ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2691

И.В. Полубаринов

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТАХ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ I

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2691

И.В. Полубаринов

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТАХ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ I

I. ВВЕДЕНИЕ

Уже в теории относительности обнаружилось далеко идущее равноправие пространственной и временной координат. Позднее равноправная (ковариантная) запись стала основой квантовой теории поля. Фирц [I] и Штюккельберг и др. [2-4] указывали, что S-матричный подход дает основу для разумной трактовки процессов, в которых состояния локализованы и в пространстве и во времени. Тем самым равноправие прослеживается еще дальше. Смысл таких пакетов, локализованных в пространстве и времени, ясен, например, из следующих слов Бора [5] (стр.6I). "... Всякая установка, пригодная для изучения обмена энергией и импульсом между электронами и фотонами, необходимо должна оставлять в пространственно-временной локализации процесса допуски,достаточные для того, чтобы придать определенность понятиям волнового числа и частоты... И обратно, всякая попытка более точного определения места столкновения между фотоном и электроном сделала бы невозможным подведение более точного баланса энергии и количества движения; невозможность эта обусловлена неизбежным взаимодействием с неподвижными масштабами и часами, определяющими пространственно-временную систему отсчета". Итак, форма пакета определяется неконтролируемым процессом взаимодействия с измерительным прибором, а при все более и более точном измерении 4-импульса координата и время определяются со все меньшей точностью.[x] Отсюда существуют не только соотношения неопределенностей для импульса и координаты, но и для энергии и времени. Вместе с тем неоднократно подчеркивалось то обстоятельство, что первые соотношения неопределенностей следуют непосредственно из математического аппарата квантовой механики, в то время как соотношение неопределенностей энергии и времени не следует и должно быть принято как дополнительный постулат (постулат Бора).[6] Очевидно, и это давно известно, что для восстановления равноправия времени и координат следует положить в основу перестановочные соотношения для 4-координаты (пространственные координаты и время) и 4-импульса (импульс и энергия) в форме

$$[x_\mu, x_\nu] = 0\ ,\quad [p_\mu, p_\nu] = 0\ ,\quad [x_\mu, p_\nu] = i\delta_{\mu\nu}\ , \tag{I}$$

так что время и энергия выступают как канонически сопряженные переменные.[xx] Запись перестановочных соотношений (I) подразумевает четырехмерную норму и условие ортогональности

$$(\Psi_m, \Psi_n) = \int d^4x\, \Psi_m^*(x)\, \Psi_n(x) = \delta_{mn} \tag{2}$$

где $\Psi_n(x)$ - состояние, характеризуемое индексом n. Такую норму считали непригодной для

---

x) Импульс $\vec{p}$ может быть измерен мгновенно, но из того, что энергия свободной частицы равна $\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ не следует, что энергия тоже может быть измерена мгновенно, так как нам нужно знать массу (энергию покоя), для точного измерения которой требуется бесконечное время.

xx) Соотношение $p^2=-m^2$ означает лишь связь между собственными значениями, характеризующими состояние, а не между операторами p_μ. Именно так в релятивистских уравнениях Дирака, Клейна-Гордона. Уравнение Шредингера $[p_4 - H(\vec{p})]\Psi=0$ аналогично отбирает собственные значения оператора энергии p_4, общие с собственными значениями построенного из операторов $\vec{p}$ гамильтониана $H(\vec{p})$.

описания динамики, так как она якобы приводит к статической физике, в которой устранена эволюция во времени [7] (стр.234). Однако понимание ситуации с нормой существенно зависит от того, в какой картине мы работаем (в шредингеровской, гайзенберговской или взаимодействия). Четырехмерную норму можно совместить с динамикой, если ввести соответствующее представление, которое мы назовем картиной измерения (п. 2). Отметим, что, как показал Н.П.Широков [8], для решений уравнения Клейна 4-мерная норма переходит в обычную 3-мерную.

Полная неопределенность во времени у состояний с определенной энергией не означает какой-либо трудности с пониманием того, что такое начальное, а что такое конечное состояния. В процессах с элементарными частицами так называемые "начальные" и "конечные" состояния фактически всегда характеризуются только 4-импульсами и проекциями спинов безотносительно ко времени. Обычно это состояния с определенным импульсом ("плоские волны"). Чтобы узнать, что состояние имеет определенный 4-импульс, необходимо произвести измерения во всем пространстве и от $-\infty$ до $+\infty$ по времени. В опыте этого нет, но при расчетах мы широко пользуемся такой идеализацией, которая буквально означает, что плотности начальных и конечных частиц при $t\to-\infty$ таковы же, как и при $t\to+\infty$, т.е. что конечные частицы существуют до того, как они были рождены взаимодействием, а начальные- после того,как были уничтожены. Разумеется, желательно иметь более реалистическую картину для изучения хода процессов во времени. Это, в частности, важно для описания частиц с малым временем жизни, обладающих естественной локализацией во времени. Непоследовательность обычного способа вычисления вероятностей перехода для распадов хорошо известна. Без локализации состояний во времени при измерении нельзя последовательно рассматривать распады частиц.

Имея в конечном счете эту цель, автор предлагает возможную интерпретацию состояний, сосредоточенных в ограниченных областях пространства-времени (п.2). Изучена ковариантная запись соотношений неопределенности для двух операторов - 4-векторов, в частности, для 4-координаты и 4-импульса (п.3); в качестве минимизирующих состояний получены гауссовские пакеты в пространстве-времени (п.4); в п.5 представлена грубая динамическая картина, в которой состояния частиц описываются такими пакетами.

2. Картина измерения и интерпретация состояний (пакетов), относящихся к интервалу времени

В то время как толкование размазанности или сосредоточенности состояния в пространстве не вызывает трудностей (и сопровождается соответствующим соотношением неопределенностей для координаты и импульса), толкование размазки во времени вызывает трудности. Мы примем толкование, основывающееся на следующих определениях.

I) Представление, предназначенное для описания состояний, пакетов, размытых во времени, мы назовем "картиной измерения" (КИ). В КИ векторы состояния, по определению, не описывают развитие во времени, не описывают никакой динамики. Это так в обычной гайзенберговской картине (ГК), но там векторы состояния, и в самом деле, не зависят от времени. В КИ векторы состояния будут как угодно зависеть от времени, однако эта зависимость (в отличие от случая шредингеровской картины (ШК)*)) не истолковывается как выражающая ход развития во времени. Разумеется, с помощью подходящих операторов, существенно зависящих от времени, из таких состояний в КИ мы можем, как и в ГК, извлечь нужную информацию об истории, динамике.

2) Зависимость состояний в КИ от времени, например, зависимость, изображенную на рис.I, мы будем понимать как распределение по временам, к которым мы относим состояние**).

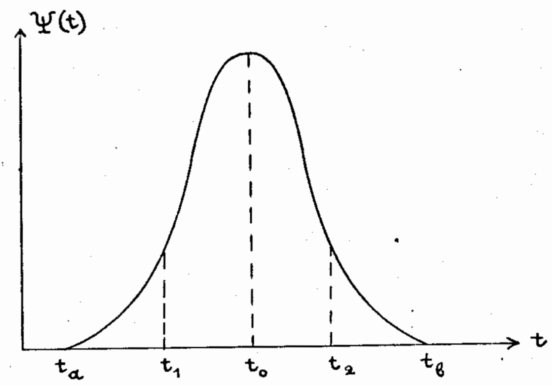

Рис. I.

Так, приведенное на рис. I состояние скорее всего, с вероятностью $|\Psi(t_0)|^2$, относится к моменту времени t_0, с меньшими вероятностями $|\Psi(t_1)|^2$ и $|\Psi(t_2)|^2$ относится к моментам времени t_1 и t_2 и заведомо не относится к моментам времени $t\leqslant t_a$ и $t\geqslant t_b$, для которых $|\Psi(t)|^2=0$ (мы здесь подразумеваем финитную зависимость от времени)***) Другими словами, зависимость состояния в КИ характеризует только неопределенность в моменте времени, к которому относится состояние.

*) С шредингеровской картиной связана одна из трудностей в понимании зависимости от времени. Если состояние в ШК задано как функция времени, то история, ход развития во времени полностью предопределен. Однако мы имеем в виду не такую зависимость.

**) Слова:" $|\Psi(t)|^2$ - вероятность того, что состояние относится к моменту времени t ", сходны со словами:" $|\Psi(\vec{x})|^2$- вероятность того, что состояние находится в точке $\vec{x}$". Несмотря на то, что в ковариантных теориях и здесь формальное равноправие координат и времени прослеживается очень далеко, однако роли времени и координат в природе,разумеется, не тождественны.

***) Но такое размазанное во времени состояние ни в коей мере не означает, что квантово-механическая система отсутствовала до t_a, существовала только от t_a до t_b и бесследно исчезла после t_b. Такое толкование было бы справедливо в ШК, но в ШК подобное поведение системы во времени выглядело бы весьма странным.

3) <u>Примеры зависимости от времени в КИ и их толкование</u>. Состояние в КИ

$$\Psi(t) \sim e^{-a^2(t-t_0)^2}, \tag{3}$$

приближенно представляющее состояние на рис. I, в основном относится к ограниченному интервалу времени и к ограниченному интервалу энергий. Состояние, относящееся к определенному моменту времени, выглядит

$$\Psi(t) = \delta(t-t_0). \tag{4}$$

В нем полностью не определена энергия (любое значение равновероятно). Наоборот, состояние в КИ

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iEt} \tag{5}$$

есть состояние с определенной энергией и полностью неопределенным моментом времени, к которому оно относится. Действительно, $(\Psi^*(t), \Psi(t)) = |e^{-iEt}|^2 = 1$ и $\Psi(t)$ с равной вероятностью относится к любому моменту времени*).

4) Эти примеры интерпретации состояний показывают, что норма состояния должна включать интегрирование по времени. Таким образом, и в этом отношении время участвует в КИ наравне с координатами (по крайней мере, формально), а норма может быть только четырехмерной (2). Смысл нормы очевиден. Если четырехмерная норма равна I, то это значит, что с вероятностью I система находится в данном состоянии, т.е. обладает определенными спектрами квантовых чисел и относится к данному интервалу времени.

Из такого понимания нормы и скалярного произведения сразу же следует, что должно выполняться соотношение неопределенностей для энергии и времени. Подробно и в явно ковариантной форме соотношения неопределенности будут исследованы в п.3.

5) Форма пакета в КИ как в пространстве, так и во времени определяется только неконтролируемым прямым измерением, и в соответствии с тем, что подчеркивают Крылов и Фок [6], не может быть вычислена ни из каких уравнений. "Можно, вообще говоря, заменить данное <u>прямое</u> измерение другим, <u>косвенным</u>, в котором первоначальный "прибор" включен в измеряемую систему, а само измерение производится уже другим прибором. Тогда взаимодействие между объектом и первоначальным прибором может быть описано квантово-механически и изучено более детально посредством нового прибора. Но зато взаимодействие с новым прибором будет теперь неконтролируемым".

---

*) Подчеркнем, что состояния (3), (4) и (5) записаны в "t - представлении". Множитель e^{-iEt} - это выражение независимости от времени при условии, что энергия известна и равна E: в энергетическом представлении $\Psi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dt\, e^{i\varepsilon t}\, \Psi(t) = \delta(\varepsilon - E)$. Если бы в t - представлении вектор состояния вовсе не зависел от t, $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, то это означало бы, что $\Psi(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$, т.е. что $E=0$. Среднее время в состоянии (5) равно нулю: $\bar{t} = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{iEt}\, t\, e^{-iEt} = 0$, а среднее квадратичное бесконечно: $\overline{t^2} = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{iEt}\, t^2\, e^{-iEt} = \infty$.

Одно возражение против задания состояния на интервале времени в том, что это противоречит специальной теории относительности и принципу распространения сигнала в смысле задачи Коши, когда мы вправе произвольно задавать состояние только на пространственно-подобной поверхности, вне светового конуса для данной точки*). Для контролируемых процессов это так, однако, в КИ мы имеем дело с неконтролируемыми процессами. Теория относительности не запрещает произвольно задавать функцию $f(\vec{x}, t)$; если она характеризует неконтролируемый, непредсказуемый процесс (т.е. процесс, не описываемый никакими дифференциальными уравнениями). Против состояния, о котором известно лишь приближенно, к какому моменту времени оно относится, трудно возражать хотя бы потому, что это вполне жизненная ситуация.

Если измерение производится в течение ограниченного интервала времени, то энергия может быть измерена лишь неточно, а состояние, получающееся в результате измерения, может оказаться, например, состоянием вида (3). Только измеряя бесконечное время, мы можем приготовить состояние с определенной энергией (5). Поскольку пакеты в КИ определяются лишь неконтролируемыми измерениями, то соответствующее соотношение для энергии-времени есть, в соответствии с Крыловым и Фоком [6], соотношение Бора. В формализме КИ это соотношение прямо вытекает из математического аппарата.

6) Все основные задачи, рассматриваемые в квантовой механике и теории поля (рассеяние, связанные состояния) "стационарны", т.е. обладают определенной энергией и в ШК зависят от t через экспоненту e^{-iEt}. Мы истолкуем стационарное состояние как такое состояние, в котором энергия строго определена, время полностью неопределенно**), а t имеет смысл лишь переменной представления. Такие состояния в КИ и одинаково записываются в КИ и ШК и описываются уравнением Шредингера. Развитие произвольного пакета можно изучать путем разложения по таким состояниям. Картина измерения (КИ) тесно связана также с картиной взаимодействия (КВ). Пусть в КИ в качестве волновых функций всех частиц в начальных и конечных состояниях взяты решения свободных уравнений (Клейна-Гордона, Дирака), и пусть в КВ рассматривается соответствующий матричный элемент S- матрицы между временами $\pm\infty$, $S = U(+\infty, -\infty)$***). Тогда амплитуды такого процесса в КИ и в КВ совпадают. S- матрица в КИ, применяемая к более широкому классу начальных и конечных состояний, может рассматриваться как обобщение S-матрицы в КВ, известной для указанного частного случая. (См.п.5).

---

*) Обсуждением этого вопроса автор обязан М.И.Широкову.

**) В отличие от обычного понимания как состояния с одной и той же энергией в любой момент времени.

***) Этот оператор S в КВ по самому выводу и конструкции описывает только переходы между состояниями, являющимися решениями свободных уравнений (Клейна-Гордона, Дирака).

3. Соотношения неопределенностей в ковариантной форме

Даже обычные соотношения неопределенности для компонент трехмерных импульса и координаты $4\overline{\Delta p_x^2}\,\overline{\Delta x^2}\geq 1$ не носят ковариантной формы даже относительно трехмерных вращений. Для получения записи соотношений неопределенности, ковариантной относительно вращений и преобразований Лоренца, проделаем стандартный вывод, [9] но с соблюдением ковариантности на всех этапах. Пусть имеются какие-либо два оператора-4-вектора A_μ и B_μ. Составим эрмитовские операторы $\xi_\mu(A_\mu-\overline{A}_\mu)\equiv\xi_\mu\Delta A_\mu$ и $\eta_\mu(B_\mu-\overline{B}_\mu)\equiv\eta_\mu\Delta B_\mu$, где $\overline{A}_\mu$ и $\overline{B}_\mu$ - средние значения операторов A_μ и B_μ в некотором состоянии Ψ, ξ_μ и η_μ -произвольные 4-векторные параметры. Так же, как и A_μ и B_μ, они обладают тремя вещественными и одной чисто мнимой компонентами. Тогда, каков бы ни был вектор состояния Ψ, скалярное произведение

$$F=\left((\xi_\mu\Delta A_\mu+i\eta_\mu\Delta B_\mu)\Psi,(\xi_\nu\Delta A_\nu+i\eta_\nu\Delta B_\nu)\Psi\right) \tag{6}$$

положительно определено, $F>0$. Если ввести для корреляций обозначения

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu}&=2(\Psi,\Delta A_\mu\Delta A_\nu\Psi)\equiv 2\,\overline{\Delta A_\mu\Delta A_\nu}\\ b_{\mu\nu}&=i(\Psi,[A_\mu,B_\nu]\Psi)\equiv i\,\overline{[A_\mu,B_\nu]}\\ c_{\mu\nu}&=2(\Psi,\Delta B_\mu\Delta B_\nu\Psi)\equiv 2\,\overline{\Delta B_\mu\Delta B_\nu}, \end{aligned} \tag{7}$$

то условие положительности скалярного произведения (6) запишется в виде квадратичной формы

$$2F=a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu+2b_{\mu\nu}\xi_\mu\eta_\nu+c_{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu>0. \tag{8}$$

Если $\det\|a_{\mu\nu}\|\neq 0$, то квадратичную форму в (8) можно разбить на две

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu+2b_{\mu\nu}\xi_\mu\eta_\nu+c_{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu&=a_{\mu\nu}(\xi_\mu+a^{-1}_{\mu\rho}b_{\rho\sigma}\eta_\sigma)(\xi_\nu+a^{-1}_{\nu\lambda}b_{\lambda\tau}\eta_\tau)+\\ &+(c_{\mu\nu}-\widetilde{b}_{\mu\sigma}a^{-1}_{\sigma\tau}b_{\tau\nu})\eta_\mu\eta_\nu, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\sim$ обозначает транспонирование. Такая запись облегчает получение условий положительной определенности. Эти условия формулируются с помощью шпуров от различных степеней матриц

$$a=\|a_{\mu\nu}\|,\quad c=\|c_{\mu\nu}\|\quad \text{и}\quad d=\|d_{\mu\nu}\|\equiv\|c_{\mu\nu}-\widetilde{b}_{\mu\sigma}a^{-1}_{\sigma\tau}b_{\tau\nu}\|, \tag{10}$$

т.е. с помощью циклов

$$\begin{aligned} a_1&=a_{\mu\mu},\ a_2=a_{\mu\nu}a_{\nu\mu},\ a_3=a_{\mu\nu}a_{\nu\lambda}a_{\lambda\mu},\ \dots\\ c_1&=c_{\mu\mu},\ c_2=c_{\mu\nu}c_{\nu\mu},\ c_3=c_{\mu\nu}c_{\nu\lambda}c_{\lambda\mu},\ \dots\\ d_1&=d_{\mu\mu},\ d_2=d_{\mu\nu}d_{\nu\mu},\ d_3=d_{\mu\nu}d_{\nu\lambda}d_{\lambda\mu},\ \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Благодаря этому условия положительной определенности и соотношения неопределенности будут выражены ковариантно относительно ортогональных преобразований

$$x'_\mu=r_{\mu\nu}x_\nu,\qquad r_{\mu\lambda}r_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu} \tag{12}$$

Сперва рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Тогда в формулах (6)-(12) индексы $\mu,\nu,\dots$ пробегают значения 1,2,3 и условия положительной определенности записываются *)

---

*) См.Приложение I.

$$\left.\begin{aligned} &a_1>0\\ &a_1^2-a_2>0\\ &a_1^3-3a_1a_2+2a_3>0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1>0\\ &c_1^2-c_2>0\\ &c_1^3-3c_1c_2+2c_3>0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &d_1>0\\ &d_1^2-d_2>0\\ &d_1^3-3d_1d_2+2d_3>0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Соотношения (15) и есть запись соотношений неопределенности в произвольной системе координат в явно инвариантной форме.

Аналогично можно записать соотношения неопределенности в евклидовом пространстве произвольной размерности.

Обратимся к пространству Минковского, где индексы $\mu,\nu\ \dots$ пробегают значения 1,2,3,4. Мнимость четвертых компонент ведет к тому, что условия положительной определенности формы (8) или (9) записываются иначе *)

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu\alpha\beta4}\varepsilon_{\nu\alpha\beta4}a_{\mu\nu}>a_1;\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\alpha4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\alpha4}a_{\mu_1\nu_1}a_{\mu_2\nu_2}>a_1^2-a_2,\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_34}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_34}a_{\mu_1\nu_1}a_{\mu_2\nu_2}a_{\mu_3\nu_3}>a_1^3-3a_1a_2+2a_3,\\ &0>a_1^4-6a_1^2a_2+8a_1a_3+3a_2^2-6a_4 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu\alpha\beta4}\varepsilon_{\nu\alpha\beta4}c_{\mu\nu}>c_1\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\alpha4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\alpha4}c_{\mu_1\nu_1}c_{\mu_2\nu_2}>c_1^2-c_2\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_34}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_34}c_{\mu_1\nu_1}c_{\mu_2\nu_2}c_{\mu_3\nu_3}>c_1^3-3c_1c_2+2c_3\\ &0>c_1^4-6c_1^2c_2+8c_1c_3+3c_2^2-6c_4 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu\alpha\beta4}\varepsilon_{\nu\alpha\beta4}d_{\mu\nu}>d_1,\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\alpha4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\alpha4}d_{\mu_1\nu_1}d_{\mu_2\nu_2}>d_1^2-d_2,\\ &2\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_34}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_34}d_{\mu_1\nu_1}d_{\mu_2\nu_2}d_{\mu_3\nu_3}>d_1^3-3d_1d_2+2d_3,\\ &0>d_1^4-6d_1^2d_2+8d_1d_3+3d_2^2-6d_4 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Левые части неравенств (16) можно записать в виде $2a_{mm}$, $2[a_{mm}^2-a_{mn}a_{nm}]$, $2[a_{mm}^3-3a_{mm}a_{n\ell}a_{\ell n}+2a_{mn}a_{n\ell}a_{\ell m}]$, где индексы m,n,ℓ пробегают лишь значения

I,2,3. Аналогично записываются левые части неравенств (I7) и (I8). Другими словами, в левых частях (I6)-(I8) стоят помноженные на 2 выражения той же конструкции, что и правые части (I6)-(I8), но только трехмерные (т.е. удвоенные значения левых частей неравенств (I3)-(I5)).

Соотношения (I8) - ковариантная запись четырехмерных соотношений неопределенности. Хотя в неравенствах (I6)-(I8) участвуют 44-компоненты тензоров, но тем не менее они инвариантны относительно четырехмерных ортогональных преобразований (I2) - трехмерных вращений и преобразований Лоренца. Для пояснения приведем хорошо известный пример аналогичной ситуации - это условия, определяющие положительный времене-подобный вектор

$$p_0 > \sqrt{-\vec{p}^2} \quad , \qquad 0 > p^2. \tag{I9}$$

Отметим, что условия типа (I3) в пространстве любого числа измерений при чисто вещественных или частью чисто мнимых координатах суть условия того, чтобы квадратичная форма $a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ имела ту же сигнатуру, что и фундаментальная форма $x_\mu x_\mu$. В 4-мерном пространстве Минковского, например, фундаментальная форма $\vec{x}^2+x_4^2=\vec{x}^2-x_0^2$ не определена прложительно. В соответствии с этим при условиях типа (7) *) матрица $\|a_{\mu\nu}\|$, будучи приведена к диагональному виду, имела бы $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $a_{33}>0$, $a_{44}>0$, т.е. форма $a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ не была бы положительной и имела бы ту же сигнатуру, что и фундаментальная форма $x_\mu x_\mu$. Форма $a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ будет положительной, если после приведения матрицы $\|a_{\mu\nu}\|$ к диагональному виду выполняются неравенства

$$a_{11}>0\ ,\ a_{22}>0\ ,\ a_{33}>0\ ,\ a_{44}<0\ \ (a_{00}>0\,!).$$

Именно таков смысл неравенств (I6), (I7) и (I8).

4. Минимизирующие пакеты

Теперь мы займемся отысканием минимизирующих состояний (пакетов) Ψ, которые обращают неравенство (8) в равенство. Для этого нужно найти минимум квадратичной формы (6) или (8) по ξ и η при ненулевых значениях этих переменных. Дифференцируя форму (6) или (8) по ξ и η, приходим к уравнениям

$$a_{\mu\nu}\xi_\nu + b_{\mu\nu}\eta_\nu = 0\ , \qquad b_{\mu\nu}\xi_\mu + c_{\mu\nu}\eta_\mu = 0. \tag{20}$$

Эта система уравнений при ненулевых ξ и η совместна лишь при

$$d_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} - \tilde{b}_{\mu\sigma}\, a^{-1}_{\sigma\tau} b_{\tau\nu} = 0, \tag{2I}$$

а при этом неравенства (I8) переходят в равенства 0=0. При выполнении (20) и (2I) квадратичная форма (6) или (8) обращается в нуль

*) Запись этих условий для любого числа измерений см. в Приложении I.

$$F = \Big(\big(-(a^{-1}b)_{\mu\nu}\Delta A_\mu + i\Delta B_\nu\big)\eta_\nu\Psi\ ,\ \big(-(a^{-1}b)_{\lambda\rho}\Delta A_\lambda + i\Delta B_\rho\big)\eta_\rho\Psi\Big) = 0 \tag{22}$$

где ξ_μ было выражено с помощью (20). В силу положительной определенности метрики гильбертова пространства обращение в нуль нормы вектора гильбертова пространства означает, что сам он равен нулю

$$\big(-(a^{-1}b)_{\mu\nu}\Delta A_\mu + i\Delta B_\nu\big)\eta_\nu\Psi = 0,$$

а в силу произвольности η_ν

$$\big(-(a^{-1}b)_{\mu\nu}\Delta A_\mu + i\Delta B_\nu\big)\Psi = 0. \tag{23}$$

Для того чтобы решить это уравнение и найти вектор состояния Ψ, нужно знать явный вид операторов A_μ и B_μ.

Мы рассмотрим теперь частный случай, когда A_μ есть оператор 4-импульса, а B_μ -оператор 4-координаты

$$A_\mu = p_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\ , \qquad B_\mu = x_\mu\ , \tag{24}$$

так что

$$[A_\mu, B_\nu] = [p_\mu, x_\nu] = -i\,\delta_{\mu\nu} \tag{25}$$

$$a_{\mu\nu} = 2\,\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu}\ , \quad b_{\mu\nu} = i\,\overline{[p_\mu, x_\nu]} = \delta_{\mu\nu}\ , \quad c_{\mu\nu} = 2\,\overline{\Delta x_\mu \Delta x_\nu} \tag{26}$$

$$d_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} - a^{-1}_{\mu\nu}. \tag{27}$$

При этом условие (2I) записывается в виде

$$a_{\mu\nu}c_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \tag{28}$$

и ,следовательно, матрицы корреляций импульсов и координат взаимно обратные. Если преобразованием координат привести матрицу $\|a_{\mu\nu}\|$ к диагональному виду, то $\|c_{\mu\nu}\|$ также станет диагональной и условие (28) запишется

$$4\,\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\mu}\cdot\overline{\Delta x_\mu \Delta x_\mu} = 1 \tag{29}$$

(суммирования по μ нет)

Соотношение (29) есть условие минимизации неопределенностей, и в этом смысле решение уравнения (23) есть минимизирующий пакет.

Подставим (24) и (25) в (23), и уравнение для минимизирующего пакета примет вид

$$\Big[-2\,\overline{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \bar{p}_\nu\Big) + i\big(x_\mu - \bar{x}_\mu\big)\Big]\Psi = 0. \tag{30}$$

Легко убедиться, что решением этого уравнения является состояние

$$\Psi = e^{-\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu}(x_\mu - \bar{x}_\mu)(x_\nu - \bar{x}_\nu) + i\bar{p}_\mu x_\mu}. \tag{3I}$$

Это и есть искомый минимизирующий пакет. При соблюдении условий (I6) квадратичная форма в показателе экспоненты положительно определена. Если все корреляции $\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu}$ равны нулю, то состояние Ψ превращается в обыкновенную плоскую волну, т.е. в состояние с определенным 4-импульсом, а следовательно и массой. В общем случае состояние (3I) принципиально не обладает ни определенной 4-координатой, ни определенным 4-импульсом и массой. Среднее значение квадрата массы, т.е. оператора $-p_\mu^2$, в состоянии (3I) равно

$$(\Psi, (-p_\mu^2)\Psi) = \overline{p_\mu^2} = \overline{p}_\mu^2 + \overline{\Delta p_\mu \Delta p_\mu}. \qquad (32)$$

Если плоские волны e^{ipx} – это состояния, релятивистски инвариантные по форме и характеризуемые 4-вектором импульса p_μ как параметром, то пакеты (3I) – другая совокупность релятивистски инвариантных по форме состояний, которые характеризуются, как параметрами, и 4-вектором $\overline{p_\mu}$ (средний 4-импульс) и тензором второго ранга $\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu}$ (тензор корреляций).

В нерелятивистском случае, т.е. при $\mu = m$, $\nu = n \neq 4$ (трехмерное евклидово пространство) состояния (3I) суть наиболее общая форма трехмерных минимизирующих пакетов. В литературе чаще всего обсуждается один специальный случай таких пакетов

$$\Psi = e^{-a^2(\vec{x} - \overline{\vec{x}})^2 + i\overline{\vec{p}}\vec{x}}, \qquad (33)$$

соответствующий матрице корреляций вида

$$\overline{\Delta p_m \Delta p_n} = a^2 \delta_{mn}. \qquad (34)$$

Существенно, что в рассматриваемом релятивистском случае из-за псевдоевклидовости матрицу корреляций нельзя выбрать в аналогичной форме $\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu} = a^2 \delta_{\mu\nu}$, так как при этом не выполнялись бы условия (I6), и квадратичная форма в показателе экспоненты (3I) не была бы положительно определенной. Состояния были бы неинтегрируемы и неограниченно росли при $t \to \pm\infty$, не описывая таким образом локализованных во времени состояний.

Отметим, что состояния вида (3I) при определенном задании матрицы корреляций

$$\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu} = \frac{1}{\ell_0^2}\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right) \qquad (35)$$

рассматривал М.А. Марков /I0/. При этом пакеты считались функциями не координат x_μ, а некоторых внутренних переменных ξ_μ, которые не сопряжены 4-импульсу p_μ, и в (35) можно было полагать $p^2 = -m^2$, где m – масса частицы. Пакеты в обычном x-пространстве с аналогичной матрицей корреляций $\overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu} = a^{-2}(\delta_{\mu\nu} + 2n_\mu n_\nu)$, где вместо 4-импульса стоял некоторый произвольный времени-подобный вектор n_μ $(n^2 = -1)$, рассматривали Д.И.Блохинцев и Г.И.Колеров[II].

5. Матричный элемент перехода между минимизирующими пакетами

На рис.2 на примере рассеяний изображена общая картина квантово-механических процессов, когда начальные и конечные

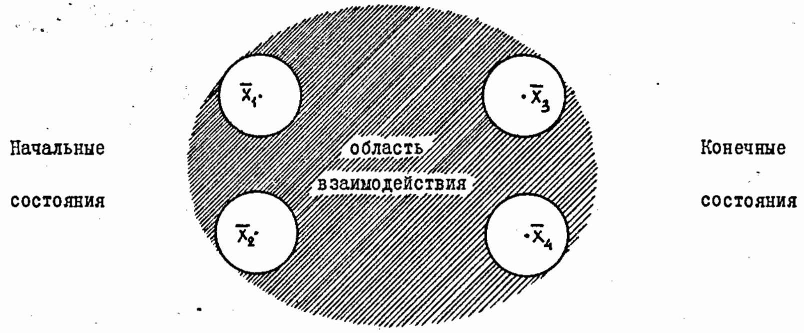

Рис.2

состояния мыслятся сосредоточенными в пространстве и времени около точек с 4-координатами $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ и $\overline{x}_4$. Располагая такие состояния в различных областях пространства-времени, мы можем изучать пространственно-временной ход процессов. Это особенно важно для изучения распадов. Ниже будет изложена грубая схема для расчета амплитуд подобных процессов.

Пусть мы имеем диаграмму Фейнмана с n вершинами и ℓ линиями. Внутренним линиям такой диаграммы отвечает произведение функций распространения

$$F(x_1 \cdots x_n) = \prod_{j=1}^{\ell} \Delta_j^c(y_j), \qquad (36)$$

где

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij} \qquad (37)$$

x_i – 4-координаты всех вершин диаграммы, а $\|c_{ij}\|$ – матрица связей [I2] *), причем у c_{ij} первый индекс – номер вершины, а второй – номер линии. Амплитуда перехода между состояниями с определенными импульсами пропорциональна

$$\widetilde{F}(p_1 \cdots p_n) = \int \prod_{k=1}^{n} dx_k \, e^{i\sum_{a=1}^{n} p_a x_a} \prod_{j=1}^{\ell} \Delta_j^c(y_j), \qquad (38)$$

где p_a – импульс, которых входит в a-ю вершину; внутренним вершинам соответствуют $p_a = 0$, однако удобно для единообразия сохранять эти импульсы произвольными.

*) См. также Приложение 2.

Нас интересует амплитуда перехода между локализованными состояниями; для определенности, скажем, между рассмотренными выше минимизирующими состояниями. Для вычисления таких амплитуд проинтегрируем (36) не с плоскими волнами (как в (38)), а с минимизирующими пакетами (31). В каждую вершину может входить несколько частиц, так что импульс p_a есть сумма импульсов частиц, входящих в a-ю вершину: $p_a = \sum_r p_{a_r}$. Поэтому интересующая нас амплитуда запишется

$$\widetilde{F}(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) = \int \prod_{k=1}^{n} dx_k \, e^{\sum_{a=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\sum_r a_{\mu\nu}^{a_r}(x_\mu^a - \bar{x}_\mu^{a_r})(x_\nu^a - \bar{x}_\nu^{a_r}) + i\bar{p}_a x_a\right]} \prod_{j=1}^{\ell} \Delta_j^c(y_j). \tag{39}$$

Здесь $\bar{p}_a = \sum_r \bar{p}_{a_r}$, $\bar{p}_{a_r}$ и $\bar{x}^{a_r}$ – средние значения 4-импульса и 4-координаты a_r -той частицы, а $\|a_{\mu\nu}^{a_r}\| \equiv 2\|\overline{\Delta p_\mu^{a_r}\Delta p_\nu^{a_r}}\|$ – матрица корреляций компонент ее 4-импульса.

Теперь естественно, как это делают в случае плоских волн, [12-14] выполнить интегрирование по $x_1 \dots x_n$ *). Для этого следует воспользоваться α – представлением для функций Δ^c

$$\Delta^c(y) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty d\alpha \, e^{\frac{i}{2}\left(\alpha y^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)}, \tag{40}$$

а для общности, чтобы сразу охватить и случай дираковских частиц, заменим $\Delta^c(y)$ на

$$S^c(y) = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial y} - m\right)\Delta^c(y). \tag{41}$$

Это дает для амплитуды

$$\widetilde{F}(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) = (8\pi^2)^{-\ell}\int_0^\infty \prod_{j=1}^{\ell} d\alpha_j (i\alpha_j\gamma^j y_j - m_j)\, e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}} \cdot$$

$$\cdot \int dx_1 \cdots dx_n \, e^{\sum_{a=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\sum_r a_{\mu\nu}^{a_r}(x_\mu^a - \bar{x}_\mu^{a_r})(x_\nu^a - \bar{x}_\nu^{a_r}) + i\bar{p}_a x_a\right] + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j y_j^2}. \tag{42}$$

Подставляя сюда y_j в виде (37) и заменяя в множителях $(i\alpha_j\gamma^j y_j - m_j)$ переменные x_i на производные по $\bar{p}_i$, получаем

$$\widetilde{F}(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) = (8\pi^2)^{-\ell}\int_0^\infty \prod_{j=1}^{\ell} d\alpha_j \left(\alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\gamma^j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} - m_j\right) e^{-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{m_j^2}{\alpha_j}} \cdot$$

$$\cdot \int dx_1 \cdots dx_n \, e^{\sum_{a=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\sum_r a_{\mu\nu}^{a_r}(x_\mu^a - \bar{x}_\mu^{a_r})(x_\nu^a - \bar{x}_\nu^{a_r}) + i\bar{p}_a x_a\right] + \frac{i}{2}\sum_{a,b=1}^{n} A_{ab}x_a x_b}, \tag{43}$$

где $\|A_{ab}\|$ – $n\times n$ – матрица с элементами

---

*) См. также Приложение 2.

$$A_{ab} = \sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j c_{aj} c_{bj}. \tag{44}$$

Первую квадратичную форму в показателе экспоненты можно представить в виде

$$\sum_r a_{\mu\nu}^{a_r}(x_\mu^a - \bar{x}_\mu^{a_r})(x_\nu^a - \bar{x}_\nu^{a_r}) = a_{\mu\nu}^a (x_\mu^a - z_\mu^a)(x_\nu^a - z_\nu^a) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{\mu\nu}^{a_r}(a_a^{-1})_{\nu\lambda} a_{\lambda\rho}^{a_s}(\bar{x}_\mu^{a_r} - \bar{x}_\mu^{a_s})(\bar{x}_\nu^{a_r} - \bar{x}_\nu^{a_s}), \tag{45}$$

где

$$a_{\mu\nu}^a = \sum_r a_{\mu\nu}^{a_r}\ ; \qquad a_a^{-1} = \|a_{\mu\nu}^a\|^{-1}$$

$$z_\mu^a = (a_a^{-1})_{\mu\lambda}\sum_r a_{\lambda\rho}^{a_r}\bar{x}_\rho^{a_r}. \tag{46}$$

Выражение во второй строке (45) не зависит от переменных интегрирования x_i, так что экспонента в соответствующей степени может быть вынесена за знак интеграла. Далее целесообразно сделать замену $x^a - z^a \to x^a$, что дает

$$\widetilde{F}(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) = (8\pi^2)^{-\ell}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{r,s} a_{\mu\nu}^{a_r}(a_a^{-1})_{\nu\lambda}a_{\lambda\rho}^{a_s}(\bar{x}_\mu^{a_r} - \bar{x}_\mu^{a_s})(\bar{x}_\nu^{a_r} - \bar{x}_\nu^{a_s})\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \prod_{j=1}^{\ell} d\alpha_j \left(\alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\gamma^j\frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} - m_j\right) \cdot e^{\frac{i}{2}\sum_{a,b=1}^{n} A_{ab} z_a z_b - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}} \cdot$$

$$\cdot \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \, e^{\sum_{a=1}^{n}\left[i q_a x_a - \frac{1}{2}a_{\mu\nu}^a x_\mu^a x_\nu^a\right] + \frac{i}{2}\sum_{a,b=1}^{n} A_{ab}x_a x_b}, \tag{47}$$

где

$$q_a = \bar{p}_a + \sum_b A_{ab} z_b. \tag{48}$$

Интеграл по всем x_i равен

$$\int dx_1 \dots dx_n \, e^{\sum_{a=1}^{n} i q_a x_a - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ab;\mu\nu}x_\mu^a x_\nu^b} = \frac{(4\pi^2)^n}{\sqrt{-\mathrm{Det}\mathcal{A}}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{B}_{ab;\mu\nu}q_\mu^a q_\nu^b}, \tag{49}$$

где $\mathcal{A}$ – матрица

$$\mathcal{A} = \|\mathcal{A}_{ab;\mu\nu}\| \equiv \|a_{\mu\nu}^a \delta_{ab} - i\delta_{\mu\nu}A_{ab}\|, \tag{50}$$

а $\mathcal{B}$ – обратная к ней

$$\mathcal{B}_{ab;\mu\nu}\mathcal{A}_{bc;\nu\lambda} = \delta_{ac}\delta_{\mu\lambda}. \tag{51}$$

В результате для амплитуды перехода между минимизирующими пакетами получаем выражение

$$\tilde F(\bar p_1\cdots\bar p_n)=\frac{(4\pi^2)^n}{(8\pi^2)^\ell}\exp\Big\{-\frac12\sum_{a=1}^n\sum_{r,s}a^{a_r}_{\mu\nu}(a^{-1}_a)_{\nu\lambda}a^{a_s}_{\lambda\rho}(\bar x^{a_r}_\mu-\bar x^{a_s}_\mu)(\bar x^{a_r}_\nu-\bar x^{a_s}_\nu)\Big\}\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\prod_{j=1}^{\ell}d\alpha_j\Big(\alpha_j\sum_{i=1}^n c_{ij}\gamma^j\frac{\partial}{\partial\bar p_i}-m_j\Big)e^{\frac i2\sum_{a,b=1}^n A_{ab}z_az_b-\frac i2\sum_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}-\frac12 B_{ab;\mu\nu}q^a_\mu q^b_\nu}\cdot(-\mathrm{Det}\,A)^{-\frac12} \qquad (52)$$

Как и в случае плоских волн, здесь осталось лишь интегрирование по параметрам α_j. Гауссовские факторы, входящие в каждой вершине от минимизирующих пакетов, осуществляют регуляризацию амплитуды, особенно, если для внутренних вершин, полагая $\bar p_a=0$, сохранять $a^a_{\mu\nu}\neq0$.

Разумеется, такая схема, основанная на выражении для амплитуды (39), или (52), является очень грубой. В ней нарушена унитарность. В более последовательной формулировке должны быть модифицированы пропагаторы, например, путем интегрирования по массе с подходящим весом.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Условия положительной определенности квадратичной формы в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах

Пусть квадратичная форма

$$a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \qquad (\mu,\nu=1,\dots n) \qquad (\text{П.I})$$

положительна, т.е. при любых не равных одновременно нулю значениях ее аргументов ($x_\mu\neq0$)

$$a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu>0\,. \qquad (\text{П.2})$$

Ортогональным преобразованием

$$y_\mu=\tau_{\mu\nu}x_\nu\ ,\qquad \tau_{\mu\lambda}\tau_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu} \qquad (\text{П.3})$$

ее можно привести к диагональному виду

$$\sum_{i=1}^n\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2\,, \qquad (\text{П.4})$$

так что форма будет положительно определена, когда

$$\lambda_i>0 \qquad (i=1\cdots n). \qquad (\text{П.5})$$

Коэффициенты λ_i – суть собственные значения матрицы $\|a_{\mu\nu}\|$, т.е. решения векового уравнения

$$\mathrm{Det}\,\|a_{\mu\nu}-\lambda\delta_{\mu\nu}\|=(-1)^n\big[\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+$$
$$+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\dots+\lambda_{n-1}\lambda_n)\lambda^{n-2}+\ \dots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\big]= \qquad (\text{П.6})$$
$$=(-1)^n\big[\lambda^n-D_1\lambda^{n-1}+D_2\lambda^{n-2}+\dots+(-1)^nD_n\big]=0\,.$$

Система неравенств (П.5) эквивалентна системе неравенств

$$D_1=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n>0\,,$$
$$D_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\dots+\lambda_{n-1}\lambda_n>0\,, \qquad (\text{П.7})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0^{*)}$$

для коэффициентов векового уравнения, т.е. условия положительности квадратичной формы можно записать в виде (П.7). Отметим, что λ_i и, следовательно, D_i суть инварианты ортогональных преобразований.

Коэффициенты D_i можно записать в явно инвариантной форме непосредственно через матрицу $\|a_{\mu\nu}\|$. Используя явно инвариантную запись детерминанта с помощью единичного полностью антисимметричного тензора $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$

$$\mathrm{Det}\,\|a_{\alpha\beta}\|=\frac1{n!}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n} \qquad (\text{П.8})$$

(см., например, I5), мы можем представить вековое уравнение (П.6) в форме

$$\mathrm{Det}\,\|a_{\alpha\beta}-\lambda\delta_{\alpha\beta}\|=\frac1{n!}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_n}(a_{\alpha_1\beta_1}-\delta_{\alpha_1\beta_1}\lambda)\cdots(a_{\alpha_n\beta_n}-\delta_{\alpha_n\beta_n}\lambda)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n!}\Big\{\lambda^n\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}-$$
$$-C_n^{n-1}\lambda^{n-1}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\alpha_2\cdots\alpha_n}a_{\alpha_1\beta_1}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-m}C_n^m\lambda^m\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_{n-m}\alpha_{n-m+1}\cdots\alpha_n}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_{n-m}\beta_{n-m}}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}C_n^2\lambda^2\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_{n-2}\beta_{n-2}}+$$
$$+(-1)^{n-1}n\lambda\,\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_{n-1}\alpha_n}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}+$$
$$+(-1)^n\ \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_n}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}\Big\}=$$
$$=(-1)^n\big[\lambda^n-D_1\lambda^{n-1}+D_2\lambda^{n-2}+\dots+(-1)^nD_n\big]=0\,. \qquad (\text{П.9})$$

---

*) То, что из (П.5) следует (П.7), очевидно. Докажем обратное. Обозначим

$$\xi_1=\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1}\,,\quad\cdots\quad \xi_{n-1}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\,.$$

Тогда неравенства (П.7) перепишутся

$$\xi_1+\lambda_n>0\ (1)\,,\ \xi_2+\xi_1\lambda_n>0\ (2)\,,\ \cdots\xi_{n-1}+\xi_{n-2}\lambda_n>0\ (n-1)\,,\ \xi_{n-1}\lambda_n>0\ \ (n)\,.$$

Из (n) имеем две возможности: а) $\xi_{n-1},\lambda_n>0$ и б) $\xi_{n-1},\lambda_n<0$. Если бы осуществлялась вторая возможность, то из $(n-1)$ вытекало бы, что $\xi_{n-2}<0$, и аналогично, что вообще $\xi_{n-1}<0,\dots\xi_1<0$. Последнее вместе с $\lambda_n<0$ противоречит неравенству (I). Итак, мы доказали, что реализуется только возможность а): $\xi_{n-1}>0, \lambda_n>0$. Так как в (П.7) λ_n ничем не выделено, то мы доказали, что из (П.7) следует (П.5). Ч.т.д. Отметим, что если одно, два и т.д. из λ_i равны нулю, то, соответственно, последнее, два последних и т.д. неравенств (П.7) обращаются в равенства.

На основании известных формул [15]

$$\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_n} = \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_1\beta_2}\cdots\delta_{\alpha_1\beta_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{\alpha_n\beta_1}\delta_{\alpha_n\beta_2}\cdots\delta_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix} \qquad (\text{П.10})$$

$$\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_{n-1}\alpha_n} = (n-1)!\,\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}_{\beta_1\cdots\beta_{n-1}}, \qquad (\text{П.11})$$

$$\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n} = (n-m)!\,\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_m}, \qquad (\text{П.12})$$

ясно, что D_i выражаются через циклы

$$a_1 \equiv a_{\mu\mu},\ a_2 = a_{\mu\nu}a_{\nu\mu},\ a_3 = a_{\mu\nu}a_{\nu\lambda}a_{\lambda\mu},\ \cdots\ a_n = \underbrace{a_{\mu\nu}a_{\nu\lambda}\cdots a_{\sigma\mu}}_{n\ \text{множителей}} \qquad (\text{П.13})$$

т.е. шпуры степеней матрицы $\|a_{\mu\nu}\|$. Циклы явно инвариантны относительно ортогональных преобразований. Вычисления дают: что

$$1!\,D_1 = a_1, \qquad (\text{П.14.1})$$

$$2!\,D_2 = a_1^2 - a_2, \qquad (\text{П.14.2})$$

$$3!\,D_3 = a_1^3 - 3a_1a_2 + 2a_3, \qquad (\text{П.14.3})$$

$$4!\,D_4 = a_1^4 - 6a_1^2a_2 + 8a_1a_3 + 3a_2^2 - 6a_4, \qquad (\text{П.14.4})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m!\,D_m = \frac{1}{(n-m)!}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_m\beta_m} =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=m} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m}\frac{m!}{1^{k_1}k_1!\,2^{k_2}k_2!\cdots m^{k_m}k_m!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m} \qquad (\text{П.14.m})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При этом при $m=n$ мы получаем выражение детерминанта D_n через циклы. Так, формулы (П.14.1) - (П. 14.m) дают выражения детерминантов 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, ... m - го порядков через циклы. Для детерминанта D_n выражение (П.14.m) с $m=n$ доказывается следующим образом. D_n содержит $n!$ членов, отвечающих всем $n!$ перестановкам n множителей. Как известно, каждая перестановка разбивается на циклы. Перестановку, содержащую k_1 единичных циклов, k_2 - двойных и т.д. называют перестановкой класса (k_1, k_2 ...). В детерминанте все члены, отвечающие перестановкам одного и того же класса, равны. Следовательно, число их равно числу перестановок класса (k_1, k_2 ...) (см. ,например, [16])

$$C(k_1,k_2,\cdots k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}k_1!\,2^{k_2}k_2!\cdots n^{k_n}k_n!}. \qquad (\text{П.15})$$

Точно так же доказываются формулы (П.14) и для других коэффициентов векового уравнения(П.9).*)

---

*) Другое доказательство см. в [17].

При помощи формул (П.14) условия положительной определенности $D_i > 0$ (П.7) могут быть непосредственно выражены через матрицу $\|a_{\mu\nu}\|$.

Обратимся к случаю пространства Минковского, когда присутствуют мнимые переменные x , $x_\mu = \{\vec{x}, ix_0\}$. Требование, чтобы квадратичная форма

$$a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$$

была положительно определенной, разумеется, снова инвариантно относительно ортогональных преобразований (П.3), при условии, что коэффициенты $a_{\mu\nu}$ рассматриваются как тензор. Однако ввиду мнимости x_4 эти условия будут отличными от (П.7). Для получения условий положительной определенности перейдем к вещественным переменным

$$y_\mu = f_{\mu\nu}x_\nu = \{\vec{x}, x_0\}$$

$$b_{\mu\nu} = f_{\mu\lambda}a_{\lambda\rho}f_{\rho\nu}, \qquad (\text{П.16})$$

где используется диагональная величина $f_{\mu\nu}$ с компонентами

$$f_{\mu\nu} = \{1,1,1,-i\}, \qquad f_{\mu\nu}f_{\nu\lambda} = g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.17})$$

Форма теперь перепишется

$$a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu = b_{\mu\nu}y_\mu y_\nu. \qquad (\text{П.18})$$

Поскольку теперь мы имеем дело с вещественными переменными, то условия положительной определенности формально будут иметь вид, аналогичный (П.7), а именно

$$\begin{aligned} 1!\,\mathcal{D}_1 &= b_1 > 0 \\ 2!\,\mathcal{D}_2 &= b_1^2 - b_2 > 0 \\ 3!\,\mathcal{D}_3 &= b_1^3 - 3b_1b_2 + 2b_3 > 0 \\ 4!\,\mathcal{D}_4 &= \mathrm{Det}\,\|b_{\mu\nu}\| = b_1^4 - 6b_1^2b_2 + 8b_1b_3 + 3b_2^2 - 6b_4 > 0. \end{aligned} \qquad (\text{П.19})$$

Теперь от $b_{\mu\nu}$ вернемся к $a_{\mu\nu}$. Используя явный вид $f_{\mu\nu}$, легко найти, что условия (П.19) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= -D_1 + 2D_1^{(3)} > 0 \\ \mathcal{D}_2 &= -D_2 + 2D_2^{(3)} > 0 \\ \mathcal{D}_3 &= -D_3 + 2D_3^{(3)} > 0 \\ \mathcal{D}_4 &= -D_4 > 0, \end{aligned} \qquad (\text{П.20})$$

где D_i – выражения (П.I4) для 4-мерного пространства, а $D_i^{(3)}$ такие же выражения для 3-мерного пространства. Они записываются

$$1!\,D_1^{(3)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\alpha\beta4}\,\varepsilon_{\nu\alpha\beta4}\,a_{\mu\nu}\,,$$

$$2!\,D_2^{(3)} = \varepsilon_{\mu_1\mu_2\alpha4}\,\varepsilon_{\nu_1\nu_2\alpha4}\,a_{\mu_1\nu_1}\,a_{\mu_2\nu_2}\,, \qquad (\text{П.2I})$$

$$3!\,D_3^{(3)} = \varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_34}\,\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_34}\,a_{\mu_1\nu_1}\,a_{\mu_2\nu_2}\,a_{\mu_3\nu_3}\,.$$

Таким образом, условия (П.20) в отличие от (П.7) с D_i (П.I4) не носят явно инвариантного вида. В них участвуют 44-компоненты тензора, и поэтому они родственны условиям $p_0 > \sqrt{-p^2}$, $p^2 < 0$ для времени-подобного вектора.

Пусть теперь квадратичную форму $a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ в частной системе отсчета удалось привести к диагональному виду. Тогда, используя для D_i выражения (П.7) через λ_i и выражения

$$D_1^{(3)} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\,,$$

$$D_2^{(3)} = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\,, \qquad (\text{П.22})$$

$$D_3^{(3)} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\,,$$

находим, что неравенства (П.20) записываются

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 > 0\,,$$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-\lambda_4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) > 0\,,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3-\lambda_4(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1) > 0\,, \qquad (\text{П.23})$$

$$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 > 0\,,$$

которые эквивалентны

$$\lambda_1>0\,,\ \lambda_2>0\,,\ \lambda_3>0\,,\ \lambda_4<0\,. \qquad (\text{П.24})$$

Приложение 2. Амплитуда перехода в случае плоских волн. Матрица связей и ее модификации.

Амплитуда перехода между состояниями с определенными импульсами (38), будучи распространена на случай дираковских частиц, записывается

$$\tilde F(p_1\cdots p_n) = \int\prod_{k=1}^{n}dx_k\, e^{i\sum_{a=1}^{n}p_a x_a}\prod_{j=1}^{\ell} S_j^c(y_j) = \qquad (\text{П.25.I})$$

$$= \int\prod_{k=1}^{n}dx_k\, e^{i\sum_{a=1}^{n}p_a x_a}\prod_{j=1}^{\ell}\left(\gamma^j\frac{\partial}{\partial y_j}-m_j\right)\Delta_j^c(y_j) = \qquad (\text{П.25.2})$$

$$= (8\pi^2)^{-\ell}\int_0^\infty\prod_{j=1}^{\ell}d\alpha_j\left(i\alpha_j\gamma^j y_j-m_j\right)e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}}\int dx_1\ldots dx_n\, e^{i\sum_{a=1}^{n}p_a x_a+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j y_j^2}. \qquad (\text{П.25.3})$$

Подставляя сюда y_j в виде (37) и заменяя в множителях $(i\alpha_j\gamma^j y_j - m_j)$, как это было сделано в п.5, переменные x_i на производные по p_i, получаем

$$\tilde F(p_1\cdots p_n) = (8\pi^2)^{-\ell}\int_0^\infty\prod_{j=1}^{\ell}d\alpha_j\left(\alpha_j\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\gamma^j\frac{\partial}{\partial p_i}-m_j\right)e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}}$$

$$\int dx_1\ldots dx_n\, e^{i\sum_{a=1}^{n}p_a x_a+\frac{i}{2}\sum_{a,b=1}^{n}A_{ab}x_a x_b}\,, \qquad (\text{П.26})$$

где A_{ab} – элементы матрицы (44). Строки матрицы $\|c_{ij}\|$ всегда линейно зависимы из-за того, что y_j выражаются только через разности x_i. Это, как известно, ведет к закону сохранения полного 4-импульса. Из-за зависимости строк $\|c_{ij}\|$ оказывается особенной матрица $\|A_{ab}\|$ и усложняется интегрирование по x_i. Один способ взять интеграл по x_i – сделать замены [I4]

$$x_i' = x_i - x_n\,,\quad i = 1,2\ldots n-1\,. \qquad (\text{П.27})$$

После этого интегрирование по x_n сразу же даст закон сохранения 4-импульса, а оставшаяся в экспоненте квадратичная форма уже не будет особенной и интегрирование проводится без труда [I4]. Вместе x_n мы можем выделить любое другое x_i. Однако все равно этот способ несимметричен. Симметричный способ, предложенный Намбу, [I3] состоит в дополнении матрицы A до неособенной матрицы A^I с элементами

$$A'_{ab} = A_{ab}+\lambda\delta_{ab}\,, \qquad (\text{П.28})$$

вычислении интеграла с такой матрицей и в переходе к пределу $\lambda\to 0$ в окончательном результате. Так как

$$\int dx_1\ldots dx_n\, e^{i\sum_{a=1}^{n}p_a x_a+\frac{i}{2}\sum_{a,b=1}^{n}A'_{ab}x_a x_b} =$$

$$= \frac{(4\pi^2 i)^n}{\mathrm{Det}\,A'\,|\mathrm{Det}\,A'|}\, e^{-\frac{i}{2}B'_{ab}p_a p_b}\,, \qquad (\text{П.29})$$

где $\|B'_{ab}\|$ – матрица, обратная к A^I, то

$$\widetilde{F}(p_1\cdots p_n)=(4\pi^2 i)^n(8\pi^2)^{-\ell}\int\limits_0^\infty\prod_{j=1}^{\ell}d\alpha_j\left(\alpha_j\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\gamma^j\frac{\partial}{\partial p_i}-m_j\right)e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\mathrm{Det}\,A'|\mathrm{Det}\,A'|}\,e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{a,b=1}^{n}B'_{ab}p_a p_b}=$$

$$=(4\pi^2 i)^n(8\pi^2)^{-\ell}\int\limits_0^\infty\prod_{j=1}^{\ell}d\alpha_j\left(\alpha_j\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\gamma^j\frac{\partial}{\partial p_i}-m_j\right)e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{\ell}\frac{m_k^2}{\alpha_k}}\cdot$$

$$(2\pi)^4\,\delta\left(\sum_{a=1}^{n}p_a\right)\frac{1}{D^2}\,e^{-\frac{i}{2}\sum\limits_{a,b=1}^{n}B_{ab}p_a p_b}, \qquad (П.30)$$

где

$$D\equiv\left.\frac{d\,\mathrm{Det}\,A'}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \qquad (П.31)$$

$$B_{ab}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\mathrm{Det}\,A_{(ab)}(\lambda)-\mathrm{Det}\,A_{(ab)}(0)}{\mathrm{Det}\,A(\lambda)}=\frac{\sum_k \mathrm{Det}\,A_{(ak,bk)}}{D} \qquad (П.32)$$

$A_{(ab)}$ и $A_{(ak,bk)}$ означают миноры матрицы A, полученные в результате вычеркивания указанных строк и столбцов. [13]

Отметим, что в п.5 в формуле (47) показатель экспоненты сразу содержал неособенную матрицу квадратичной формы. Ту роль, которую у Намбу играл параметр λ, в п.5 выполняли матрицы корреляций минимизирующих пакетов.

Выражение (П.30) – это тот предел, к которому должно стремиться выражение (52) в пределе состояний с определенными импульсами, т.е. когда все $a_{\mu\nu}^{\alpha_r}$.

Замечание о дополнении матрицы связи до квадратной неособенной матрицы и о переходе к интегрированию по контурным импульсам

В формуле (37) и в дальнейших формулах фигурируют элементы матрицы связей $c=\|c_{ij}\|$ [12]. Номер строки i есть номер вершины, а номер столбца j есть номер линии. Элементы c_{ij} равны

$c_{ij}=I$, если линия j входит в вершину i;

$c_{ij}=-I$, если линия j выходит из вершины i;

$c_{ij}=0$, если линия j не входит и не выходит из вершины i.

Пример I. Собственная энергия.

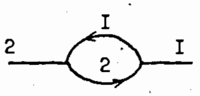

Рис.3

$$c=\begin{Vmatrix} I & -I \\ -I & I \end{Vmatrix}$$

Пример 2. Четырехвостка.

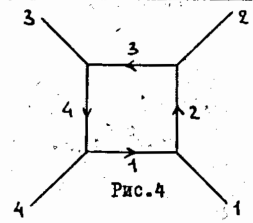

Рис.4

$$c=\begin{Vmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & -I \\ -I & 0 & 0 & I \end{Vmatrix}$$

Как следствие того, что y_j суть лишь разности x_i, ранг этих матриц на единицу ниже размерности, т.е. всегда одна строка есть линейная комбинация других.

От особенной матрицы и, вообще говоря, прямоугольной матрицы c можно перейти к неособенной и квадратной c'. Переход осуществляется следующим образом.

I) Вычеркнем последнюю строку матрицы c, что соответствует исключению переменной x_n и переходу к переменным x'_i (П.27), так что

$$y_j=\sum_{i=1}^{n-1}x'_i c_{ij}. \qquad (П.33)$$

2) Введем некоторые новые, контурные переменные x'_i $(i=n,n+1,\dots\ell)$, которые добавляются к каждому y_j при обходе данного контура. При этом тем или иным способом выделяются независимые контуры, и переменные x'_i приписываются только независимым контурам. Независимых контуров ровно $\ell-(n-1)$. В результате все y_j заменятся на

$$y'_j=\sum_{i=1}^{\ell}x'_i c'_{ij} \qquad j=1,\dots\ell, \qquad (П.34)$$

которые все независимы в отличие от y_j.

3) Чтобы добавление новых переменных не сказалось на амплитуде $\widetilde{F}(p_1\cdots p_n)$ (38) (или (П.25.I)) добавим интегрирование по контурным переменным x'_i и p'_i с номерами $i=n,n+1\dots\ell$

$$\widetilde{F}(p_1\cdots p_n)=\frac{1}{(2\pi)^{(\ell-n)4}}\delta\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\int\prod_{i=1}^{\ell}dx'_i\int\prod_{r=n}^{\ell}dp'_r\,e^{i\sum\limits_{a=1}^{\ell}p'_a x'_a}\prod_{j=1}^{\ell}\Delta^c_j(y'_j) \qquad (П.35)$$

$$p'_i=p_i \text{ при } i=1,\dots n-1.$$

Если выполнить интегрирование по p'_i с $i=n\dots\ell$, то возникнут δ-функции $\delta(x'_i), i=n\dots\ell$, и дальнейшее интегрирование по x'_i с $i=n\dots\ell$ приведет к исключению и переменных x'_i с $i=n\dots\ell$, так что, в частности, y'_j перейдут в y_j.

Матрица $\|c'_{ij}\|$, построенная указанным способом, уже не будет особенной. Приведем примеры.

Пример I. Диаграмме рис.3 соответствует

$$c' = \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{matrix} \right\| , \qquad c'^{-1} = \mathrm{I}/2 \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & \mathrm{I} \end{matrix} \right\|$$

Пример.2. Диаграмме рис.4 соответствует

$$c' = \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{matrix} \right\| , \qquad c'^{-1} = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 2 & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & -2 & 2 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & -2 & -3 & \mathrm{I} \end{matrix} \right\|$$

Пример 3. Диаграмме рис.5 соответствует

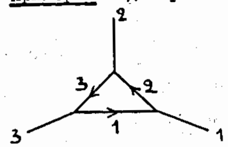

Рис.5

$$c' = \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \cancel{-\mathrm{I}} & \cancel{0} & \cancel{\mathrm{I}} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{matrix} \right\|$$

Здесь приведена и лишняя строка матрицы C , подлежащая вычеркиванию.

Пример 4. Диаграмме рис.6 соответствует

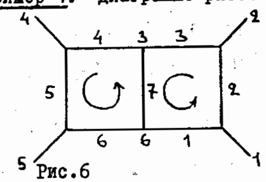

Рис.6

$$c' = \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \\ \cancel{-\mathrm{I}} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\mathrm{I}} & \cancel{\mathrm{I}} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{matrix} \right\|$$

Здесь линейно зависимая строка вычеркнута и заменена двумя контурными по числу независимых контуров.

Итак, контурные строки получаются расстановкой I или -I при обходе по контуру в

соответствии с направлением линии. Строки, соответствующие вершинам, лишь линейно независимы между собой,но не ортогональны. То же относится и к контурным строкам. В то же время интересно, что все контурные строки оротогональны всем строкам вершин.

Выражение (П.35) запишем кратко как

$$\widetilde{F}(p_1 \cdots p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4(\ell-n)}} \delta\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \int \prod_{j=n}^{\ell} dp'_j \, \widetilde{F}(p'_1 \cdots p'_\ell),$$

где выделено интегрирование по контурным импульсам p'_i $(i=n \cdots \ell)$. Так как матрица неособенная, то в выражении для $\widetilde{F}(p'_1 \cdots p'_\ell)$ легко перейти к интегрированию по y'

$$\widetilde{F}(p'_1 \cdots p'_\ell) = \frac{1}{\mathrm{Det}\,\|c'_{ij}\|} \int \prod_{i=1}^{\ell} dy'_i \, e^{i \sum_{i,j=1}^{\ell} c'^{-1}_{ij} p'_i y'_j} \prod_{j=1}^{\ell} \Delta^c_j(y'_j) .$$

Подстановка Δ^c в p - представлении

$$\Delta^c_j(y'_j) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk_j \, e^{ik_j y'_j} \frac{1}{k_j^2 + m_j^2}$$

позволяет сразу же взять интеграл по всем y'_j и k_j

$$\widetilde{F}(p'_1 \cdots p'_\ell) = \frac{1}{\mathrm{Det}\,\|c'_{ij}\|} \int \prod_{j=1}^{\ell} dk_j \, \delta\left(k_j + \sum_i^{\ell} p'_i c'^{-1}_{ij}\right) \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{k_j^2 + m_j^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Det}\,\|c'_{ij}\|} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\sum_i^{\ell} p'_i c'^{-1}_{ij}\right)^2 + m_j^2} .$$

Таким образом, получаем для амплитуды выражение

$$\widetilde{F}(p_1 \cdots p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4(\ell-n)} \mathrm{Det}\,\|c_{ij}\|} \delta\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \int \prod_{k=n}^{\ell} dp'_k \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\sum_i^{\ell} p'_i c'^{-1}_{ij}\right)^2 + m_j^2} .$$

Это выражение для фейнмановской амплитуды интересно тем, что вместо интегрирования по импульсам линий оно содержит интегрирование по импульсам контуров, что иногда оказывается удобным (Ландау).

В заключение автор благодарит Б.Н. Валуева, Г.И. Копылова, М.А. Маркова, В.И.Огиевецкого, М.И. Широкова за обсуждение.

Литература

1. M. Fierz. Helv.Phys.Acta, 23, 731 (1950).
2. E.C.G.Stueckelberg, T.A.Green, Helv.Phys.Acta, 24, 153 (1951).
3. E.C.G.Stueckelberg. Phys.Rev. 81, 130 (1951).
4. E.C.G.Stueckelberg, G.Wanders, Helv.Phys.Acta, 27, 667 (1954).
5. Н. Бор. Атомная физика и человеческое познание. ИЛ, Москва, 1961.
6. Н.С. Крылов, В.А. Фок. ЖЭТФ, 17, 93 (1947).
7. Луи де Бройль. Магнитный электрон, теория Дирака, ОНТИ, Харьков, 1936, гл. XXII.
8. М.И. Широков, ЯФ, 2, 332 (1965); препринт ОИЯИ Е-2478 (1965).
9. E.S.Schrödinger, Berl.Ber. 296 (1930). Фон Нейман. Математические основы квантовой механики, "Наука", Москва, 1964, стр. 174.
10. М.А. Марков. Гипероны и K-мезоны. ФМ, Москва, 1958, стр. 202.
11. Д.И. Блохинцев, Г.И. Колеров. Nuovo Cim. 34, 163 (1964).
12. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. Год.Соф. Универ. Физ.-мат. фак. 55, № 2, 117 (1960/61); ЖЭТФ, 42, 1285 (1962).
13. V.Nambu, Nuovo Cim. 6, 1070 (1957).
14. K.Symanzik, Progr.Theor. Phys. 20, 690 (1958).
15. О. Веблен. Инварианты дифференциальных квадратичных форм, ИЛ, Москва, 1948.
16. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, Москва, 1963.
17. Ю. Швингер, Теория квантованных полей, ИЛ, Москва, 1956, стр. 140.