\Theta_{\mu\nu}$ – симметричный тензор энергии -импульса всех полей, включая гравитационное (подробный вывод уравнения и явный вид $\Theta_{\mu\nu}$ можно найти в Приложении 3 к работе [37]). Лагранжиан (7) и уравнение (8) инвариантны относительно преобразований

$$\delta^* \mathfrak{h}^{\mu\nu} = \partial_\mu\lambda^\nu + \partial_\nu\lambda^\mu - \delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma + \alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\nu \mathfrak{h}^{\mu\sigma} + \partial_\sigma\lambda^\mu \mathfrak{h}^{\sigma\nu}\right) - \alpha\partial_\sigma\left(\lambda^\sigma \mathfrak{h}^{\mu\nu}\right). \quad (9)$$

При расчетах бывает удобно наложить на $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ совместимое с уравнением (8) условие Де-Дондера-Ланчоса-Фока, [42–44], так что уравнение (8) заменится системой

$$\Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{\alpha^2}{2}\Theta_{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$\partial_\mu \mathfrak{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (11)$$

В теории с уравнением (10) плюс дополнительное условие (11) остается инвариантность относительно преобразований (9), но только со следующим ограничением на функции λ^μ:

$$\Box\lambda^\mu + \alpha\partial_\rho\partial_\sigma\lambda^\mu \mathfrak{h}^{\rho\sigma} = 0 \quad (\text{или} \quad \mathfrak{g}^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma\lambda^\mu = 0). \quad (12)$$

Отметим, что среди решений уравнения (12) имеется не зависящее от $\mathfrak{h}^{\rho\sigma}$ решение

$$\lambda^\mu = c^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (c^\mu = \text{const}, \ \omega^\nu{}_\mu = -\omega^\mu{}_\nu = \text{const}), \quad (13)$$

при котором преобразования (9) совпадают с преобразованиями неоднородной группы Лоренца.*)

В случае записи уравнений для гравитационного поля в форме (10),(11) лишние степени свободы устраняются совместно калибровочными преобразованиями (9) и условием Де-Дондера-Ланчоса-Фока (11).

3. Квантование поля $\mathfrak{h}^{\mu\nu}$ можно осуществить теми же способами, что и электромагнитное поле. Если исходить из лагранжиана (1), то возникнут трудности с зависимостью степеней свободы друг от друга, такие же, как в максвелловской форме электродинамики. Единственный возможный здесь выход – формулировка теории в форме, аналогичной электродинамике в калибровке излучения, и тем самым отказ от явной ковариантности.**) Поэтому мы пойдем по другому пути.

В квантовой электродинамике обычно отдают предпочтение явно ковариантной формулировке Ферми, использующей уравнение Даламбера. Аналогично этому, здесь удобно положить в основу уравнение (10), а, точнее говоря, некоторую его модификацию. Прямо использовать уравнение (10) нельзя, так как для него, по-видимому, нельзя подобрать лагранжиан. При выборе нового лагранжиана и уравнения будем руководствоваться следующими соображениями.***) а) Новая лагранжева плотность должна отличаться от (7) членом, который устранял бы в левой части (8) все члены, кроме первого. б) При этом допустимо появление в уравнении новых членов взаимодействия, содержащих комбинацию $\partial_\mu \mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Этим предположениям удовлетворяет выбор новой лагранжевой плотности в виде

$$\mathcal{L}' = \overline{\mathcal{L}} - \alpha^{-2}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\partial_\nu \mathfrak{g}^{\nu\alpha}, \quad (14)$$

где $\overline{\mathcal{L}}$ – плотность (7). Этот лагранжиан дает уравнение, не совпадающее с (10), однако отличающееся от него только на члены, которые обращаются в нуль при учете условия Де-Дондера-Ланчоса-Фока (11),

$$\Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{\alpha^2}{2}\Theta_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2}\left[\mathfrak{h}^{\mu\alpha}\left(\partial_\alpha\partial_\beta \mathfrak{g}^{\beta\nu} + \partial_\nu\partial_\beta \mathfrak{g}^{\beta\alpha}\right) - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{h}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma \mathfrak{g}^{\gamma\beta} + (\mu\leftrightarrow\nu)\right] = \quad (15)$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\Theta'_{\mu\nu} - \alpha\mathfrak{h}^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta \mathfrak{g}^{\beta\nu} - \alpha\mathfrak{h}^{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta \mathfrak{g}^{\beta\mu} + \alpha\partial_\beta\left(\mathfrak{h}^{\mu\nu}\partial_\alpha \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\right) - \partial_\alpha \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\partial_\beta \mathfrak{g}^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\alpha \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_\gamma \mathfrak{g}^{\gamma\beta}. \quad (15^{I})$$

В этих выражениях $\Theta_{\mu\nu}$ – симметричный тензор энергии-импульса, соответствующий первоначальной лагранжевой плотности (7), $\Theta'_{\mu\nu}$ – симметричный тензор энергии-импульса, соответ-

---

*) Ср. [44] § 93 и обсуждение произвольности $\partial_\mu \mathfrak{h}^{\mu\nu}$ в Приложении I к работе [37].

**) Такой подход развивал Дирак в [17].

***) Ср. аналогичные рассуждения в применении к полю Янга-Миллса в Приложении I.

ствующий новой лагранжевой плотности (I4)*).

Лагранжева плотность $\mathcal{L}'$ (I4), а, следовательно, и уравнение (I5) инвариантны относительно преобразований (9) только при условии, что λ^{μ} подчинены уравнению

$$\Box\lambda^{\nu}+\alpha\,\mathfrak{h}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\lambda^{\nu}+\frac{\alpha}{2}\partial_{\alpha}\mathfrak{h}^{\alpha\beta}\left(\partial_{\beta}\lambda^{\nu}+\partial_{\nu}\lambda^{\beta}\right)-\frac{\alpha}{2}\partial_{\sigma}\lambda^{\sigma}\partial_{\alpha}\mathfrak{h}^{\alpha\nu}=0 \qquad (\mathrm{I}6)$$

Лагранжиан (I4) и уравнение (I5) подразумевают динамическую независимость всех степеней свободы поля $\mathfrak{h}^{\mu\nu}$. Отсюда ясно, что наложение на операторы $\mathfrak{h}^{\mu\nu}$ дополнительного условия в форме (II) противоречиво. Ситуация в этом отношении такая же, как в электродинамике. Однако в отличие от электронамики, в которой $\partial_{\mu}A_{\mu}$ подчиняется свободному уравнению и потому может быть разбито на положительно- и отрицательно-частотные части, здесь величина $\partial_{\mu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ подчиняется сложному нелинейному уравнению

$$\Box\partial_{\mu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}=-\alpha\,\partial_{\alpha}\left(\mathfrak{h}^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{g}^{\gamma\nu}\right)-\partial_{\alpha}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\partial_{\gamma}\mathfrak{g}^{\gamma\beta} \qquad (\mathrm{I}7)$$

или

$$\partial_{\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{g}^{\gamma\nu}\right)=-\frac{1}{2}\partial_{\nu}\left(\partial_{\alpha}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{g}^{\gamma\beta}\right). \qquad (\mathrm{I}7^{\mathrm{I}})$$

Чтобы превратить данную теорию в эквивалент первоначальной (эйнштейновской), нужно наложить дополнительное условие на векторы состояния**). Можно было бы попытаться по аналогии с электродинамикой выбрать это условие в форме

$$\langle n|\partial_{\mu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}|m\rangle=0, \qquad (\mathrm{I}8)$$

однако в гайзенберговском представлении анализ его затруднителен и не исключено, что оно противоречит уравнению (I7).

Для произвольного несимметричного тензорного поля одновременные перестановочные соотношения должны выбираться в виде

$$\left[h_{\mu\nu}(x),\Pi_{\lambda\rho}(y)\right]=\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \left(x_0=y_0\right), \qquad (\mathrm{I}9)$$

где $\Pi_{\lambda\rho}$ – "импульс", канонически сопряженный к полю ("координате") $h_{\lambda\rho}$. Применяя к полю

*) Уравнение (I5) легче всего вывести с помощью тождества для $\overline{\mathcal{L}}$ из работы [37] (формула (П.32)). Отметим, что антисимметричный член + I/4 $\partial_{\sigma}M_{\mu\rho,\sigma}$+ I/4$(x^{\mu}\partial_{\sigma}t^{\sigma}_{\rho}-x^{\rho}\partial_{\sigma}t^{\sigma}_{\mu})$ в правой части (П.32) (в этой формуле он ошибочно стоит с противоположным знаком) при переходе к лагранжиану $\mathcal{L}'$ заменяется на $\frac{1}{4}\partial_{\sigma}M'_{\mu\rho,\sigma}+\frac{1}{4}(x^{\mu}\partial_{\sigma}t'^{\sigma}_{\rho}-x^{\rho}\partial_{\sigma}t'^{\sigma}_{\mu})$, где $M'_{\mu\rho,\sigma}$ и t'^{σ}_{ρ} – отвечающие $\mathcal{L}'$ тензор плотности момента количества движения и канонический тензор энергии импульса.

**) Так, если рассматривать $\mathfrak{h}^{\mu\nu}$ как классическое поле, то наложение условия (II) делает данный вариант теории эквивалентпым первоначальному.

и к импульсу симметризующие проекционные операторы вида $\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}+\delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}\right)$, записываем перестановочные соотношения, которые должны выполнять для симметричного тензорного поля

$$\left[\mathfrak{g}^{\mu\nu}(x),\Pi_{\lambda\rho}(y)\right]=\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (x_0=y_0). \qquad (20)$$

Из лагранжиана (I4) для канонически сопряженного импульса имеем*)

$$\Pi_{\lambda\rho}(x)=-\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_4\mathfrak{g}^{\lambda\rho}}=-\frac{2}{\alpha^2}\left(-\Gamma^4_{\lambda\rho}+\frac{1}{2}\delta^4_{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\rho\beta}+\frac{1}{2}\delta^4_{\rho}\Gamma^{\beta}_{\lambda\beta}\right)+\alpha^{-2}\left(\delta^4_{\lambda}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\nu\rho}+\delta^4_{\rho}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\nu\lambda}\right). \qquad (2\mathrm{I})$$

Отметим, что если дополнительный член в (I4) заменить на $-\alpha^2\partial_{\mu}\mathfrak{g}^{\nu\alpha}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}$, т.е. принять лагранжеву плотность

$$\mathcal{L}''=\mathcal{L}-\alpha^2\partial_{\mu}\mathfrak{g}^{\nu\alpha}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}, \qquad (\mathrm{I}4^{\mathrm{I}})$$

то ничего не изменится, кроме вида импульса $\Pi_{\lambda\rho}(x)$, который теперь будет равен

$$\Pi_{\lambda\rho}(x)=-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\partial_4\mathfrak{g}^{\lambda\rho}}=-\frac{2}{\alpha^2}\left(-\Gamma^4_{\lambda\rho}+\frac{1}{2}\delta^4_{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\rho\beta}+\frac{1}{2}\delta^4_{\rho}\Gamma^{\beta}_{\lambda\beta}\right)+\alpha^{-2}\left(\partial_{\lambda}\mathfrak{g}^{\rho4}+\partial_{\rho}\mathfrak{g}^{\lambda4}\right). \qquad (2\mathrm{I}^{\mathrm{I}})$$

В пределе свободного случая это выражение существенно проще, чем выражение (2I) (см.п.5).

3. Другие формулировки теории

В связи с многообразием возможных (эквивалентных) форм записи лагранжиана в теории гравитации можно предложить и другие варианты квантованной теории, вообще говоря, неэквивалентные по записи уравнений, но становящиеся эквивалентными эффективно после наложения подходящего дополнительного условия на векторы физических состояний. Чтобы охватить по возможности более широкий класс теорий, от величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{p}$ с их лагранжианом (4) можно перейти к величинам, которые являются матричными элементами матрицы $\|\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{p}\|$ в произвольной степени n [37]

$$\|\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{p}\|^{n}=\|\delta_{\mu\nu}+\alpha n h_{\mu\nu}\|, \qquad \|\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{p}\|=\|\delta_{\mu\nu}+\alpha n h_{\mu\nu}\|^{\frac{1}{n}}, \qquad (22)$$

так что

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{p}=\delta_{\mu\nu}+\alpha h_{\mu\nu}+\frac{1-n}{2!}\alpha^2 h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}+\frac{(1-n)(1-2n)}{3!}\alpha^3 h_{\mu\lambda}h_{\lambda\rho}h_{\rho\nu}+\ldots \qquad (23)$$

*) Поскольку $\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\lambda\rho}}=-\frac{2}{\alpha^2}\left(-\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}+\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\rho\beta}+\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\rho}\Gamma^{\beta}_{\lambda\beta}\right)$.

$$g_{p\mu\nu}=\left(\|\delta_{\alpha\beta}+anh_{\alpha\beta}\|^{-\frac{1}{n}}\right)_{\mu\nu}=$$

$$=\delta_{\mu\nu}-ah_{\mu\nu}+\frac{1+n}{2!}a^2h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}-\frac{(1+n)(1+2n)}{3!}a^3h_{\mu\lambda}h_{\lambda\rho}h_{\rho\nu}+\cdots \tag{24}$$

Переход к переменным $\|g_p^{\mu\nu}\|^n$ позволяет охватить самые разнообразные случаи. Например, при $n=$ I, $p=0$ это $\|g^{\mu\nu}\|$ – обычный контравариантный метрический тензор; при $n=$ I, $p=$ –I это $\|g^{\mu\nu}\|=\|g_{-1}^{\mu\nu}\|$ – часто используемый (в том числе и нами выше) метрический тензор с весом $p=$ –I; при $n=$ –I, $p=0$ имеем $\|g_{\mu\nu}\|$ – обычный ковариантный метрический тензор; при $n=$ I/2, $p=0$ имеем $\|g^{\mu\nu}\|^{\frac{1}{2}}$ –"корень" из метрического тензора, который играет важную роль при описании взаимодействий спиноров [45] ж) и т.д.

Подставим в (4) разложения (23) и (24) и

$$g_p=1+ah_1+\frac{a^2}{2}(h_1^2-nh_2)+\frac{a^3}{6}(h_1^3-3nh_1h_2+2n^2h_3)+\cdots$$

$$g_p^{-\frac{1+p}{2(1+2p)}}=1-\frac{a(1+p)}{2(1+2p)}h_1+\frac{a^2(1+p)^2}{8(1+2p)^2}\left[h_1^2+\frac{2n(1+2p)}{1+p}h_2\right]- \tag{25}$$
$$-\frac{a^3(1+p)^3}{48(1+2p)^3}\left[h_1^3+6n\frac{1+2p}{1+p}h_1h_2+8n^2\frac{(1+2p)^2}{(1+p)^2}h_3\right]+\cdots$$

Тогда для лагранжевой плотности получим разложение

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+a\mathcal{L}_1+a^2\mathcal{L}_2+\cdots=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\mu h_{\alpha\beta}+\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\alpha\mu}-\frac{1+p}{1+2p}\partial_\mu h_{\mu\nu}\partial_\nu h_1+\frac{2+4p+3p^2}{4(1+2p)^2}\partial_\mu h_1\partial_\mu h_1\right]\cdot$$
$$\cdot\left\{1-\frac{a(1+p)}{2(1+2p)}h_1+\frac{a^2(1+p)^2}{8(1+2p)^2}\left[h_1^2+\frac{2n(1+2p)}{1+p}h_2\right]\right\}+$$
$$+\frac{a}{2}\Big\{\left[h_{\mu\nu}\partial_\nu h_{\alpha\beta}-n\partial_\mu(h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta})\right](2\partial_\beta h_{\alpha\mu}-\partial_\mu h_{\alpha\beta})+$$
$$+\frac{1+p}{1+2p}\left[n\partial_\mu h_{\mu\nu}\partial_\nu h_2-(1-n)\partial_\mu(h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu})\partial_\nu h_1\right]+$$
$$+\frac{2+4p+3p^2}{2(1+2p)^2}(h_{\mu\nu}\partial_\mu h_1-n\partial_\nu h_2)\partial_\nu h_1\Big\}\left\{1-\frac{a(p+1)}{2(1+2p)}h_1\right\}+$$

ж) Замкнутое выржение для лагранжиана гравитационного поля в этом случае можно найти у Мёллера в [46], где используется тетрадный формализм Фока и др. Тетрады соответствуют корню $\|g^{\mu\nu}\|^{\frac{1}{2}}$ из работы [45].

$$+a^2\Big\{\left[\frac{1+2n^2}{6}\partial_\mu(h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\delta}h_{\delta\beta})+\frac{1-n}{4}\left(h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}\partial_\nu h_{\alpha\beta}+h_{\mu\nu}\partial_\nu(h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta})\right)\right](2\partial_\beta h_{\alpha\mu}-\partial_\mu h_{\alpha\beta})+$$
$$+\left[\frac{1+n}{4}h_{\mu\nu}\partial_\nu h_{\alpha\beta}+\frac{1-n^2}{8}\partial_\mu(h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta})\right]\left[\partial_\mu(h_{\alpha\delta}h_{\delta\beta})-2\partial_\beta(h_{\alpha\sigma}h_{\sigma\mu})\right]-$$
$$-\frac{1+p}{1+2p}\left[\frac{n^2}{3}\partial_\mu h_{\mu\nu}\partial_\nu h_3-\frac{(1-n)n}{4}\partial_\mu(h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu})\partial_\nu h_2+\frac{(1-n)(1-2n)}{6}\partial_\mu(h_{\mu\lambda}h_{\lambda\rho}h_{\rho\nu})\partial_\nu h_1\right]+$$
$$+\frac{2+4p+3p^2}{4(1+2p)^2}\Big[\frac{2n^2}{3}\partial_\mu h_1\partial_\mu h_3-nh_{\mu\nu}\partial_\mu h_2\partial_\nu h_1+\frac{n^2}{4}\partial_\mu h_2\partial_\mu h_2+$$
$$+\frac{1-n}{2}h_{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}\partial_\mu h_1\partial_\nu h_1\Big]\Big\}+O(a^3)\,. \tag{26}$$

Здесь $h_1=h_{\mu\mu}$, $h_2=h_{\mu\nu}h_{\nu\mu}$ и т.д. Разумеется, мы могли записать лагранжиан и в замкнутой форме. Однако запись в виде разложения будет удобна и в этом п. и ниже, при обсуждении представления взаимодействия.

Лагранжиан теперь инвариантен относительно преобразований типа

$$\delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+\text{мультипликативные члены}, \tag{27}$$

где мультипликативные члены, вообще говоря, нелинейны по полю $h_{\mu\nu}$ (см.,например, случай $n=$ I/2, $p=0$ в [37]). Только при $n=$ I и $n=$ –I они становятся линейными; при $n=$ I – это закон преобразования "контравариантного тензора" (с весом) (6), а при $n=$ –I – закон преобразования "ковариантного тензора"

$$\delta^* h_{p\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma-a(\partial_\mu\lambda^\sigma h_{p\sigma\nu}+\partial_\nu\lambda^\sigma h_{p\mu\sigma}+p\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{p\mu\nu}+\lambda^\sigma\partial_\sigma h_{p\mu\nu}) \tag{28}$$

Как можно заключить из гл.5 работы [37], в классическом случае на каждое поле $h_{\mu\nu}$ с фиксированными n и p можно наложить линейное дополнительное условие

$$\partial_\mu h_{\mu\nu}+\frac{np+1}{2n}\partial_\nu h_{\mu\mu}=0\,. \tag{29}$$

Часто используемое в теории тяготения условие (II) – лишь одно из многих возможных. Оно соответствует $n=$ I, $p=$ –I. При переходе от данных n и p к другим условие (29) будет становиться нелинейным.

Оказывается, не все эти формы записи лагранжиана удобны для перехода к квантовой теории. Мы обсудим этот вопрос на уровне свободного уравнения тем более, что для устранения трудностей с перестановочными соотношениями в модификации нуждается только оператор свободного уравнения.

Свободная часть лагранжиана (26) есть наиболее общий лагранжиан для свободного поля $h_{\mu\nu}$ [37]. Она дает уравнение

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\rho} + \frac{1+p}{1+2p}\left(\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\sigma h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu\partial_\nu h_1\right) - \frac{2+4p+3p^2}{2(1+2p)^2}\delta_{\mu\nu}\Box h_1 = 0. \quad (30)$$

Если принять дополнительное условие

$$\partial_\mu h_{\mu\nu} + q\partial_\nu h_1 = 0\,, \quad (31)$$

то, исключая с его помощью $\partial_\mu h_{\mu\nu}$ из уравнения (30), приходим к уравнению

$$\Box h_{\mu\nu} + \left(2q + \frac{1+p}{1+2p}\right)\partial_\mu\partial_\nu h_1 - \left[\frac{(1+p)q}{1+2p} + \frac{2+4p+3p^2}{2(1+2p)^2}\right]\delta_{\mu\nu}\Box h_1 = 0\,, \quad (32)$$

которое уже не имеет особого характера. Для нового уравнения требуется заново найти лагранжиан. Однако не существует лагранжиана, который приводил бы к члену $\partial_\mu\partial_\nu h_1$ в уравнении. Этого нельзя добиться никакими модификациями уравнения (32)[ж)]. Лагранжева формулировка возможна только при

$$q = -\frac{1+p}{2(1+2p)}\,. \quad (33)$$

Условие (33) из обсуждаемого класса теорий с $q = \frac{np+1}{2n}$ (см.(29)) выделяет однопараметрическое семейство, в котором параметры n и p связаны уравнением

$$2np^2 + 2(n+1)p + (n+1) = 0\,, \qquad n \neq 0\,, \qquad 1+2p \neq 0\,, \quad (34)$$

т.е. с $n = -\frac{1+2p}{1+2p+2p^2}$. Каждая из теорий этого семейства допускает квантовую формулировку, аналогичную формулировке Ферми в электродинамике. Как частный случай здесь содержится вариант теории, обсужденный в п.2 ($p = -1$, $n = 1$).

Итак, лагранжиан следует модифицировать следующим образом:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \left(\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu h_1\right)^2, \quad (35)$$

где $\mathcal{L}$ – лагранжева плотность (26) с $n = -\frac{1+2p}{1+2p+2p^2}$. Новый лагранжиан инвариантен относительно преобразований (27) только при подходящих ограничениях на λ^μ.

ж) Напомним, что иногда уравнение может не иметь лагранжиана. Однако, будучи преобразовано к другой, причем эквивалентной форме, обретет лагранжиан. Так, уравнение (30) можно преобразовать к другому (более удобному с точки зрения его анализа) виду (см.уравнение (П.I8) в [37]), под который принципиально нельзя найти лагранжиан. Путем преобразования этого уравнения к форме (30), удается найти для него лагранжеву плотность.

Одновременные перестановочные соотношения будут иметь вид (20) с канонически сопряженным импульсом

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \partial_4 \mathbf{h}_{\mu\nu}} = \tag{36}$$

$$= -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_4 \mathbf{h}_{\mu\nu}} + \delta_{4\mu}\left[\partial_\lambda \mathbf{h}_{\lambda\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu \mathbf{h}_1\right] + \delta_{4\nu}\left[\partial_\lambda \mathbf{h}_{\lambda\mu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\mu \mathbf{h}_1\right] - \frac{1+p}{1+2p}\delta_{\mu\nu}\partial_4 \mathbf{h}_1 = \tag{37}$$

$$= -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_4 \mathfrak{h}^{\mu'\nu'}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{h}^{\mu'\nu'}}{\partial \mathbf{h}_{\mu\nu}} + \delta_{4\mu}\left[\partial_\lambda \mathbf{h}_{\lambda\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu \mathbf{h}_1\right] + \delta_{4\nu}\left[\partial_\lambda \mathbf{h}_{\lambda\mu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\mu \mathbf{h}_1\right] - \frac{1+p}{1+2p}\delta_{\mu\nu}\partial_4 \mathbf{h}_1, \tag{38}$$

где при переходе к последнему выражению использовано замечание о замене полевых переменных в [37] (стр. 189). Выражение для оставшейся производной $\mathcal{L}$ см. выше в Примечании на стр. 7 .

Для соответствия с теорией Эйнштейна на векторы состояния в этих теориях следует налагать подходящие дополнительные условия. Естественно наложить условие, выделяющее физические векторы состояния, в форме

$$\langle b | \partial_\mu \mathbf{h}_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu \mathbf{h}_1 | a \rangle = 0 \ . \tag{39}$$

Однако из-за того, что уравнение для величины $\partial_\mu \mathbf{h}_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu \mathbf{h}_1$ не является свободным, вопрос о непротиворечивости условия (39) остается открытым.

4. Представление взаимодействия

В представлении взаимодействия мы работаем со свободными полями, уравнения для которых выводятся из свободной части лагранжиана (35)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\mu h_{\alpha\beta} + \frac{1+2p+2p^2}{4(1+2p)^2}\partial_\mu h_1 \partial_\mu h_1 + \tag{40}$$

+ свободные лагранжианы других полей .

В (40) отброшена несущественная дивергенция, а свободные поля обозначаются светлым шрифтом.

S - матрица в представлении взаимодействия может быть построена согласно теореме, изложенной в книге Умедзавы [47] . Эта теорема состоит в следующем:

I) S - матрица может быть записана как " T^*- экспонента"

$$S = T^* \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_{вз}(x)\right] , \tag{41}$$

где

2) $\mathcal{L}_{вз}$ - лагранжиан взаимодействия в представлении взаимодействия. По форме он тот же, что в гайзенберговском представлении, однако с заменой в нем каждого гайзенберговского оператора поля на такой же в представлении взаимодействия. Явный вид $\mathcal{L}_{вз}$ следует из (35) или более прямо из (26) с $n = -\frac{1+2p}{1+2p+2p^2}$

$$\mathcal{L}_{вз} = a\,\mathcal{L}_1(h_{\mu\nu}) + a^2\,\mathcal{L}_2(h_{\mu\nu}) + \cdots \qquad (42)$$

Естественно сюда должны быть добавлены вклады всех полей, взаимодействующих с гравитационным.

3) T^* означает, во-первых, что в качестве спариваний берутся функции Грина свободных полей.

4) Во-вторых, T^* означает, что производные, действовавшие в $\mathcal{L}_{вз}$ на поля, в S-матрице следует понимать символически и применять их <u>только после</u> разложения по $\mathcal{N}$- произведениям к функциям Грина или к операторам поля, стоящим под знаком $\mathcal{N}$ - произведения.

Для исключения из теории лишних степеней свободы*) векторы состояния в представлении взаимодействия должны быть подчинены дополнительному условию

$$\left(\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu h_1\right)_+ \Psi = 0\,, \qquad (43)$$

где знак плюс означает, что берется положительно-частотная часть стоящего в скобках оператора. Это дополнительное условие совершенно аналогично условию Лоренца-Ферми-Гупты в электродинамике и при $p = -1$ совпадает с условием Гупты [8] для гравитационного поля в представлении взаимодействия.

4.I. Свободное гравитационное поле

Из лагранжевой плотности (40) для поля $h_{\mu\nu}$ следует уравнение

$$\Box h_{\mu\nu} - \frac{1+2p+2p^2}{2(1+2p)^2}\delta_{\mu\nu}\Box h_1 = 0\,. \qquad (44)$$

Лагранжиан (40), уравнение (44) и дополнительное условие (43) инвариантны относительно преобразований

$$\delta^* h_{\mu\nu} = \partial_\mu\lambda^\nu + \partial_\nu\lambda^\mu + p\,\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma \qquad (45)$$

при условии, что функции λ^μ ограничены условием

$$\Box\lambda^\mu = 0\,. \qquad (46)$$

*) А заодно и состояний с отрицательной метрикой.

Таким образом, лишние степени свободы устраняются совместно калибровочными преобразованиями и дополнительным условием.

4.2. Перестановочные соотношения

Для симметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}$ одновременные перестановочные соотношения должны иметь вид (20) с заменой там $g^{\mu\nu}$ на $h_{\mu\nu}$

$$[h_{\mu\nu}(x), \Pi_{\lambda\rho}(y)] = \frac{1}{2}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (x_0 = y_0)\,. \qquad (47)$$

Из лагранжевой плотности (40) для канонически сопряженного импульса имеем

$$\Pi_{\lambda\rho} = -\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4 h_{\lambda\rho}} = \partial_4 h_{\lambda\rho} - \frac{1+2p+2p^2}{2(1+2p)^2}\delta_{\lambda\rho}\partial_4 h_1\,. \qquad (47')$$

После подстановки этого импульса в перестановочные соотношения (47) очевидным образом получаем перестановочные соотношения

$$[h_{\mu\nu}(x), \partial_4 h_{\lambda\rho}(y)] = \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - (1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})\,, \quad (x_0 = y_0) \qquad (48)$$

Поскольку мы рассматриваем свободное поле, то эти перестановочные соотношения легко распространяются на любые времена x_0 и y_0

$$[h_{\mu\nu}(x), \partial_4 h_{\lambda\rho}(y)] = \frac{i}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - (1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)D(x-y)\,, \qquad (49)$$

где

$$D(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4p\, e^{ipx}\,\varepsilon(p_0)\,\delta(p^2)\,. \qquad (50)$$

4.3. Пропагатор гравитона

Как упоминалось выше, в качестве пропагатора следует брать обратный оператор (функцию Грина) уравнения, т.е. решение неоднородного уравнения

$$\Box\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \frac{1+2p+2p^2}{(1+2p)^2}\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)G_{\lambda\rho,\sigma\tau}(x-y) = \frac{i}{2}(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\sigma})\,\delta(x-y)\,, \qquad (5I)$$

Отсюда для пропагатора (спаривания) имеем

$$G_{\mu\nu,\lambda\rho}(x-y) = \overline{h_{\mu\nu}(x)h_{\lambda\rho}(y)} = -\frac{i}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - (1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)D_c(x-y)\,, \qquad (52)$$

где $$D_c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-i\varepsilon}\,. \tag{53}$$

4.4. Состояния, удовлетворяющие дополнительному условию

Решение уравнения (44) обычным образом раскладывается по плоским волнам

$$h_{\mu\nu}(x)=\int\frac{d\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\left\{\gamma_{\mu\nu}(\vec{k})e^{ikx}+\gamma^+_{\mu\nu}(\vec{k})e^{-ikx}\right\} \tag{54}$$

$$\left(kx=\vec{k}\vec{x}+k_4x_4=\vec{k}\vec{x}-k_0x_0\,,\ k_0=|\vec{k}|\right),$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ и $\gamma^+_{\mu\nu}$ – операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие перестановочному соотношению

$$[\gamma_{\mu\nu}(\vec{k}),\gamma^+(\vec{q})]=\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-(1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)\delta(\vec{p}-\vec{q})\,. \tag{55}$$

Анализируя перестановочное соотношение (55), легко прийти к выводу, что метрика гильбертова пространства состояний неопределенная, подобно тому как это имеет место в электродинамике (см.напр. [39]). Это позволяет определить вакуум Ψ_0 как

$$\gamma_{\mu\nu}\Psi_0=0\,,\qquad \Psi_0^+\gamma^+_{\mu\nu}=0\,. \tag{56}$$

Дополнительное условие (43) в k – представлении записывается в виде

$$\left(k_\mu\gamma_{\mu\nu}-\frac{1+p}{2(1+2p)}k_\nu\gamma_{\mu\mu}\right)\Psi=0\,, \tag{57}$$

где Ψ – любое физическое состояние.

Рассмотрим произвольное одночастичное состояние

$$\Psi=\rho_{\lambda\rho}\gamma^+_{\lambda\rho}\Psi_0\,, \tag{58}$$

где $\rho_{\lambda\rho}$ – неоператорные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя состояние (58) в (57) и используя перестановочные соотношения (55), выясняем, что коэффициенты должны удовлетворять условию

$$k_\mu\rho_{\mu\nu}+\frac{p}{2}k_\nu\rho_{\mu\mu}=0\,. \tag{59}$$

Удобно, введя новые функции

$$\rho'_{\mu\nu}=\rho_{\mu\nu}+\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}\rho_{\lambda\lambda}=0\,, \tag{60}$$

преобразовать это условие к условию Лоренца

$$k_\mu\rho'_{\mu\nu}=0\,. \tag{6I}$$

Чтобы разрешить это условие, введем базис $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$, n_μ и k_μ, включающий импульс k_μ в качестве одного из ортов,

$$ke^{(i)}=0\,,\ ne^{(i)}=0\,,\ e^{(i)}e^{(j)}=\delta_{ij}\ (i,j=1,2)\,,\ k^2=0\,,\ n^2=-1\,. \tag{62}$$

Используя соотношение полноты для этого базиса

$$\sum_{i=1}^{2}e^{(i)}_\mu e^{(i)}_\nu+\frac{(nk)(k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu)+k_\mu k_\nu}{(nk)^2}=\delta_{\mu\nu}\qquad (k^2=0)\,, \tag{63}$$

мы можем представить самый общий симметричный тензор $\rho'_{\mu\nu}$ как

$$\begin{aligned}\rho'_{\mu\nu}&=\sum_{i,j=1}^{2}e^{(i)}_\mu e^{(j)}_\nu\left(e^{(i)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(j)}_\rho\right)+\sum_{i=1}^{2}\left(n_\mu e^{(i)}_\nu+n_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(i)}_\rho}{nk}+\\&+\sum_{i=1}^{2}\left(k_\mu e^{(i)}_\nu+k_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{(nk)\,n_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(i)}_\rho+k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(i)}_\rho}{(nk)^2}+\\&+(n_\mu k_\nu+n_\nu k_\mu)\frac{(nk)\,k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}n_\rho+k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}k_\rho}{(nk)^3}+\frac{n_\mu n_\nu}{(nk)^2}k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}k_\rho+\\&+\frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^4}\left[k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}k_\rho+2(nk)k_\lambda\rho'_{\lambda\rho}n_\rho+(nk)^2n_\lambda\rho'_{\lambda\rho}n_\rho\right].\end{aligned} \tag{64}$$

Чтобы отсюда получить решение (6I), достаточно использовать условие (6I) в правой части. Решение имеет вид

$$\begin{aligned}\rho'_{\mu\nu}&=\left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu+e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right)e^{(1)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(2)}_\rho+\frac{1}{2}\left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu-e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)\left(e^{(1)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(1)}_\rho-e^{(2)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(2)}\right)+\\&+\frac{1}{2}\left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu+e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)\left(e^{(1)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(1)}_\rho+e^{(2)}_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(2)}_\rho\right)+\\&+\sum_{i=1}^{2}\left(k_\mu e^{(i)}_\nu+k_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{n_\lambda\rho'_{\lambda\rho}e^{(i)}_\rho}{nk}+\frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^2}\left(n_\lambda\rho'_{\lambda\rho}n_\rho\right).\end{aligned} \tag{65}$$

Таким образом, условие Лоренца (61) исключило все члены, содержавшие n_μ и n_ν, и, следовательно, мы получили 6 решений этого условия: $e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)}+e_\nu^{(1)}e_\mu^{(2)}$, $e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)}-e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}$, $k_\mu e_\nu^{(1)}+k_\nu e_\mu^{(1)}$, $k_\mu e_\nu^{(2)}+k_\nu e_\mu^{(2)}$, $k_\mu k_\nu$ и $e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)}+e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}$. Все они, кроме последнего, удовлетворяют сверх (61) условию

$$\rho'_{\mu\mu}=0 \tag{66}$$

и потому одновременно являются решениями (59). В случае $p=0$ это так и для последнего решения. При остальных p нужен дополнительный анализ. Подставим в левой части (65) $\rho'_{\mu\nu}$ через $\rho_{\mu\nu}$ и свернем индексы μ и ν. Тогда получим соотношение

$$(1+2p)\,\rho_{\lambda\lambda}=\sum_{i=1}^{2} e_\lambda^{(i)}\rho'_{\lambda\rho}e_\rho^{(i)}, \tag{67}$$

и теперь видно из (65), что 6-е решение имеет вид*)

$$e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)}+e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}-\frac{p}{1+2p}\delta_{\mu\nu}. \tag{68}$$

Итак, дополнительное условие (43) или (57) запретило состояния, порождаемые операторами

$$n_\mu\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(1)}, \quad n_\mu\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(2)}, \quad n_\mu\gamma^+_{\mu\nu}k_\nu \quad \text{и} \quad n_\mu\gamma^+_{\mu\nu}n_\nu,$$

которые строятся с помощью вектора n_μ. Дополнительное условие (43) или (57) разрешает только состояния Ψ, порождаемые 6-ю операторами $\rho_{\mu\nu}\gamma^+_{\mu\nu}$ вида

1) $e_\mu^{(1)}\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(1)}-e_\mu^{(2)}\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(2)}$, $e_\mu^{(1)}\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(2)}$; (69)

2) $k_\mu\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(1)}$, $k_\mu\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(2)}$, $k_\mu\gamma^+_{\mu\nu}k_\nu$, $e_\mu^{(1)}\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(1)}+e_\mu^{(2)}\gamma^+_{\mu\nu}e_\nu^{(2)}$. (70)

Свойства этих групп операторов следующие:

а) Все операторы группы 2) коммутируют со всеми операторами (69), (70): сами с собой и со своими эрмитовски сопряженными, друг с другом и эрмитовски сопряженными к ним, наконец, коммутируют со всеми операторами группы 1) и эрмитовски сопряженными к ним. Это легко проверить с помощью перестановочных соотношений (55). Можно сказать, что операторы группы 2) работают как c - числа в пространстве, порождаемом всеми операторами 1) и 2). Благодаря этому,

---

*) Подчеркнем, что исключать здесь $\delta_{\mu\nu}$ с помощью соотношения полноты (62) невыгодно.

б) состояния, содержащие в числе операторов рождения хотя бы один такой оператор, обладают нулевой нормой. Действительно, в скалярном произведении $\Psi^+\Psi$ его можно беспрепятственно, как c - число, переместить к тому вакууму, в применении к которому он с учетом условия (56) даст 0.

с) Только состояния 1) обладают конечной нормой и имеют физический смысл: они порождают два возможные состояния свободного гравитона.

Многочастичные состояния Ψ, содержащие любое число гравитонов, также строятся путем действия на вакуум Ψ_0 этими шестью операторами. Только такие состояния разрешает условие (43). Эти состояния также обладают нулевой нормой, если содержат хотя бы один оператор (70).

Состояния, порождаемые операторами (70) мы сможем обоснованно исключить из рассмотрения только тогда, когда убедимся, что матричные элементы S - матрицы между любыми двумя состояниями, из которых хотя бы одно такое, обращаются в нуль.

4.5. S - матрица.

Нам удобно S - матрицу в представлении взаимодействия (41) представить в нормальной форме, что всегда можно сделать. Далее, нас будут интересовать только матричные элементы между состояниями, удовлетворяющими условию (43) (или (57))

$$(\Psi_f, S\Psi_i)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\int dx_1\cdots\int dx_n\int dy_1\cdots\int dy_m\int dz_1\cdots\int dz_m\cdots$$

$$\cdot K_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_m, z_1\cdots z_m)\cdot$$

$$(\Psi_f, :h_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots h_{\mu_n\nu_n}(x_n)::\psi(y_1)\cdots\psi(y_m)\bar\psi(z_1)\cdots\bar\psi(z_m):\cdots\Psi_i). \tag{71}$$

Здесь подразумевается, что, кроме гравитационного поля $h_{\mu\nu}$, теория описывает спинорное поле $\psi(x)$ и любые другие поля. Коэффициентные функции $K_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ строятся (в соответствии с выбранным взаимодействием) из пропагаторов всех полей, включая гравитационное.

Вследствие инвариантности S - матрицы в представлении взаимодействия относительно преобразований (45) коэффициентные функции $K_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_i\nu_i\cdots}(x_1\cdots x_i\cdots)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial x_{i\mu_i}}K_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_i\nu_i\cdots}(x_1\cdots x_i\cdots)=-\frac{p}{2}\frac{\partial}{\partial x_{i\nu_i}}K_{\mu_1\nu_1\cdots\mu\mu\cdots}(x_1\cdots x_i\cdots) \tag{72}$$

(функции K симметричны по каждой паре индексов $\mu_i \nu_i$). В $\mathcal{S}$ - матрице (7I) операторы $h_{\mu\nu}(x)$ имеют вид (54). Входящие в $h_{\mu\nu}(x)$ операторы рождения $\gamma^+_{\mu\nu}$ и уничтожения $\gamma_{\mu\nu}$ можно записать в базисе (62). По формуле (64), верной для любых симметричных тензоров с $k^2=0$, и, используя сверх того соотношение полноты (63), можно представить $\gamma_{\mu\nu}(\vec{k})$ в виде

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{k}) = \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right) e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho + \frac{1}{2}\left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)\left(e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(1)}_\rho - e^{(2)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} e^{(i)}_\mu e^{(i)}_\nu + p\delta_{\mu\nu}\right)\left(\sum_{j=1}^{2} e^{(j)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(j)}_\rho - \frac{p}{1+2p}\gamma_{\lambda\lambda}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\left[\left(n_\mu e^{(i)}_\nu + n_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(i)}_\rho}{nk} + \left(k_\mu e^{(i)}_\nu + k_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{(nk)\, n_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(i)}_\rho + k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(i)}_\rho}{(nk)^2}\right] +$$

$$+ \left(p\delta_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{nk}\right)\frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} n_\rho}{nk} + \left(\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{nk}\right)\frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} k_\rho}{(nk)^2} +$$

$$+ k_\mu k_\nu \frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} k_\rho + 2(nk) k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} n_\rho + (nk)^2 n_\rho \gamma_{\lambda\rho} n_\rho}{(nk)^4} -$$

$$- \frac{p}{2(1+2p)}\left[p\delta_{\mu\nu} + \frac{(nk)(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu) + k_\mu k_\nu}{(nk)^2}\right]\gamma_{\lambda\lambda} . \qquad (73)$$

Точно такое же разложение верно для $\gamma^+_{\mu\nu}(\vec{k})$. Если какой-либо член содержит вектор k_μ (или k_ν) и, например, имеет вид $k_\mu v_\nu$, где v_ν - любой вектор, то в силу свойства (72) коэффициентных функций мы можем произвести замену

$$k_\mu v_\nu \longrightarrow -\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}(kv) . \qquad (74)$$

На этом основании $\gamma_{\mu\nu}(\vec{k})$ в $\mathcal{S}$ - матрице (7I) можно заменить на

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{k}) \to \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right) e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho + \frac{1}{2}\left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)\left(e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(1)}_\rho - e^{(2)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2} e^{(i)}_\mu e^{(i)}_\nu + p\delta_{\mu\nu}\right)\left(\sum_{j=1}^{2} e^{(j)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(j)}_\rho - \frac{p}{1+2p}\gamma_{\lambda\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{2}\left(n_\mu e^{(i)}_\nu + n_\nu e^{(i)}_\mu\right)\frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(i)}_\rho}{nk} +$$

$$+ \left(n_\mu n_\nu - \frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}\right)\frac{k_\lambda \gamma_{\lambda\rho} k_\rho}{(nk)^2} \qquad (75)$$

и то же относится к $\gamma^+_{\mu\nu}(\vec{k})$. Теперь в $\mathcal{S}$ - матрице (7I) остались только операторы (69) и (70). В такой ситуации операторы (70) ведут себя как c - числа и при действии на

вакуум в Ψ_i (а если это операторы, построенные из $\gamma^+_{\mu\nu}$, то на вакуум в Ψ_f) дают нуль. Поэтому можно далее произвести замену

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{k}) \to \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right) e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho + \frac{1}{2}\left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)\left(e^{(1)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(1)}_\rho - e^{(2)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho\right) \qquad (76)$$

Для симметричной и имеющей более прямой физический смысл записи введем циклический базис

$$e^{(+2)}_\mu = \frac{e^{(1)}_\mu + i e^{(2)}_\mu}{\sqrt{2}} , \quad e^{(-2)}_\mu = \frac{e^{(1)}_\mu - i e^{(2)}_\mu}{\sqrt{2}} . \qquad (77)$$

На этом языке замена (76) означает

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{k}) \to \sum_{m=+2,-2} e^{(m)}_\mu e^{(m)}_\nu e^{(-m)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(-m)}_\rho . \qquad (78)$$

Итак, в $\mathcal{S}$ - матрице (7I), в $\mathcal{N}$ - произведениях, мы вправе заменить операторы (54) на операторы

$$h^{\tau}_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \sum_{m=-2,+2} e^{(m)}_\mu e^{(m)}_\nu \left\{ e^{(-m)}_\lambda \gamma_{\lambda\rho} e^{(-m)}_\rho e^{ikx} + e^{(-m)}_\lambda \gamma^+_{\lambda\rho} e^{(-m)}_\rho e^{-ikx} \right\} , \qquad (79)$$

которые описывают рождение и уничтожение свободных гравитонов со спиральностями только +2 или - 2. Итак, исходя из выражения для $\mathcal{S}$ - матрицы (4I), или выражения, стоящего между обкладками в (7I), мы после учета дополнительного условия (43) приходим к новой возможной записи $\mathcal{S}$ - матрицы

$$\mathcal{S} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_n \int dy_1 \dots \int dy_m \int dz_1 \dots \int dz_m \cdots$$

$$\cdot K_{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n}(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m, z_1 \dots z_m) \cdot$$

$$: h^{\tau}_{\mu_1\nu_1}(x_1) \dots h^{\tau}_{\mu_n\nu_n}(x_n) :: \psi(y_1) \dots \psi(y_m) \overline{\psi}(z_1) \dots \overline{\psi}(z_m) : \dots \qquad (80$$

Комбинации $e^{(\pm 2)}_\mu e^{(\pm 2)}_\nu$ в (79) характеризуют состояния со спиральностями $\pm$ 2. То, что $\mathcal{S}$ - матрица приводится к виду (80), иллюстрирует известный факт, что излучаться и поглощаться могут только 2 сорта свободных гравитонов: со спиральностями $\pm$ 2.

Поскольку операторы (70) и эрмитовски сопряженные к ним коммутируют с $\mathcal{S}$ - матрицей (80), то, если начальное Ψ_i или конечное Ψ_f состояния содержат хотя бы один оператор типа (70), матричный элемент $(\Psi_f, \mathcal{S}\Psi_i)$ обращается в 0. Поэтому в качестве начальных и конечных состояний Ψ_i и Ψ_f следует брать состояния, порождаемые только операторами

(69), или в циклическом базисе состояния, порождаемые операторами

$$e^{(+2)}_{\lambda}\, \gamma^{+}_{\lambda\rho}\, e^{(+2)}_{\rho} \quad \text{и} \quad e^{(-2)}_{\lambda}\, \gamma^{+}_{\lambda\rho}\, e^{(-2)}_{\rho}, \tag{81}$$

например,

$$e^{(+2)}_{\lambda}(\vec{k})\,\gamma^{+}_{\lambda\rho}(\vec{k})\,e^{(+2)}_{\rho}(\vec{k})\,\Psi_0, \quad \left(e^{(+2)}(\vec{k})\gamma^{+}(\vec{k})e^{(+2)}(\vec{k})\right)\left(e^{(+2)}(\vec{q})\,\gamma^{+}(\vec{q})\,e^{(+2)}(\vec{q})\right)\Psi_0 \tag{82}$$

и т.д. с любым числом гравитонов и соответственно операторов (81). Такие состояния описывают гравитоны только со спиральностями ± 2.

Изложенная ситуация совершенна аналогична той, которая имеет место в электродинамике Ферми-Гупты [39].

Мы здесь попутно показали, что при последовательном анализе не возникает никаких затруднений с величиной $\gamma_{\lambda\lambda}$, которые обсуждались Гуптой [8]. Никакого дополнительного условия для этой величины не требуется. Она выпадает сама собой. К такому же заключению пришел Ют [27] из других соображений.

5. Калибровка излучения

S - матрица в форме (80) соответствует в квантовой электродинамике S - матрице в калибровке излучения. Соответствие будет полным, если подходящим образом преобразовать пропагаторы (52), из которых составлены коэффициентные функции $K_{\mu_1\nu_1}\ldots$. Для этого в фурье-образе пропагатора (52)

$$\frac{\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-(1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}}{k^2-i\varepsilon}$$

комбинация $\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-(1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}$ преобразуется путем замены каждого символа Кронекера по соотношению полноты

$$\sum_{i=1}^{2} e^{(i)}_{\mu}e^{(i)}_{\nu} + \frac{[k_\mu+(nk)n_\mu][k_\nu+(nk)n_\nu]}{k^2+(nk)^2} - n_\mu n_\nu = \delta_{\mu\nu}, \tag{83}$$

верному при любых k^2 *). Исключая теперь возникшие векторы k с помощью замены (74), получаем, что пропагатор $G_{\mu\nu,\lambda\rho}$ (52) переходит в

---

*) Соотношение полноты (63) справедливо только при $K^2=0$.

$$-\frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik(x-y)}\Big\{\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{2}\left(e^{(i)}_{\mu}e^{(i)}_{\lambda}e^{(j)}_{\nu}e^{(j)}_{\rho}+e^{(i)}_{\mu}e^{(i)}_{\rho}e^{(j)}_{\nu}e^{(j)}_{\lambda}-e^{(i)}_{\mu}e^{(i)}_{\nu}e^{(j)}_{\lambda}e^{(j)}_{\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{k^2+(nk)^2}\left[-p(1+p)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}+n_\mu n_\nu\delta_{\lambda\rho}+n_\lambda n_\rho\delta_{\mu\nu}-n_\mu n_\lambda\delta_{\nu\rho}-n_\nu n_\lambda\delta_{\mu\lambda}-n_\mu n_\rho\delta_{\nu\lambda}-n_\nu n_\rho\delta_{\mu\lambda}\right]$$

$$-\frac{k^2}{[k^2+(nk)^2]^2}\left(n_\mu n_\nu-\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}\right)\left(n_\lambda n_\rho-\frac{p}{2}\delta_{\lambda\rho}\right)\Big\}. \tag{84}$$

Выражение в первой строке есть пропагатор $\overline{h^{\tau}_{\mu\nu}(x)\,h^{\tau}_{\lambda\rho}}(y)$ поперечных гравитонов со спиральностью ± 2. В нем целесообразно обратно исключить векторы e^{i} с помощью соотношения полноты (83). И если при этом выбрать $n_\mu=\{0,0,0,i\}$ для этого пропагатора получим

$$\overline{h^{\tau}_{\mu\nu}(x)\,h^{\tau}_{\lambda\rho}}(y)=\left(\Psi_0, T\,h^{\tau}_{\mu\nu}(x)h^{\tau}_{\lambda\rho}(y)\,\Psi_0\right) = -\frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-i\varepsilon}\,\cdot$$

$$\begin{cases}\left(\delta_{m\ell}-\frac{k_m k_\ell}{\vec{k}^2}\right)\left(\delta_{n\tau}-\frac{k_n k_\tau}{\vec{k}^2}\right)+\left(\delta_{m\tau}-\frac{k_m k_\tau}{\vec{k}^2}\right)\left(\delta_{n\ell}-\frac{k_n k_\ell}{\vec{k}^2}\right)-\left(\delta_{mn}-\frac{k_m k_n}{\vec{k}^2}\right)\left(\delta_{\ell\tau}-\frac{k_\ell k_\tau}{\vec{k}^2}\right) & \text{при } \mu=m,\ \nu=n,\ \lambda=\ell,\ \rho=\tau\neq 4\\ 0 & \text{иначе}\end{cases} \tag{85}$$

Из выражения (84) видно, что только пропагатор поперечных квантов содержит реальный полюс при $K^2=0$. Эта ситуация такая же, как в электродинамике (ср. [39]). От излишне высокой сингулярности в последнем члене (84) можно избавиться с помощью замены

$$(kn)^2\left(n_\mu n_\nu-\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}\right)\to\frac{p}{2}\left[k^2+(nk)^2\right]\delta_{\mu\nu}+[k_\mu+(kn)n_\mu][k_\nu+(kn)n_\nu], \tag{86}$$

следующей из (74). Тогда приходим в S - матрице к замене

$$G_{\mu\nu,\lambda\rho}(x-y)\to\overline{h^{\tau}_{\mu\nu}(x)\,h^{\tau}_{\lambda\rho}}(y)-\frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4k\,e^{ik(x-y)}\,\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{(1-p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\left(n_\mu n_\nu-\frac{p+2}{2}\delta_{\mu\nu}\right)\left(n_\lambda n_\rho-\frac{p+2}{2}\delta_{\lambda\rho}\right)-n_\mu n_\lambda\delta_{\nu\rho}-n_\nu n_\rho\delta_{\mu\lambda}-n_\nu n_\lambda\delta_{\mu\rho}-n_\mu n_\rho\delta_{\nu\lambda}}{k^2+(nk)^2}+$$

$$+\left[\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}+\frac{(k_\mu+(kn)n_\mu)(k_\nu+(kn)n_\nu)}{k^2+(nk)^2}\right]\left[\frac{p}{2}\delta_{\lambda\rho}+\frac{(k_\lambda+(kn)n_\lambda)(k_\rho+(kn)n_\rho)}{k^2+(nk)^2}\right]\Big\}. \tag{87}$$

Выберем теперь $n_\mu=\{0,0,0,i\}$ и выполним интегрирования во второй и третьей строках (87). Тогда (87) превратится в

$$G_{\mu\nu,\lambda\rho}(x-y) \to \overbrace{h^{\tau}_{\mu\nu}(x) h^{\tau}_{\lambda\rho}}(y) + i\,\delta(x_0-y_0)\,\frac{1}{8\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\cdot$$

$$\cdot\Big[(1-p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} - \Big(n_\mu n_\nu - \frac{p+2}{2}\delta_{\mu\nu}\Big)\Big(n_\lambda n_\rho - \frac{p+2}{2}\delta_{\lambda\rho}\Big) - n_\mu n_\lambda \delta_{\nu\rho} - n_\nu n_\rho \delta_{\mu\lambda} - n_\nu n_\lambda \delta_{\mu\rho} - n_\mu n_\rho \delta_{\nu\lambda}\Big]$$

$$-\frac{i}{2}\delta(x_0-y_0)\Big[\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu} + \frac{\delta_{\mu m}\delta_{\nu n}\partial_m\partial_n}{\Delta}\Big]\Big[\frac{p}{2}\delta_{\lambda\rho} + \frac{\delta_{\lambda \ell}\delta_{\rho\tau}\partial_\ell\partial_\tau}{\Delta}\Big]\delta(\vec{x}-\vec{y}) \;, \qquad (87^{I})$$

где $n_\mu = i\delta_{\mu 4}$, а по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от I до 3. Вычисления в последнем члене можно довести до конца с помощью формул

$$\Delta^{-1}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \;, \qquad (88$$

$$\Delta^{-2}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{d\vec{k}}{k^4}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = -\pi^2\,|\vec{x}-\vec{y}| \;, \qquad (89)$$

причем в последней формуле интеграл взят в смысле теории обобщенных функций (см. [48]). Из формулы (87^{I}) теперь видно, что в пренебрежении обменом 3-мерно поперечными гравитонами пропагатор на больших расстояниях ведет себя как ньютоновский потенциал.ж) Член в последней строке (87^{I}) дает поправку, ведущую себя как $|\vec{x}-\vec{y}|^{-3}$, а при $p\neq 0$ еще и как $\delta(\vec{x}-\vec{y})$.

S - матрица в форме (80) с пропагаторами в форме (87) есть S - матрица в калибровке излучения. Эта S - матрица соответствует подходу к квантовой теории тяготения, который развивал Дирак в [17]. Однако такая формулировка неудобна, так как в ней ковариантность не является явной, подчеркнутой.

6. Заключительные замечания

При формулировке квантовой теории гравитации в представлении взаимодействия мы нигде не использовали явный вид лагранжиана взаимодействия, и потому присутствие других полей не вносит никаких изменений в общую схему. Нужно только помнить, что в части лагранжиана, относящейся к другим полям, для гравитационного поля должна соблюдаться связь (34) между n и p. Взаимодействия гравитационного поля при $n = $ I и произвольном p с векторными,

ж)Любопытно, что последний член в (84) согласно формуле (90) ведет себя как $|\vec{x}-\vec{y}|$. То, что возможны различные формы пропагатора, связано с тем, что он не наблюдаемая величина, а лишь одна из составных частей S - матрицы.

спинорными и скалярными полями обсуждаются в гл.4 работы [37]. Там же осуществляется переход к произвольному n (гл.5), о котором говорилось выше в п.3. Детальный анализ взаимодействий гравитационного поля со спинорным в рамках, отвечающих полевому подходу см. в [45].

В спинорной электродинамике лагранжиан взаимодействия в представлении взаимодействия прямо без всякой перестройки может быть снабжен символом $\mathcal{N}$ - произведения. Это не так для скалярной электродинамики, для теории Янга-Миллса (см. [49]) и, по-видимому, для теории тяготения. По-видимому, в последней, как и в теории Янга-Миллса, в качестве лагранжиана взаимодействия должно быть принято классическое выражение (такое, как в п.3). Вопрос о порядке расположения операторов в $\mathcal{L}_{\ell s}$ и расстановке символов $\mathcal{N}$ - произведения сложен,ж) но в принципе может быть решен так же, как в [49], т.е. путем анализа условий причинности и унитарности S - матрицы.

В этой связи заведомо неправильно утверждение Гупты в [8], что $\mathcal{L}_{\ell s}$ прямо можно снабдить символом $\mathcal{N}$ - произведения и что гравитационная собственная энергия определяется членом $\int d^4x\, d^4y\, T\mathcal{L}_1(x)\mathcal{L}_1(y)$. На самом деле в нее безусловно внесет вклад член $\int d^4x\, \mathcal{L}_2(x)$. Поэтому заключение Гупты о квадратичной расходимости собственной энергии не является окончательным. Она может оказаться даже логарифмической.

Приложение I

При квантовании безмассового поля Янга Миллса мы сталкиваемся с затруднениями, знакомыми из электродинамики (см. п.2), и, так же как и там, оказывается целесообразным видоизменить исходное уравнение и лагранжиан. Вместе с тем ситуация с полем Янга-Миллса более сложна и весьма похожа на ту, которая имеет место в теории гравитации. Поле Янга-Миллса может для нас служить моделью, и поэтому мы кратко остановимся на вопросе преобразования уравнений и лагранжиана с целью приспособить их для квантования.

Лагранжиан и уравнение движения для самодействия векторных полей в теории Янга-Миллса имеют вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^i_{\mu\nu} G^i_{\mu\nu} \qquad \Big(G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu b^i_\nu - \partial_\nu b^i_\mu - \alpha_{ijk}\, b^j_\mu b^k_\nu\Big), \qquad (\text{П.I})$$

$$\partial_\nu G^i_{\nu\mu} = -j^i_\mu \qquad \Big(j^i_\mu = \alpha_{ijk}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu b^j_\nu} b^k_\nu = -\alpha_{ijk} G^j_{\mu\nu} b^k_\nu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b^i_\mu}\Big). \qquad (\text{П.2})$$

ж)Разумеется, любое выражение можно разложить по $\mathcal{N}$ - произведениям, но требует выяснения вопрос о форме первоначального выражения.

Лагранжиан и уравнение инвариантны относительно преобразований

$$\delta^* b^i_\mu = \partial_\mu \lambda^i + \alpha_{ijk} \lambda^j b^k_\mu \tag{П.3}$$

(функции λ^i совершенно произвольны) , которые обезвреживают степень свободы поля b^i_μ , соответствующую спину 0. Запишем уравнение подробнее :

$$\Box b^i_\mu - \partial_\mu \partial_\nu b^i_\nu - \alpha_{ijk} \partial_\nu (b^j_\nu b^k_\mu) = - j^i_\mu \ . \tag{П.4}$$

Необходимая модификация уравнения состоит в отбрасывании члена $\partial_\mu \partial_\nu b^i_\nu$, так что в качестве нового уравнения мы принимаем

$$\Box b^i_\mu - \alpha_{ijk} \partial_\nu (b^j_\nu b^k_\mu) = - j^i_\mu \ . \tag{П.5}$$

Добавление в классическом случае дополнительного условия

$$\partial_\mu b^i_\mu = 0$$

сделало бы такую теорию фактически эквивалентной исходной, поскольку исходная теория оставляла величину $\partial_\mu b^i_\mu$ совершенно произвольной (см. 4I). Для нового уравнения требуется заново выбрать лагранжеву плотность. В качестве таковой можно принять

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \partial_\mu b^i_\mu \partial_\nu b^i_\nu . \tag{П.7}$$

Квантование теории с такой лагранжевой плотностью не вызывает никаких трудностей. Лагранжиан (П.7) и уравнение (П.5) (а также дополнительное условие (П.6)) инвариантны относительно преобразований (П.3), но только с функциями λ^i , подчиненными уравнению

$$\Box \lambda^i + \alpha_{ijk} \partial_\mu \lambda^j b^k_\mu = 0 \ . \tag{П.8}$$

Здесь, в частности, видно, что имеется решение $\lambda^i = const$, соответствующее изотопической инвариантности. Из этой инвариантности следует, что в новой теории сохраняется ток

$$j'^i_\mu = \alpha_{ijk} \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \partial_\mu b^j_\nu} b^k_\nu = j^i_\mu - \alpha_{ijk} \partial_\nu b^j_\nu b^k_\mu \ . \tag{П.9}$$

Переходя в уравнении (П.5) к току j'^i_μ , получаем

$$\Box b^i_\mu - \alpha_{ijk} b^j_\nu \partial_\nu b^k_\mu = - j'^i_\mu \ . \tag{П.10}$$

Дивергенция этого уравнения

$$\Box \partial_\mu b^i_\mu + \alpha_{ijk} \partial_\mu \partial_\nu b^j_\nu \cdot b^k_\mu = 0 \tag{П.11}$$

есть уравнение движения для величины $\partial_\mu b^i_\mu$. В первоначальной теории она оставалась совершенно произвольной, а теперь подчиняется довольно сложному нелинейному уравнению. В классической теории мы могли бы взять $\partial_\mu b^i_\mu(\vec{x},0)$ и $\partial_4 \partial_\mu b^i_\mu(\vec{x},0)$ равными нулю и тем самым гарантировать их равенство нулю всегда. Результирующая теория была бы эквивалентна первоначальной. В квантовом случае естественно наложить на физические состояния условие типа условия Ферми

$$\langle b | \partial_\mu b^i_\mu | a \rangle = 0 \ . \tag{П.12}$$

Однако в отличие от электродинамики механика работы этого условия недостаточно ясна, и, по-видимому, оно даже противоречит уравнению (П.II). В теории тяготения мы сталкиваемся с точно такой же ситуацией.

Приложение 2. Ограничения, накладываемые в свободном случае дополнительным условием (классическая теория)

$$\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)} \partial_\nu h_{\lambda\lambda} = 0 \ . \tag{П.13}$$

Если перейти в импульсное представление

$$h_{\mu\nu} = \int d^4k \, \tilde{h}_{\mu\nu}(k) e^{ikx} \ , \quad k^2 = 0 \ , \tag{П.14}$$

то для $\tilde{h}_{\mu\nu}$ условие (П.13) можно разрешить в полной аналогии с тем, как в п.4.4 мы разрешали дополнительное условие (59) для $\rho_{\mu\nu}$. Этим путем получаем общее решение дополнительного условия в виде

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu} = {} & (e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu) e^{(1)}_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho + \frac{1}{2} (e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu)(e^{(1)}_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(1)}_\rho - e^{(2)}_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho) + \\ & + \frac{1}{2} (e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu - (1+p)\delta_{\mu\nu})(e^{(1)}_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(1)}_\rho + e^{(2)}_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(2)}_\rho - \frac{1+p}{1+2p} \tilde{h}_{\lambda\lambda}) \\ & + \sum_{i=1}^{2} (k_\mu e^{(i)}_\nu + k_\nu e^{(i)}_\mu) \frac{n_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} e^{(i)}_\rho}{nk} + \frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^2} (n_\lambda \tilde{h}_{\lambda\rho} n_\rho + \frac{1+p}{2(1+2p)} \tilde{h}_{\lambda\lambda}) \ , \end{aligned} \tag{П.15}$$

Калибровочные преобразования (45) позволяют заменять комбинации $k_\mu v_\nu + k_\nu v_\mu$, где v_μ произвольный вектор, на $-p\delta_{\mu\nu}(kv)$. Это сразу же дает возможность обратить в нуль члены последней строки (П.I5) , а с учетом соотношения полноты (63) и члены второй строки. Таким образом, поле $h_{\mu\nu}$ реально обладает двумя степенями свободы, представленными в первой строке.

Итак, хотя формально решения дополнительного условия в классическом и квантовом случае выглядят различно, однако физический смысл их один и тот же.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1966 г.

Литература:

1.L.Rosenfeld, Ann.d.Phys. 5, 113 (1930) Ann.Inst.H.Poinoare 2,25 (1932).
2, 25 (1932).
2.Н.Бронштейн, ЖЭТФ 2, вып. 3 (1936).
3.P.G.Bergmann, Phys.Rev. 75, 680 (1959); Helv.Phys.Acta, Suppl. 4, 79 (1956).
4.F.A.E.Pirani, A.Schild, Phys.Rev. 79, 986 (1950).
5.P.G.Bergmann, P.Penfield, R.Schiller, H.Zatzkis, Phys.Rev. 80, 81 (1956).
6.J.L.Anderson, P.G.Bergmann, Phys.Rev. 83, 1018 (1951).
7.А.Соколов, Д.Иваненко, Квантовая теория поля, ФМ, М-Л (1952).
8.S.N.Gupta, Proc.Phys.Soc. A65, 161, 608 (1952); Rev.Mod.Phys. 29, 334 (1957); статья в сборнике: "Recent developments in general relativity", Pergamon Press, 1962, p.251.
9.B.S.De Witt, Rev.Mod.Phys. 29, 377 (1957); статья в сборнике: "Recent developments in general relativity", Pergamon Press, 1962, p.175.
10.J.A.Wheeler, Ann.of Phys. 2, 604 (1957), статья в книге " Гравитация и относительность", Мир, Москва, 1965, стр.468.
11.C.W.Misner, Rev.Mod.Phys. 29, 497 (1957).
12.S.Deser, Rev.Mod.Phys. 29, 417 (1957).
13.R.Arnowirr, S.Deser, Phys.Rev. 113, 745 (1959).
14.F.J.Belinfante, D.I.Caplan, W.L.Kennedy, Rev.Mod.Phys. 29, 518 (1957).
15.И.Пийр, Труды института физики и астрономии АН Эст.СССР, 5, 4I (1957).
16.Н.В.Мицкевич, ЖЭТФ 34, I656 (1958).
17.P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc. A246, 333 (1958); Phys.Rev. 114, 924 (1959).
18.A.Peres, N.Rosen, Phys.Rev. 118, 335 (1960).
19.S.Mandelstam, Ann.of Phys. 19, 25 (1962).
20.И.Ю.Кобзарев, Л.Б.Окунь, ЖЭТФ 43, 1904 (1962).
21.P.G.Bergmann, A.Komar, Les Theories Relativistes de la Gravitation, Paris, 1962.
22.I.Goldberg, статья в книге: "Recent developments in general relativity", Pergamon Press, 1962, c.175.

23.J.R.Klauder, Nuovo Cim. 25, 543 (1962).
24.J.Schwinger, Phys.Rev. 13o, 1253 (1963); 132, 1317 (1963).
25.R.P.Feynman, Acta Physika Polonioa 24, 697 (1963).
26.A.Lichnerowicz, статья в книге:
"Relativity Groups and Topology (лекции в Les Houches), 1963.
27.K.Just, Nuovo Cim. 34, 567 (1964).
28.B.S. de Witt, Phys.Rev.Lett. 13, 114 (1964).
29.J.L.Anderson, Rev.Mod.Phys. 36, 929 (1964);
статья в книге: " Гравитация и относительность", Мир, Москва, 1965, стр.435.

30. В.И.Захаров, ЖЭТФ 48, 303 (1965).
31.R.Utiyama, Progr.Theor.Phys. 33, 524 (1965).
32.S.Weinberg, Phys.Rev. 135, B 1o49 (1964); 138, B988 (1965).
33.N.Rosen, Phys.Rev. 57, 147, 150 (1940).
34.A.Papapetrou, Proc.Roy.Irish.Acad. A52, 11 (1948).
35.W.Thirring, Ann.of Phys. 16, 69 (1961).
36.S.A.Bludman, preprint UCRL 9176 (1960).
37.В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов,
Ann.of Phys. 35, 167 (1965).
38.C.N.Yang R.L.Mills, Phys.Rev. 96, 191 (1954).
39. И.В.Полубаринов, препринт ОИЯИ Р-2421 (1965).
40. A.Peres Nuovo Cim. 28, 865 (1963).
41. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов,
Nuovo Cim. 23, 173 (1962); Ann.of Phys. 25, 358 (1963).
42.T.De Donder, Le gravifique Einsteinienne Gauthiers-Villars, Paris, 1921.
43.K.Lanczos, Phys.Zs.23, 537 (1923).
44. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ. Москва , 1955.

45. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов, ЖЭТФ 48, 1625 (1965).

46.C.Moller, Mat.Fys.Skr.Dan.Vid.Sels. 1, N.10 (1961).
47. Х.Умэдзава, Квантовая теория поля, ИЛ, М (1958).

48. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, том. I, ФМ, Москва, 1959.
49. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов, ЖЭТФ 46, 2102 (1964).