ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р. 267

Н.Н. Боголюбов

О ПРИНЦИПЕ КОМПЕНСАЦИИ И МЕТОДЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

г. Дубна, 1958 год

P. 267

Н.Н. Боголюбов

О ПРИНЦИПЕ КОМПЕНСАЦИИ И МЕТОДЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

§ 1. Принцип компенсации

В настоящей работе мы рассмотрим возможные обобщения принципа компенсации опасных диаграмм на случаи пространственно неоднородных состояний, а также установим его связь с методом самосогласованного поля.

Важным примером здесь может служить вопрос об электродинамике сверхпроводящего состояния, когда мы должны исследовать реакцию динамической системы на приложение внешнего неоднородного поля.

Пусть $\vec{A}(r)$ будет вектор-потенциал, зависящий от $\vec{r}$. Тогда в индивидуальном гамильтониане электрона будет дополнительный член:

$$-\frac{e}{2m}\left\{(pA)+(Ap)\right\}+\frac{e^2}{2m}A^2$$

нарушающий пространственную однородность.

Заметим, что наличие членов этого типа делает недостаточной компенсацию диаграмм, соответствующих импульсам $K, -K$. Действительно, определяя $\vec{A}(\vec{r})$ суперпозицией компонент Фурье:

$$A(q)e^{-i(q,r)}$$

мы видим, что в таком же смысле опасными будут и диаграммы с произвольными импульсами K_1, K_2, во всяком случае те, для которых $q=K_1+K_2$ достаточно мало. Ясно, что их нельзя исключить нашим обычным каноническим преобразованием, перепутывающим амплитуды рождения и уничтожения импульсов $\pm K$, так как оно содержит лишь одну произвольную функцию u_K (или v_K).

Чтобы компенсировать диаграммы с любой парой импульсов, мы должны воспользоваться более общим каноническим преобразованием, сформулированным в работе /1/:

$$a_f=\sum_\nu\left(u_{f\nu}\alpha_\nu+v_{f\nu}\overset{+}{\alpha}_\nu\right) \qquad /1/$$

где $f=(p,\sigma)$; σ - спиновый индекс, $u_{f\nu}$, $v_{f\nu}$ - произвольные функции, связанные своеобразными соотношениями ортонормировки:

$$\sum_\nu\left\{u_{f\nu}\overset{*}{u}_{f'\nu}+v_{f\nu}\overset{*}{v}_{f'\nu}\right\}=\delta(f-f')$$

$$\sum_\nu\left\{u_{f\nu}v_{f'\nu}+u_{f'\nu}v_{f\nu}\right\}=0 \qquad /2/$$

Именно эти соотношения обеспечивают канонический характер рассматриваемого преобразования /1/. Для простоты изложения мы изучим здесь обобщенный принцип компенсации применительно к гамильтониану с прямым взаимодействием между частицами, поскольку в таком случае уже первое приближение приводит к нетривиальному результату.

Как уже отмечалось ранее /2/, введение в рассмотрение, например, электронно-фотонного взаимодействия потребует перехода ко второму приближению. Имея в виду различные приложения, возьмем выражение полного гамильтониана в достаточно общей форме:

$$H = \sum T(f,f')\overset{+}{a}_f a_{f'} + \tfrac{1}{2}\sum \mathcal{V}(f_1,f_2;f_2',f_1')\overset{+}{a}_{f_1}\overset{+}{a}_{f_2} a_{f_2'} a_{f_1'}$$

$$T(f,f') = I(f,f') - \lambda\,\delta(f-f') \qquad /3/$$

где λ - химический потенциал, I - индивидуальный гамильтониан частиц, $\mathcal{V}$ - энергия взаимодействия пары частиц.

Мы, разумеется, предполагаем здесь, что I и $\mathcal{V}$ удовлетворяют обычным условиям симметрии, эрмитовости и т.п. Принцип компенсации опасных диаграмм в рассматриваемом первом приближении будет:

$$\langle \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2} H \rangle_0 = 0 \qquad /4/$$

Усреднение берется по состоянию C_0, соответствующему вакууму для новых амплитуд α :

$$\alpha_\nu C_0 = 0\,; \quad C_0^{*}\overset{+}{\alpha}_\nu = 0 \qquad /5/$$

Уравнение /4/ можем раскрыть, подставив сюда выражения /1/ и вычислив простые вакуумные средние. Таким путем получим явные уравнения для определения неизвестных u, v, которые надо решать совместно с условиями /2/. В ряде случаев более удобно придать этим уравнениям несколько иную форму. Покажем для этого, что из /4/ следует, что:

$$\mathcal{U} \equiv \langle [a_{f_1} a_{f_2}; H] \rangle_0 = 0$$

$$\mathcal{B} \equiv \langle [\overset{+}{a}_{f_1} a_{f_2}; H] \rangle_0 = 0 \qquad /6/$$

Имеем действительно:

$$\equiv \sum_{\nu_1,\nu_2} \langle [(u_{f_1\nu_1}\alpha_{\nu_1} + v_{f_1\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_1})(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2} + v_{f_2\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}), H] \rangle_0 =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} u_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \langle \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2} H - H\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0 + \sum_{\nu_1,\nu_2} u_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \langle \alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2} H - H\alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}\rangle +$$

$$+ \sum_{\nu_1,\nu_2} v_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \langle \overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2} H - H\overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0 + \sum_{\nu_1,\nu_2} v_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \langle \overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2} H - H\overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}\rangle_0$$

Но, ввиду /5/:

$$\langle H\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle = \langle \overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2} H\rangle = \langle \overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2} H\rangle_0 = \langle H\overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0 = 0$$

и, кроме того:

$$\langle \alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2} H - H\alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}\rangle_0 = \langle -\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}\alpha_{\nu_1} H + H\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}\alpha_{\nu_1}\rangle_0 = 0$$

Отсюда на основании /4/ и вытекает:

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} u_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \langle \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2} H\rangle_0 - \sum_{\nu_1,\nu_2} v_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \langle \alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_1} H\rangle_0^{*} = 0$$

Аналогично доказывает и второе из уравнений /6/. Нетрудно убедиться также, что из уравнений /6/ следует уравнение /4/. Таким образом обе эти системы /4/ и /6/ полностью эквивалентны.

Покажем сейчас, что сами формы $\mathcal{U}$ и $\mathfrak{B}$ не являются независимыми. Начнем с преобразования соотношений ортонормировки /2/. Введем комбинированные индексы:

$$g = (f,\rho); \quad \rho = 0,1$$
$$\omega = (\nu,\tau); \quad \tau = 0,1 \qquad /7/$$

и положим

$$\varphi_{\nu,0}(f,0) = \overset{*}{v}_{f\nu}, \quad \varphi_{\nu,0}(f,1) = u_{f\nu}$$
$$\varphi_{\nu,1}(f,0) = \overset{*}{u}_{f\nu}, \quad \varphi_{\nu,1}(f,1) = v_{f\nu} \qquad /8/$$

В таких обозначениях рассматриваемые соотношения принимают обычный вид:

$$\sum_{\omega} \overset{*}{\varphi}_{\omega}(g)\,\varphi_{\omega}(g') = \delta(g-g') \qquad /9/$$

откуда следует, что

$$\sum_{g} \overset{*}{\varphi}_{\omega}(g)\,\varphi_{\omega'}(g) = \delta(\omega-\omega')$$

или, в старых обозначениях:

$$\sum_{f}\left\{\overset{*}{u}_{f\nu_1} u_{f\nu_2} + \overset{*}{v}_{f\nu_2} v_{f\nu_1}\right\} = \delta(\nu_1-\nu_2)$$

$$\sum_{f}\left\{\overset{*}{v}_{f\nu_1} u_{f\nu_2} + \overset{*}{v}_{f\nu_2} u_{f\nu_1}\right\} = 0 \qquad /10/$$

С помощью этих соотношений нетрудно выразить амплитуды α, $\overset{+}{\alpha}$ через a, $\overset{+}{a}$

$$\alpha_{\nu} = \sum_{f}\left\{\overset{*}{u}_{f\nu} a_f + v_{f\nu}\overset{+}{a}_f\right\} \qquad /11/.$$

Обратим теперь внимание на тождество

$$\langle [\overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}; H]\rangle_0 = 0 \qquad /12/$$

обусловленное лишь свойствами /5/. Подставив сюда выражение /11/, найдем:

$$\sum_{f_1,f_2}\langle [(u_{f_1\nu_1}\overset{+}{a}_{f_1} + \overset{*}{v}_{f_1\nu_1} a_{f_1})(\overset{*}{u}_{f_2\nu_2} a_{f_2} + v_{f_2\nu_2}\overset{+}{a}_{f_2}); H]\rangle_0 = 0$$

или, раскрывая

$$\sum_{f_1,f_2} u_{f_1\nu_1}\overset{*}{u}_{f_2\nu_2}\langle[\overset{+}{a}_{f_1}a_{f_2}; H]\rangle_0 + \sum_{f_1,f_2} u_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2}\langle[\overset{+}{a}_{f_1}\overset{+}{a}_{f_2}; H]\rangle_0 +$$

$$+\sum_{f_1,f_2}\overset{*}{v}_{f_1\nu_1}\overset{*}{u}_{f_2\nu_2}\langle[a_{f_1}a_{f_2}; H]\rangle_0 + \sum_{f_1,f_2}\overset{*}{v}_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2}\langle[a_{f_1}\overset{+}{a}_{f_2}; H\rangle_0 = 0$$

Таким образом, убеждаемся, что между формами и имеются тождественные соотношения[x/]:

$$\sum_{f_1,f_2}\Big\{ u_{f_1\nu_1}\overset{*}{u}_{f_2\nu_2}\mathcal{B}(f_1,f_2)+u_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\mathcal{U}(f_1,f_2)+$$

$$+\overset{*}{v}_{f_1\nu_1}\overset{*}{u}_{f_2\nu_2}\mathcal{U}(f_1,f_2)+\overset{*}{v}_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\overset{*}{\mathcal{B}}(f_1,f_2)\Big\}=0 \qquad /13/$$

Перейдем теперь к нахоДлению явных выражений для $\mathcal{U}$ и $\mathcal{B}$.

Имеем

$$\mathcal{U}(f_1,f_2)=\sum_f\Big\{T(f_1,f)\langle a_f a_{f_2}\rangle_0+T(f_2,f)\langle a_{f_1}a_f\rangle_0\Big\}+$$

$$+\sum_{f_1',f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\langle a_{f_1'}a_{f_2'}\rangle_0+$$

$$+\sum_{f,f_1',f_2'}V(f_1,f;f_2',f_1')\langle\overset{+}{a}_f a_{f_2}a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0+ \qquad /14/$$

$$+\sum_{f,f_1',f_2'}V(f,f_2;f_2',f_1')\langle\overset{+}{a}_f a_{f_1}a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0$$

[x/] Заметим, что если мы в формулах /6/, определяющих , , заменили усреднение по вакуумному состоянию C_0 усреднением

$$\frac{Sp(\dots D)}{Sp\,D}$$

по некотору распределению D, диагональному в представлении $\dots n_\nu\dots$ $(n_\nu=\overset{+}{\alpha}_\nu\alpha_\nu)$, то тождества /13/ все же имели бы место при $\nu_1=\nu_2$. Действительно, ввиду диагональности D :

$$Sp(\overset{+}{\alpha}_\nu\alpha_\nu HD)=Sp(HD\overset{+}{\alpha}_\nu\alpha_\nu)=Sp(H\overset{+}{\alpha}_\nu\alpha_\nu D)$$

и, следовательно,

$$[\overset{+}{\alpha}_\nu\alpha_\nu;H]=0$$

и также

$$\mathcal{B}\,(f_1,f_2)=\sum_f\left\{T(f_2,f)\langle \overset{+}{a}_{f_1} a_f\rangle_0 - T(f,f_1)\langle \overset{+}{a}_f\, a_{f_2}\rangle\right\}-$$
$$-\sum_{f,f_1',f_2'}\left\{V(f_1',f_2',f,f_1)\langle \overset{+}{a}_{f_1'}\overset{+}{a}_{f_2'}\, a_f\, a_{f_2}\rangle_0 - \right.$$
$$\left. - V(f_2,f;f_2',f_1')\langle \overset{+}{a}_{f_1}\overset{+}{a}_f\, a_{f_2'}\, a_{f_1'}\rangle_0\right\} \qquad /15/.$$

Входящие сюда вакуумные средние типа

$$F(f,f')=\langle \overset{+}{a}_f a_{f'}\rangle_0\ ;\quad \Phi(f_1,f_2)=\langle a_{f_1} a_{f_2}\rangle_0$$

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')=\langle \overset{+}{a}_{f_1}\overset{+}{a}_{f_2}\, a_{f_2'}\, a_{f_1'}\rangle_0 \qquad /16/$$

$$\Phi_2(f_1,f_2,f_3,f_4)=\langle \overset{+}{a}_{f_1}\, a_{f_2}\, a_{f_3}\, a_{f_4}\rangle_0 \qquad /17/$$

определим, выражая амплитуды a, $\overset{+}{a}$ через α, $\overset{+}{\alpha}$ с помощью формулы /1/. Таким образом найдем:

$$F(f,f')=\sum_\nu \overset{*}{v}_{f\nu}\, v_{f'\nu}\ ,\quad \Phi(f_1,f_2)=\sum_\nu u_{f_1\nu}\, v_{f_2\nu}\,. \qquad /18/$$

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')=F(f_1,f_1')F(f_2,f_2')-$$
$$-F(f_1,f_2')F(f_2,f_1')+\overset{*}{\Phi}(f_1,f_2)\,\Phi(f_1',f_2')\ ; \qquad /19/$$

$$\Phi_2(f_1,f_2,f_3,f_4)=F(f_1,f_2)\,\Phi(f_3,f_4)- \qquad /20/$$
$$-F(f_1,f_3)\,\Phi(f_2,f_4)+F(f_1,f_4)\,\Phi(f_3,f_4)\ ;$$

Подставив полученные выражения в /14/, /15/, мы получим искомые явные выражения для

$$\mathcal{U}\,(f_1, f_2) = \mathcal{U}\,(f_1, f_2 \,|\, F, \Phi)$$

$$\mathcal{B}\,(f_1, f_2) = \mathcal{B}\,(f_1, f_2 \,|\, F, \Phi)$$

Имеем, например:

$$\mathcal{U}(f_1, f_2 \,|\, F, \Phi) = \sum_{f} \left\{ E(f_1, f)\Phi(f, f_2) + E(f_2, f)\Phi(f_1, f) \right\} + + S(f_1, f_2) - \sum_{f} \left\{ F(f, f_1) S(f, f_2) + F(f, f_2) S(f_1, f) \right\} \qquad /21/$$

где

$$E(f_1, f) = T(f_1, f) + + \sum_{f' f''} \left\{ V(f_1, f''; f', f) - V(f_1, f''; f, f') \right\} F(f'' f') \qquad /22/$$

$$S(f_1, f_2) = \sum_{f'_1 f'_2} V(f_1, f_2; f'_2, f'_1)\, \Phi(f'_1, f'_2)$$

Итак, наш обобщенный принцип компенсации приводит в первом приближении к уравнениям:

$$\mathcal{U}\,(f_1, f_2 \,|\, F, \Phi) = 0 \qquad /23/$$

$$\mathcal{B}\,(f_1, f_2 \,|\, F, \Phi) = 0$$

которые ранее были уже получены /3,4/ с помощью обобщения хорошо известного метода самосогласованного поля Фока /8/. Кроме этих уравнений мы имеем еще дополнительное условие, а именно, функции F, Φ должны быть представимы в форме /18/. Было бы очевидно весьма целесообразно сформулировать такое дополнительное условие в виде ряда соотношений, наложенных непосредственно на F, Φ. Заметим прежде всего, что из /18/ сразу же вытекает, что

$$\overset{*}{F}(f, f') = F(f', f)\,; \quad \Phi(f_2, f_1) = -\Phi(f_1, f_2) \qquad /24/$$

Введем опять комбинированные индексы g, ω и рассмотрим матрицу:

$$K(g; g') = \sum_{\omega} \overset{*}{\varphi}_{\omega}(g)\, \varphi_{\omega}(g')\, n_{\omega} \qquad /25/$$

в которой

$$n_{\nu,0} = 1\,; \quad n_{\nu,1} = 0$$

Тогда

$$K(f,0;f',0)=\sum_\nu v_{f\nu}v^*_{f'\nu};\quad K(f,0;f',1)=\sum_\nu v_{f\nu}u_{f'\nu}$$

$$K(f,1;f',0)=\sum_\nu u^*_{f\nu}v^*_{f'\nu};\quad K(f,1;f',1)=\sum_\nu u^*_{f\nu}u_{f'\nu}$$

Отсюда получим в силу условий ортонормировки /2/:

$$K(g,g')=\begin{vmatrix} F(f',f), & -\phi(f,f') \\ \phi^*(f,f'), & \delta(f-f')-F(f,f') \end{vmatrix} \qquad /26/$$

С другой стороны, прямо из определения /25/ мы видим, что $\varphi_\omega(g)\ n_\omega$ будут соответственно собственными векторами и числами оператора K. Так как эти собственные числа равны нулю или единице, K будет проекционным оператором и потому:

$$K=K^2 \qquad /27/$$

Раскрывая это соотношение, найдем дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции F и ϕ :

$$F(f_1,f_2)=\sum_f\{F(f_1,f)F(f,f_2)+\phi^*(f,f_1)\phi(f,f_2)$$

$$\sum_f\{F(f_1,f)\phi^*(f,f_2)+F(f_2,f)\phi^*(f,f_1)\}=0 \qquad /28/$$

Покажем сейчас, что условия /24/, /28/ полностью эквивалентны условию представимости функций F, ϕ в форме /18/. Для этого нам остается доказать, что любые F, ϕ, удовлетворяющие условиям /24/, /28/, действительно представимы в виде /18/. Прежде всего воспользуемся тривиальными условиями /24/ и введем матрицу $K(g,g')$ соотношением /26/. В силу /24/ K очевидно будет эрмитовской и потому может быть представлена в форме /25/, в которой $\varphi_\omega(g)$ будет представлять ортонормированную систему собственных векторов K. Введем в пространстве точек $\{g\}$ точечное преобразование T, меняющее $(f,0)$ на $(f,1)$ и наоборот. Имеем:

$$TK\equiv K(Tg,Tg')=$$

$$=\begin{vmatrix} \delta(f-f')-F(f,f'), & \phi^*(f,f') \\ -\phi(f,f'), & F(f',f) \end{vmatrix}=\delta(g-g')-K^*(g,g')$$

Ввиду этого свойства нетрудно заметить, что если $\varphi(g)$ есть какой-либо собственный вектор оператора K, n - соответствующее собственное число, то $\varphi^*(Tg)$, $1-n$ будут также собственным вектором и числом для K.

Таким образом, нумерацию $\{\omega\}$ собственных векторов и чисел оператора K можем осуществить системой двух индексов $\{\nu, \tau\}$, $(\tau = 0, 1)$, положив:

$$n_{\nu,0} = n_\nu \,; \qquad n_{\nu,1} = 1 - n_\nu$$

$$\varphi_{\nu,0}(g) = \varphi_\nu(g) \,; \quad \varphi_{\nu,1}(g) = \varphi_\nu^*(Tg) \qquad /29/$$

Теперь воспользуемся условиями /28/, из которых вытекает, что

$$K = K^2$$

и, следовательно, $n_\omega = 0.1$. Единичное значение припишем n_ν, а нулевое $1 - n_\nu$, ликвидировав тем самым произвол, содержащийся в разбиении индекса ω на $(\nu, 0)$ и $(\nu, 1)$.

Определив $\varphi_{\nu,0}(g)$, $\varphi_{\nu,1}(g)$, мы можем теперь определить функции $u_\nu(f)$, $v_\nu(f)$, обратив соотношения /8/. Так как $\varphi_\omega(g)$ образуют обычную ортонормировочную систему, мы видим, что найденные функции u, v будут удовлетворять соотношениям /2/. Для окончания нашего доказательства нам остается лишь раскрыть равенства /25/ и заметить, что из них непосредственно вытекают представления[x/] /18/.

Итак, наша задача привелась к решению уравнений /23/ совместно с дополнительными условиями /24/, /28/. Функции u, v явно здесь уже не фигурируют. Найдя выражения для F и Φ, мы можем затем уже определить и систему функций $\{u, v\}$, с помощью изложенного выше приема. Подчеркнем здесь, что определение системы $\{u, v\}$ содержит большой произвол. Действительно, пусть $\varphi_{\nu,0}(g)$ представляет ортонормированную систему собственных векторов для оператора K, соответствующих единичному собственному значению. Если мы подвергнем ее произвольному унитарному преобразованию, мы опять получим ортонормированную систему собственных векторов оператора K, соответствующих единичному собственному числу. То же замечание, разумеется, относится и к $\varphi_{\nu,1}(g)$.

Видим, следовательно, что системы $\{\varphi_{\nu,0}(g)\}$, $\{\varphi_{\nu,1}(g)\}$ определены лишь с точностью до произвольных унитарных преобразований, действующих на индекс ν. Поэтому и в функциях $\{u, v\}$ содержится та же степень произвола.

---

x/ Интересно отметить, что если бы мы имели дело с функциями, удовлетворяющими только условиям /24/, то, повторив сделанные рассуждения, мы получили бы вместо /18/ представления вида: $F(f,f') = \sum_\nu \{v^*_{f\nu} v_{f'\nu}(1-n_\nu) + u^*_{f\nu} u_{f'\nu} n_\nu\}$

$$\Phi(f,f') = \sum_\nu \{u_{f\nu} v_{f'\nu}(1-n_\nu) + v_{f\nu} u_{f'\nu} n_\nu\}$$

Заметим еще, что если F и Φ определяются с помощью усреднения

$$F(f,f') = Sp\{a^+_f a_{f'} D\}\cdot(Sp\, D)^{-1}\,; \quad \Phi(f,f') = Sp\{a_f a_{f'}\cdot D\}(Sp\, D)^{-1}$$

по любому положительному статистическому оператору D, то операторы K, 1-K должны быть оба неотрицательными, и поэтому в полученном представлении $0 \leq n_\nu \leq 1$.

Мы уже говорили, что уравнения /23/ не являются независимыми, так как формы $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ связаны между собой тождествами /13/. Поэтому во многих случаях целесообразно рассмотрение одного[x/] из них:

$$\mathfrak{U}\ (f_1, f_2 / F, \Phi) = 0$$

совместно с дополнительными условиями /24/, /28/. Другое из уравнений /23/ будет тогда выполняться автоматически. Рассмотрим в качестве примера вопрос об определении основного сверхпроводящего состояния в теории сверхпроводимости. Положим в наших формулах $f = (p, \sigma)$, где p – импульс, σ – спиновый индекс, два значения которого условимся обозначать знаками + и –. Возьмем, как обычно[xx/]:

$$I\ (p, p') = E\ (p)\ \delta\ (p - p')$$

$$V(f_1, f_2; f_1', f_2') = \frac{J(p_1, p_2; p_1', p_2')}{V}\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\,\delta(\sigma_1 - \sigma_1')\,\delta(\sigma_2 - \sigma_2') \qquad /30/$$

где V – объем системы.

В качестве J мы рассматриваем вещественную функцию, инвариантную по отношению к преобразованию отражения импульсов $p \to -p$. Нетрудно проверить тогда, что всем нашим уравнениям и дополнительным условиям мы удовлетворим, положив:

$$F\ (f, f') = F(p)\,\delta\,(f - f'), \quad \Phi\ (f, f') = \delta\,(f + f')\,\Phi\,(f)$$

$$\Phi\ (p, +) = -\,\Phi\ (p)\ , \quad \Phi\ (p, -) = \Phi\ (p) \qquad /31/$$

где $F(p), \Phi(p)$ – вещественные функции p, инвариантные по отношению к преобразовани отражения импульса, определяемые уравнениями:

---

x/ Мы можем представиться также случай, когда $\Phi \equiv 0$. Тогда, наоборот, уравнение $\mathfrak{U} = 0$ выполняется тривиально, и мы должны ограничиться рассмотрением уравнения $\mathfrak{B} = 0$.

xx/ Обращаем внимание на то, что в нашем изложении мы пользуемся дискретной дельта-функцией, т.е. символом Кронекера:

$$\delta(p) = 1 \qquad p = 0\ ;$$
$$\delta(p) = 0 \qquad p \neq 0$$

$$2\xi(p)\phi(p)+\frac{1-2F(p)}{V}\sum_{p'}\mathcal{J}(p,-p;-p';p')\phi(p')=0$$

$$F(p)=F^2(p)+\phi^2(p)$$ /32/

в которых

$$\xi(p)=E(p)-\lambda+{}^1\!/_V\sum_{p'}\left\{2\mathcal{J}(p',p;p,p')-\mathcal{J}(p,p';p,p')\right\}F(p')$$

Положим здесь

$$-{}^1\!/_V\sum_{p'}\mathcal{J}(p,-p;-p',p')\phi(p')=C(p)$$

Тогда из уравнения /32/ получим:

$$\phi(p)=\frac{C(p)}{2\Omega(p)}\qquad \Omega(p)=\sqrt{\xi^2(p)+C^2(p)}$$ /34/

$$F(p)={}^1\!/_2\left\{1-\frac{\xi(p)}{\Omega(p)}\right\}$$

и убедимся, что $C(p)$ удовлетворяет уравнению:

$$C(p)+{}^1\!/_V\sum_{p'}\mathcal{J}(p,-p;-p',p')\frac{C(p')}{2\Omega(p')}=0$$ /35/

Как видно, мы приходим здесь к обычным формулам теории сверхпроводимости.

Соответствующие функции $\{u,v\}$ можно определить, положив:

$$u_\nu(f)=u(p)\delta(\nu-f),\qquad v_\nu(f)=v(f)\delta(\nu+f)$$ /36/

$$v(p,+)=v(p),\quad v(p,-)=-v(p)$$

причем

$$v^2(p)=F(p),\quad u^2(p)=1-F(p)$$

§ 2. Метод самосогласованности поля

Мы рассматривали до сих пор лишь вопрос об определении основного состояния, независящего от времени. Нетрудно, однако, обобщить метод самосогласованного поля и для изучения процессов, явно зависящих от времени. Введем для этого зависящие от времени функции

$$F_t(f_1,f_2)=\overline{a^+_{f_1}a_{f_2}}\,,\qquad \Phi_t(f_1,f_2)=\overline{a_{f_1}a_{f_2}} \tag{37}$$

и условимся рассматривать амплитуды a в представлении Гейзенберга. Совершающееся здесь усреднение надо понимать тогда, как усреднение

$$\bar{A}=\frac{Sp\,(AD)}{Sp\,D}$$

по некоторому, не зависящему от t, статистическому оператору D. Заметим теперь, что из уравнений движения вытекают следующие точные соотношения:

$$i\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t}=\overline{[a^+_{f_1}a_{f_2};H]};\qquad i\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t}=\overline{[a_{f_1}a_{f_2};H]}$$

или, в более развернутой форме:

$$i\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_f\left\{T(f_2,f)F(f_1,f)-T(f,f_1)F(f,f_2)\right\}-$$

$$-\sum_{f,f_1',f_2'}\left\{V(f_1',f_2';f,f_1)F_2(f_1',f_2';f,f_2)-V(f_2,f;f_2',f_1')F_2(f_1,f;f_2',f_1')\right\}$$

$$i\frac{\partial \Phi(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_f\left\{T(f_1,f)\Phi(f,f_2)+T(f_2,f)\Phi(f_1,f)\right\}+$$

$$+\sum_{f_1'f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\Phi(f_1',f_2')+$$

$$+\sum_{f,f_1',f_2'}\left\{V(f_1,f;f_2',f_1')\Phi_2(f;f_2,f_2',f_1')+\right.$$

$$+V(f_1 f_2; f_2', f_1')\Phi_2(f; f_1, f_2', f_1');$$

где опять

$$F_2(f_1, f_2; f_2', f_1') = \overline{a^+_{f_1} a^+_{f_2} a_{f_2'} a_{f_1'}}$$

$$\Phi_2(f_1; f_2, f_3, f_4) = \overline{a_{f_1} a_{f_2} a_{f_3} a_{f_4}} \qquad /40/$$

По принципам теории цепочек функций распределения мы должны были бы снова выразить $\frac{\partial F_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$ через функции распределения более высокого порядка и т.д.

Переход к замкнутой системе приближенных уравнений мог бы быть совершен за счет "расщепления" одного из таких уравнений, например, с помощью какой-либо подходящей аппроксимации, выражающей входящую в него высшую корреляционную функцию через низшие. В методе самосогласованного поля мы довольствуемся наиболее простым и грубым подходом, а именно, ограничиваемся только первыми, уже полученными уравнениями /38/, /39/ и проводим в них приближенную замену F_2, Φ_2 через F, Φ. Возьмем эти функции[x/]:

$$F(f_1, f_2) = \frac{Sp\{a^+_{f_1}(t) a_{f_2}(t) D\}}{Sp\, D}$$

$$\Phi(f_1, f_2) = \frac{Sp\{a_{f_1}(t) a_{f_2}(t) D\}}{Sp\, D} \qquad /41/$$

$$F_2(f_1, f_2; f_2' f_1') = \frac{Sp\{a^+_{f_1}(t) a^+_{f_2}(t) a_{f_2'}(t) a_{f_1'}(t) D\}}{Sp\, D}$$

и предположим, что статистический оператор D диагонален в представлении ... n_ν ..., в котором $n_\nu = \alpha^+_\nu(t)\alpha_\nu(t)$. Строго говоря, такое предположение можно сделать только для одного фиксированного момента времени, так как D остается постоянным, а $\alpha(t)$, $\alpha^+(t)$, вообще говоря, изменяются со временем. Тем не менее, наше приближение можно считать правильным для первого приближения в тех случаях, когда основная часть гамильтониана H в амплитудах α имеет вид $\sum_\nu \Omega(\nu)\alpha^+_\nu \alpha_\nu$

---

x/ Из такого определения сразу же следует, что F, Φ всегда удовлетворяют условиям /24/.

так как тогда в "нулевом приближении" уравнения движения будут:

$$i\,\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} = \Omega(\nu)\,\alpha_\nu$$

а для них

$$\overset{+}{\alpha}_\nu(t)\,\alpha_\nu(t) = const$$

Здесь главная часть зависимости $a_f(t)$, $\overset{+}{a}_f(t)$ от t, так сказать, компенсируется временной зависимостью функций u, v. Используя указанное приближение, подставим в /41/ выражения /1/ и выполним усреднение с учетом диагональности $\mathcal{D}$ в представлении ... n_ν ...

Получим:

$$F(f_1,f_2) = \sum_\nu \left\{ \overset{*}{v}_{f_1\nu}\, v_{f_2\nu}\,(1-\bar{n}_\nu) + \overset{*}{u}_{f_1\nu}\, u_{f_2\nu}\,\bar{n}_\nu \right\}$$
/42/
$$\Phi(f_1,f_2) = \sum_\nu \left\{ u_{f_1\nu}\, v_{f_2\nu}\,(1-\bar{n}_\nu) + v_{f_1\nu}\, v_{f_2\nu}\,\bar{n}_\nu \right\}$$

где $\tilde{n}_\nu$ – среднее от $\overset{+}{\alpha}_\nu(t)\,\alpha_\nu(t)$

Найдем также:

$$F_2(f_1,f_2;\,f_2'\,f_1') =$$
$$= F(f_1,f_1')\,F(f_2,f_2') - F(f_1,f_2')\,F(f_2,f_2') + \Phi^*(f_1,f_2)\,\Phi(f_1',f_2')$$ /43/

$$\Phi_2(f_1;f_2,f_3,f_4) =$$
/44/
$$= F(f_1,f_2)\,\Phi(f_3,f_4) + F(f_1,f_4)\,\Phi(f_2,f_3) - F(f_1,f_3)\,\Phi(f_2,f_4)$$

Подставив эти выражения /43/, /44/ в уравнения /38/, /39/, мы и получим временные уравнения самосогласованного поля в виде:

$$i\,\frac{\partial \Phi(f_1,f_2)}{\partial t} = \mathcal{U}(f_1,f_2\,|\,F,\Phi)$$

$$i\,\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t} = \mathcal{B}(f_1,f_2\,|\,F,\Phi)$$

Нетрудно заметить, что входящие сюда формы $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ имеют те же выражения, что и раньше. Это обусловлено совпадением правых частей уравнений /38/, /39/ с соответствующими выражениями из /14/, /15/ и совпадением формул /43/ с формулами /19/,

/20/. Мы можем, следовательно, воспользоваться ранее установленными свойствами $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$. Обратим сейчас внимание на тождество /13/, справедливое в рассматриваемом случае[x/] при $\nu_1 = \nu_2$. Основываясь на нем, установим важное свойство решений уравнений /45/, а именно то, что для любого решения

$$\frac{\partial \bar{n}_\nu}{\partial t} = 0 \qquad /46/$$

Иначе говоря, покажем, что собственные числа оператора K остаются постоянными при изменении времени. Но, в соответствии с /25/:

$$\varphi_\omega K = \bar{n}_\omega \varphi_\omega$$

Поэтому сделанное утверждение будет доказано, как только мы убедимся, что при любом ω :

$$\sum_{g,g'} \varphi_\omega(g) \frac{dK(g,g')}{dt} \varphi_\omega(g') = 0 \qquad /47/$$

Но так как всегда

$$n_{\nu_1} = 1 - n_{\nu_0}$$

мы видим, что равенство /47/ достаточно доказать лишь для $\omega = (\nu, 0)$. Пользуясь определением /26/ оператора K и формулами /8/, найдем:

$$\sum_{g,g'} \varphi_{\nu_0}(g) \frac{dK(g,g')}{dt} \varphi^*_{\nu_0}(g') =$$

$$= -\sum_{f,f'} \overset{*}{v}_{\nu f} v_{\nu f'} \frac{dF^*(f,f')}{dt} + \sum_{f,f'} \overset{*}{v}_{\nu f} \overset{*}{u}_{\nu f'} \frac{d\Phi(f,f')}{dt} -$$

$$- \sum_{f,f'} u_{\nu f} v_{\nu f'} \frac{d\Phi(f,f')}{dt} + \sum_{f,f'} u_{\nu f} \overset{*}{u}_{\nu f'} \frac{dF(f,f')}{dt}$$

[x/] Как уже ранее отмечалось, тождество /13/ будет верно при любых ν_1, ν_2; если в формулах /42/ все $\bar{n}_\nu = 0$.

откуда на основании /45/ и /13/:

$$i\sum_{g,g'}\varphi_{\nu_0}(g)\,\frac{dK(g,g')}{dt}\,\overset{*}{\varphi}_{\nu_0}(g')=$$

$$=\sum_{f,f'}\Big\{\overset{*}{V}_{\nu f}V_{\nu f'}\mathfrak{B}(f,f')+\overset{*}{V}_{\nu f}U_{\nu f}\mathfrak{U}(f,f')+U_{\nu f}V_{\nu f'}\quad(f,f')+$$

$$+U_{\nu f}\overset{*}{U}_{\nu f'}\mathfrak{B}(f,f')\Big\}=0$$

что и доказывает сделанное утверждение /46/.

Мы имеем здесь типичное свойство метода самосогласованного поля – неучет релаксационных эффектов. Раз сохраняется любой набор ... n_ν ..., то в частности, будет сохраняться и система

$$n_\nu=0$$

соответствующая ранее рассматривавшемуся основному состоянию. Поэтому, уравнения /45/ совместимы и с дополнительными условиями /28/. Запишем сейчас эти уравнения и дополнительные условия в r – представлении для случая, когда:

$$I=\frac{(p-eA)^2}{m}$$

а взаимодействие характеризуется независящей от скоростей и спинов потенциальной функцией $U(r_1,r_2)$. Имеем[x]:

$$i\,\frac{\partial\Phi_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)}{\partial t}=\Big\{\frac{(i\,\partial/\partial\vec r_1+e\vec A(r_1))^2+(i\,\partial/\partial\vec r_2+e\vec A(r_2))^2}{2m}-2\lambda+$$

$$+\int U(r_1,r')\sum_\sigma F_{\sigma\sigma}(r',r')\,dr'+\int U(r_2,r')\sum_\sigma F_{\sigma\sigma}(r',r')\,dr'\Big\}\Phi_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)+$$

$$+U(r_1,r_2)\,\Phi_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)-$$

$$-\sum_\sigma\int dr'\Big\{F_{\sigma\sigma_1}(r',r_1)U(r',r_2)\Phi_{\sigma\sigma_2}(r',r_2)+F_{\sigma\sigma_2}(r',r_2)U(r_1,r')\Phi_{\sigma_1\sigma}(r_1,r')\Big\}\qquad /48/$$

$$i\,\frac{\partial F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)}{\partial t}=\Big\{\frac{(i\,\partial/\partial\vec r_2+e\bar A(r_2))^2-(i\,\partial/\partial\vec r_1-e\bar A(r_1))^2}{2m}\Big\}F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)+$$

$$+\sum_\sigma\int dr\{\Phi(r_2,r)-\Phi(r_1,r)\}\Big\{F_{\sigma\sigma}(r,r)F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)-F_{\sigma_1\sigma}(r_1,r)F_{\sigma\sigma_2}(r,r_2)+$$

$$+\overset{*}{\Phi}_{\sigma_1\sigma}(r_1,r)\,\Phi_{\sigma\sigma_2}(r,r_2)\Big\}\qquad /49/$$

$$F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)=\sum_\sigma\int dr\Big\{F_{\sigma_1\sigma}(r_1,r)F_{\sigma\sigma_2}(r,r_2)+\overset{*}{\Phi}_{\sigma\sigma_1}(r,r_1)\,\Phi_{\sigma\sigma_2}(r,r_2)\Big\}\qquad /50а/$$

$$\sum_\sigma\int dr\Big\{F_{\sigma_1\sigma}(r_1,r)\overset{*}{\Phi}_{\sigma\sigma_2}(r,r_2)+F_{\sigma_2\sigma}(r_2,r)\,\overset{*}{\Phi}_{\sigma\sigma_1}(r,r_1)\Big\}=0\qquad /50б/$$

---

[x] Здесь r обозначает вектор $\vec r$, dr – трехмерный элемент объема.

Как видно вся эта система уравнений градиентно-инвариантна. Градиентное преобразование

$$e\vec{A}(r) \to e\vec{A}(r) + \partial/\partial\vec{r}\,\varphi(r) \qquad /51/$$

компенсируется преобразованием функций F, Φ

$$\Phi_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2) \to \Phi_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)\,e^{i(\varphi(r_1)+\varphi(r_2))}$$

$$F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2) \to F_{\sigma_1\sigma_2}(r_1,r_2)\,e^{i(-\varphi(r_1)+\varphi(r_2))} \qquad /52/$$

Градиентная инвариантность здесь обусловлена градиентностью гамильтониана.

При рассмотрении здесь задач теории сверхпроводимости в модели, в которой электронно-фононное взаимодействие заменено прямым взаимодействием электронов, зависящим от скоростей. /оно эффективно лишь у поверхности Ферми/, соответствующей гамильтониан уже не будет точно градиентно-инвариантным. Это свойство выполняется только приближенно и потому уравнения метода самосогласованного поля будут градиентно-инварианты лишь с той же степенью приближения. Тут существенно отметить, что использованные при выводе наших уравнений аппроксимации сами по себе не нарушают градиентной инвариантности. К этому вопросу мы еще возвратимся в § 4.

§ 3. Представление с фиксированным числом частиц

Будем рассматривать теперь совершенно независимо от ранее сказанного корреляционную функцию:

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')$$

взятую в r - представлении. Мы полагаем здесь $f=(r,\sigma)$, где σ - некоторый дискретный, например, спиновый индекс. Пусть эта функция может быть представлена в форме:

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1') = \sum_n \varphi_n^*(f_1,f_2)\,\varphi_n(f_1',f_2') + \tilde{F}_2$$

таким образом, что:

1/ При стремлении к бесконечности расстояний между парами (f_1, f_2) и (f_1', f_2') добавок $\tilde{F}_2$ достаточно быстро исчезает.

2/ При неограниченном увеличении расстояния между точками f_1 и f_2 функция $\varphi_n(f_1,f_2)$ также приближается к нулю и интеграл

$$\int|\varphi_n(f_1,f_2)|^2 df_2 = \int|\varphi_n(f_2,f_1)|^2 df_2 \qquad /54/$$

является сходящимя.

Тогда очевидно, что мы можем интерпретировать $\psi_n(f_1, f_2)$ как волновую функцию пары частиц, находящейся в одном из связанных состояний, а интеграл /54/ – как пропорциональный плотности числа тех частиц, в точке f_1, которые свяананы в пары, находящиеся в состоянии ψ_n.

Рассмотрим с этой точки зрения нашу формулу /43/ и возьмем для определенности случай теории сверхпроводимости. Имеем для основного состояния:

$$\Phi_{-+}(r_1, r_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik(r_1 - r_2)} \Phi(k)\,dk$$

$$\Phi(k) = \frac{c(k)}{2\sqrt{\xi^2(k) + c^2(k)}}$$

и

$$F_{\sigma\sigma}(r_1, r_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik(r_1 - r_2)} F(k)\,dk$$

$$F(k) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{\xi^2(k) + c^2(k)}}\right\}$$

Как видно, упоминавшиеся условия /1/, -2/ здесь выполнены и потому $\Phi(f_1, f_2) = \Phi_{-+}(r_1, r_2)$ может считаться волновой функцией связанной пары частиц /обладающих противоположными спинами/. В данном случае существует лишь одно состояние $\Phi(f_1 f_2)$ и мы можем говорить, что все связанные квазимолекулы находятся в конденсате. Связанные пары, выпаршие из конденсата, в изложенном методе принципиально не учитываются, ввиду формулы[x/] /43/. Обратим сейчас внимание на то, что в наших рассуждениях мы существенно использовали каноническое преобразование /1/. В силу этого обстоятельства и для состояния C_0, и для статистического оператора D полное число частиц:

$$N = \sum a_f^+ a_f$$

не является квантовым числом и не имеет строго фиксированного значения. С другой стороны, N всегда является интегралом движения для рассматриваемого нами гамильтониана /3/. Поэтому вполне естественно потребовать получить те же результаты, работая в представлении, в котором N является квантовым числом.

---

x/ Такой учет можно произвести, если обобщить апроксимацию /43" в духе выражения /53/.

Посмотрим, однако, что получилось бы в действительности, если бы мы попытались проводить наши рассуждения в таком представлении. Прежде всего, мы не могли бы перепутывать амплитуды рождения и уничтожения и потому должны были бы положить в формулах /1/: $v \equiv 0$. Но тогда вместо /43/ мы получили бы аппроксимацию

$$F(f_1,f_2;f_2',f_1') = F(f_1,f_1')F(f_2,f_1') - F(f_1,f_2')F(f_2,f_1') \qquad /55/$$

обычного метода Фока, вообще не учитывающую возможность появления связанных состояний из пар частиц. Положение может показаться еще худшим, так как независимо ни от каких аппроксимаций имеет место равенство

$$\overline{a_f a_f} = 0$$

для любого усреднения, при котором N строго фиксировано. Выход из этого парадокса однако не представляет затруднений. Просто, если мы желаем работать с фиксированным N, нам необходимо пойти дальше в цепочке уравнений, связывающих между собой функции распределения, и обратиться к корреляционным функциям более высокого порядка. Чтобы не вдаваться в сложные вычисления, воспользуемся сейчас интуитивным, несколько упрощенным подходом.

Исходя из представления о том, что в рассматриваемой динамической системе имеются связанные пары, находящиеся в одном и том же состоянии $\phi(f_1,f_2)$, дополним формулу /55/ обычного метода Фока членом

$$\phi^*(f_1,f_2)\,\phi(f_1',f_2')$$

описывающим вклад таких пар. Подставив полученное выражение в точное соотношение /38/, мы сразу же получим второе из уравнений /45/. Чтобы вывести первое из уравнений /45/, определяющее ϕ, рассмотрим двухвременную корреляционную функцию в виде:

$$\overline{a_{f_1}(t)\,a_{f_2}(t)\,a^+_{f_2''}(\tau)\,a^+_{f_1''}(\tau)}$$

и продифференцируем ее по времени t. На основании точных уравнений движения получим[x/]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle a_{f_1}(t)a_{f_2}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle = \langle [a_{f_1}(t)a_{f_2}(t); H]\,a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle =$$

$$= \sum_f \left\{ I(f_1,f)\langle a_f(t)a_{f_2}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle + I(f_2,f)\langle a_{f_1}(t)a_f(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle \right\} \qquad /56/$$

---

x/ Операцию усреднения будем обозначать здесь не чертой сверху, скобками $\langle \ldots \rangle$, поскольку это удобнее для длинных выражений.

$$+\sum_{f_1' f_2'} V(f_1, f_2; f_2', f_1') \langle a_{f_1'}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1''}(\tau)\rangle +$$

$$\sum_{f f_1' f_2'} V(f_1, f; f_2', f_1') \langle a^+_f(t)\, a_{f_2}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1''}(\tau)\rangle +$$

$$+\sum_{f f_1' f_2'} V(f, f_2; f_2', f_1') \langle a^+_f(t)\, a_{f_1}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1''}(\tau)\rangle$$

Заметим кстати, что это соотношение отличается от /39/ только тем, что теперь справа стоят два оператора a^+, компенсирующие изменение числа частиц. Произведем здесь переход к приближенному уравнению, приближенно выразив функции вида:

$$\langle a^+_{f_1}(t)\, a_{f_2}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle$$

через произведения четырех и двух операторов. Заметим, что при таком расщеплении мы должны теперь учитывать строгое сохранение числа N. После этого, мы в уравнении, полученном из /56/ отодвинем пару / f_2', f_1' / на бесконечность. Воспользуемся поэтому следующей аппроксимацией:

$$\langle a^+_{f_1}(t)\, a_{f_2}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle =$$

$$= \langle a^+_{f_1}(t)\, a_{f_2}(t)\rangle \langle a_{f_2'}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle -$$

$$- \langle a^+_{f_1}(t)\, a_{f_2'}(t)\rangle \langle a_{f_2}(t)\, a_{f_1'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle + \qquad /57/$$

$$+ \langle a^+_{f_1}(t)\, a_{f_1'}(t)\rangle \langle a_{f_2}(t)\, a_{f_2'}(t)\, a^+_{f_2''}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle + S$$

где S обозначает сумму членов, содержащих множители $\langle a^+_{f_1''}(\tau) a_f(t)$ или $\langle a^+_{f_2''}(\tau) a_f(t)$. Мы не выписываем явного выражения S, поскольку такие члены исчезнут при удалении пары точек / f_2'', f_1'' / на бесконечность. Подставим /57/ в /56/ на бесконечность эту пару точек. Тогда выражения вида:

$$\langle a_{f_1}(t)\, a_{f_2}(t)\, a^+_{f_2'}(\tau)\, a^+_{f_1'}(\tau)\rangle$$

распадутся на произведения

$$\varphi_t(f_1,f_2)\,\varphi_\tau^*(f_1',f_2')$$

в которых $\varphi_t(f_1,f_2)$ обозначает волновую функцию связанных пар, и мы получим, отделяя общий множитель $\varphi_t^*(f_1',f_2')$

$$i\,\frac{\partial\varphi_t(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_f\left\{I(f_1,f)\,\varphi_t(f,f_1)+I(f_2,f)\,\varphi(f_1,f)\right\}+ \qquad /58/$$

$$\sum_{f_1',f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\,\varphi_t(f_1',f_2')+$$

$$+\sum_{f,f_1',f_2'}V(f_1,f;f_2',f_1')\left\{F_t(f,f_2)\,\varphi_t(f_2',f_1')-F_t(t,t_2')\,\varphi_t(f,f_1')+F_t(f,f_1')\,\varphi(f,f_2')\right\}+$$

$$+\sum_{f,f_1',f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\left\{F_t(f,f_1)\,\varphi_t(f_2',f_1')-F_t(f,f_2')\,\varphi_t(f_3,f_1')+\right.$$

$$\left.+F_t(f,f_1')\,\varphi_t(f,f_2')\right\}$$

Заметим, что в основном стационарном состоянии φ_t должна быть пропорциональна e^{-iEt}, где E – соответствующая энергия. Введем величину[x/]

$$\lambda=E/2$$

и положим в общем неравновесном случае:

$$\varphi_t(f_1,f_2)=e^{-2i\lambda t}\,\Phi_t(f_1,f_2)$$

[x/] Смысл такой величины λ как химического потенциала можнораскрыть из следующих соображений. С одной стороны, фактор $exp(-iEt)$ должен выражать временную зависимость волновой функции пары:

$$\langle C_N^*\,a_{f_1}(t)\,a_{f_2}(t)\,C_{N+2}\rangle$$

где C_N обозначает низшее состояние системы в случае, когда число частиц равно N. С другой стороны, пусть полная энергия системы в состоянии C_N будет $E(N)$. Тогда временная зависимость приведенной формы определится множителем: $exp\left\{-i\,(E(N+2)-E(N))t\right\}$. Таким образом:

$$2\lambda\equiv E=E(N+2)-E(N)$$

$$\lambda=\frac{\partial E(N)}{\partial N}$$

Тогда, как видно, полученное уравнение /58/ превратится в недостававшее нам первое из уравнений /45/.

Приведенным рассуждениям можно придать более совершенную форму и с их помощью придти к более точным уравнениям, но на этом мы останавливаться не будем. Сейчас нам существенно подчеркнуть, что уравнения обобщенного метода самосогласованного поля можно получить в схеме с фиксированным полным числом частиц. При этом выясняется смысл преобразования /1/. Именно, с его помощью те результаты, которые нормально получились бы в более высоком приближении, получаются в более низком приближении. Это свойство основано на том, что в переменных α связанное состояние выпадает. Так, например, в использованном нами первом приближении:

$$\langle \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2'}\overset{+}{\alpha}_{\nu_1}\rangle = (1+\bar{n}_{\nu_1})(1-\bar{n}_{\nu_2})\{\delta(\nu_1-\nu_1')\delta(\nu_2-\nu_2')-\delta(\nu_1-\nu_2')\delta(\nu_2-\nu_1')\} =$$

$$= \langle \alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_1'}\rangle\langle \alpha_{\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2'}\rangle - \langle \alpha_{\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2'}\rangle\langle \alpha_{\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_1'}\rangle$$

Но такого же положения можно добиться и в высших приближениях. Принцип компенсации опасных диаграмм как раз и представляет для этого средство. Все те диаграммы, которые по этому принципу компенсируются, именно и определяют связанное состояние.

Таким образом, в тех случаях, когда препятствием для применения теории возмущений составляет возможность появления связанного состояния пар частиц /бозе-конденсат/, принцип компенсации, вводя новые переменные $\overset{+}{\alpha}\alpha$, в которых такое состояние выпадает, ликвидирует тем самым препятствие для применения этой обычной теории.

§ 4. Коллективные колебания

Перейдем теперь к вопросу об определении спектра элементарных возбуждений основного состояния. С точки зрения метода самосогласованного поля вопрос этот может решаться следующим образом.

Как уже отмечалось, числа $\bar{n}_\nu$ остаются постоянными; для основного состояния все они равны нулю. Желая исследовать малые колебания около такого состояния, положим также $\bar{n}_\nu = 0$. Иными словами наложим дополнительные условия /28/. Пусть F_0, Φ будут выражениями F, Φ для основного состояния. Рассмотрим бесконечно-малые приращения

$$F = F_0 + \delta F, \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$$

и составим для них линейные уравнения в вариациях:

$$i\,\frac{\partial\,\delta\Phi(f_1,f_2)}{\partial t} = \delta\,\mathcal{U}(f_1,f_2/F,\Phi)$$

$$i\,\frac{\partial\,\delta F(f_1,f_2)}{\partial t} = \delta\,\mathcal{B}(f_1,f_2/F,\Phi) \qquad /59/$$

Кроме того, учтем, что δF и $\delta\Phi$ должны быть связаны между собой дополнительными условиями /28/, ввиду чего:

$$\delta\Big\{F(f_1,f_2) - \sum_f F(f_1,f)F(f,f_2) - \sum_f \Phi^*(f,f_1)\Phi(f,f_2)\Big\} = 0$$

$$\delta\Big\{\sum_f F(f_1,f)\Phi^*(f,f_2) + \sum_f F(f_2,f)\Phi^*(f,f_1)\Big] = 0 \qquad /60/$$

Заметим еще, что благодаря /24/, $\delta\Phi$ должна быть антисимметричной, а δF – эрмитовской. Полученные однородные уравнения будем решать суперпозицией элементарных решений, пропорциональных $exp(-iEt)$.

Таким образом, найдем[x/] секулярные уравнения для определения спектра колебаний. Ввиду наличия условий /60/ δF и $\delta\Phi$ не являются независимыми и потому техни-

---

[x/] Подчеркнем, что такой способ определения спектра элементарных возбуждений путем линеаризации нелинейных уравнений идейно восходит к известным работам А.А.Власова /5/. Следует также заметить, кстати, что именно эти работы оказали большое влияние на разработку понятия о коллективных колебаниях.

чески удобно будет представить их выражениями через новые независимые неизвестные, автоматически удовлетворяющими /60/. Такие выражения можно сразу же получить, замечая, что ввиду /60/ бесконечно малое преобразование претерпевают не $n_\nu \equiv 0$, а $u_{f\nu}$, $v_{f\nu}$. Эти преобразования должны быть совместны с условиями ортонормировки /2/. Вместо того, чтобы варьировать u, v, мы можем совершить бесконечно малое преобразование над самими α :

$$\alpha_\nu \to \alpha_\nu + \sum_{\nu'} \mu(\nu',\nu)\alpha_{\nu'} + \sum_{\nu'} \lambda(\nu',\nu)\overset{+}{\alpha}_{\nu'} \qquad /61/$$

При этом из условий канонически данного бесконечно малого преобразования следует, что:

$$\lambda(\nu_1,\nu_2) + \lambda(\nu_2,\nu_1) = 0 \qquad /62/$$

$$\mu(\nu_1,\nu_2) + \overset{*}{\mu}(\nu_2,\nu_1) = 0 \qquad /63/$$

тогда
$$\langle \alpha_\nu \alpha_{\nu'} \rangle_0 \to \lambda(\nu,\nu')$$

$\langle \overset{+}{\alpha}_\nu \alpha_{\nu'} \rangle_0$ остаются нулями и отсюда:

$$F_0(f_1 f_2) + \delta F(f_1,f_2) =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} \langle (\overset{*}{u}_{f_1\nu_1} \overset{+}{\alpha}_{\nu_1} + \overset{*}{v}_{f_1\nu_1} \alpha_{\nu_1})(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2} + v_{f_2\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}) \rangle_0 =$$

$$= F_0(f_1,f_2) + \sum_{\nu_1,\nu_2} \left\{ \overset{*}{v}_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1,\nu_2) + \overset{*}{u}_{f_2\nu_2} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2,\nu_1) \right\}$$

$$\Phi_0(f_1,f_2) + \delta\Phi(f_1,f_2) =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} \langle (\overset{*}{u}_{f_1\nu_1} \alpha_{\nu_1} + v_{f_1\nu_1}\overset{+}{\alpha}_{\nu_1})(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2} + v_{f_2\nu_2}\overset{+}{\alpha}_{\nu_2}) \rangle_0 =$$

$$= \Phi_0(f_1,f_2) + \sum_{\nu_1,\nu_2} \left\{ u_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1,\nu_2) + v_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2,\nu_1) \right\}$$

Как видно, коэффициенты w не вошли в наши формулы. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае $W_\gamma \equiv 0$. Заметим еще, что и независимо от приведенных соображений нетрудно проверить, что выражения

$$\delta F(f_1,f_2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\left\{\overset{*}{V}_{f_1\nu_1} U_{f_2\nu_2}\lambda(\nu_1,\nu_2)+\overset{*}{U}_{f_1\nu_1} V_{f_2\nu_2}\lambda^*(\nu_2,\nu_1)\right\} \qquad /64/$$

$$\delta \Phi(f_1,f_2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\left\{U_{f_1\nu_1} U_{f_2\nu_2}\lambda(\nu_1,\nu_2)+V_{f_1\nu_1} V_{f_2\nu_2}\lambda^*(\nu_2,\nu_1)\right\} \qquad /65/$$

при произвольной антисимметричной $\lambda(\nu_1,\nu_2)$ представляют общее решение дополнительных условий /60/, /24/. Чтобы получить уравнение для $\partial\lambda/\partial t$, целесообразно выразить также λ через δF, $\delta\Phi$. Помножим для этого /64/ на $V_{f_1\gamma_1}$, а /65/ на $\overset{*}{U}_{f_1\gamma_1}$ и просуммируем. Тогда в силу условий ортонормировки в форме /10/ найдем:

$$\sum_{f_1}\left\{V_{f_1\gamma_1}\delta F(f_1,f_2)+\overset{*}{U}_{f_1\gamma_1}\delta\Phi^*(f_1,f_2)\right\}= \qquad /66/$$

$$=\sum_{\nu_2} V_{f_2\gamma_1}\lambda^*(\gamma_1,\nu_2)$$

Помножим далее /64/ на $U_{f_1\gamma_1}$, а /65/ на $\overset{*}{V}_{f_1\gamma_1}$ и опять просуммируем. Получим:

$$\sum\left\{U_{f_1\gamma_1}\delta F(f_1,f_2)+\overset{*}{V}_{f_1\gamma_1}\delta\Phi(f_1,f_2)\right\}=$$

$$=\sum_{\nu_2} V_{f_2\nu_2}\lambda^*(\nu_2,\gamma_1)$$

или

$$\sum_{f_1}\left\{\overset{*}{U}_{f_1\gamma_1}\delta F^*(f_1,f_2)+V_{f_1\gamma_1}\delta\Phi^*(f_1,f_2)\right\}=$$

$$=-\sum_{\nu_2}\overset{*}{V}_{f_2\nu_2}\lambda(\gamma_1,\nu_2) \qquad /67/$$

Из /66/ и /67/ тем же приемом найдем искомое выражение для

$$\lambda(\nu_1,\nu_2)=\sum\left\{\overset{*}{U}_{f_2\nu_2}V_{f_1\nu_1}\delta F(f_1,f_2)+\overset{*}{U}_{f_2\nu_2}\overset{*}{U}_{f_1\nu_1}\delta\Phi(f_1,f_2)-\right.$$

$$\left.-V_{f_2\nu_2}\overset{*}{U}_{f_1\nu_1}\delta F^*(f_1,f_2)-V_{f_2\nu_2}V_{f_1\nu_1}\delta\Phi^*(f_1,f_2)\right\} \qquad /68/$$

Продифференцировав это выражение по t и приняв во внимание /59/, получим уравнение для определения λ :

$$i\,\frac{\partial\lambda(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_{f_1,f_2}\left\{\overset{*}{U}_{f_2\nu_2}V_{f_1\nu_1}\delta\mathcal{B}(f_1,f_2)+\overset{*}{U}_{f_2\nu_2}\overset{*}{U}_{f_1\nu_1}\delta\mathcal{U}(f_1,f_2)+\right.$$

$$\left.+V_{f_2\nu_2}\overset{*}{U}_{f_1\nu_1}\delta\mathcal{B}^*(f_1,f_2)+V_{f_2\nu_2}V_{f_1\nu_1}\delta\mathcal{U}^*(f_1,f_2)\right\} \qquad /69/$$

Чтобы полностью раскрыть это уравнение, надо проварьировать формы $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ и выразить δF , $\delta \Phi$ через λ с помощью формул /64/, /65/. После длительных, но в сущности, простых вычислений будем иметь[x/]:

$$i\,\frac{\partial\lambda(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_{\omega}\left\{\Omega(\nu_2,\omega)\lambda(\nu_1,\omega)-\Omega(\nu_1,\omega)\lambda(\nu_2,\omega)\right\}+$$

$$+\sum\left\{X(\nu_1,\nu_2,\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_1,\omega_2)+Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\overset{*}{\lambda}(\omega_2,\omega_1)\right\} \qquad /70/$$

при чем

$$\Omega(\nu,\omega)=\sum_{f,f'}\xi(f,f')(\overset{*}{\mathcal{U}}_{f\nu}\,\mathcal{U}_{f'\omega}-\overset{*}{V}_{f\omega}\,V_{f'\nu})+$$

$$+\sum_{f_1 f_2 f_1' f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\,\Phi_0(f_2',f_1')\,\overset{*}{\mathcal{U}}_{f_1\nu}\,\overset{*}{V}_{f_2\omega}+$$

$$+\sum_{f_1 f_2 f_1' f_2'}V(f_1,f_2;f_2',f_1')\,\overset{*}{\Phi}_0(f_2,f_1)\,V_{f_2'\nu}\,\mathcal{U}_{f_1'\omega};$$

$$\xi(f,f')=T(f,f')+\sum\left\{U(f_1,f;f',f_1')-U(f_1,f;f_1',f')\right\}F_0(f_1,f_1')$$

$$X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum V(f_1,f_2;f_2',f_1')(\overset{*}{\mathcal{U}}_{f_2\nu_1}\,\overset{*}{\mathcal{U}}_{f_1\nu_2}-\overset{*}{\mathcal{U}}_{f_1\nu_1}\,\mathcal{U}_{f_2\nu_2})\,\mathcal{U}_{f_1'\omega_2}\,\mathcal{U}_{f_2'\omega_1}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum V(f_1,f_2;f_2'f_1')(V_{f_1'\nu_1}V_{f_2'\nu_2}-V_{f_2'\nu_1}V_{f_1'\nu_2})\,\overset{*}{V}_{f_1\omega_1}\,\overset{*}{V}_{f_2\omega_2}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum\left\{V(f_1,f_2;f_2',f_1')-U(f_1,f_2;f_1'f_2')\right\}\times$$

---

x/ Здесь индекс ω в отличие от обозначений § 1 представляет просто индекс суммирования по ν .

$$\times\left(v_{f_1'\nu_1} u^*_{f_1\nu_2} - u^*_{f_1\nu_1} v_{f_1'\nu_2}\right)\left(v^*_{f_2\omega_1} u_{f_2'\omega_2} - v^*_{f_2\omega_2} u_{f_2'\omega}\right)$$

$$Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum V(f_1,f_2;f_2',f_1')\left(u^*_{f_2\nu_1} u^*_{f_1\nu_2} - u^*_{f_1\nu_1} u^*_{f_2\nu_2}\right) v_{f_2'\omega_1} v_{f_1'\omega_2} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum V(f_1,f_2;f_2',f_1')\left(v_{f_1'\nu_1} v_{f_2'\nu_2} - v_{f_2'\nu_1} v_{f_1\nu_2}\right) u^*_{f_2\omega_2} u_{f_1\omega_1} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum \left\{V(f_1,f_2;f_2',f_1') - V(f_1,f_2;f_1',f_2')\right\}\times$$

$$\times\left(v_{f_1'\nu_1} u^*_{f_1\nu_2} - v_{f_1'\nu_2} u^*_{f_1\nu_1}\right)\left(u^*_{f_2\omega_1} u_{f_2'\omega_2} - u^*_{f_2\omega_2} v_{f_2'\omega_1}\right)$$

Из /70/ получим также:

$$-i\,\frac{\partial\lambda^*(\nu_1,\nu_2)}{\partial t} = \sum_{\omega}\left\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\,\lambda^*(\nu,\omega) - \Omega^*(\nu,\omega)\,\lambda^*(\nu_2,\omega)\right\} +$$

$$+\sum_{\omega}\left\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\,\lambda^*(\omega_1,\omega_2) + Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\,\lambda(\omega_2,\omega_1)\right\} \qquad /72/$$

Систему линейных однородных уравнений /70/, /72/ будем решать суперпозицией нормальных колебаний:

$$\lambda(\nu_1,\nu_2) = \sum_E e^{-iEt}\,\xi_E(\nu_1,\nu_2)$$

$$\lambda^*(\nu_1,\nu_2) = \sum_E e^{-iEt}\,\zeta_E(\nu_1,\nu_2); \quad \xi^*_{-E} = \zeta_E \qquad /73/$$

Подставив /73/ в /70/ и /72/, получим секулярные уравнения для определения спектра в виде:

$$E\xi(\nu_1,\nu_2)=\sum\left\{\Omega(\nu_2,\omega)\xi(\nu_1,\omega)-\Omega(\nu_1,\omega)\xi(\nu_2,\omega)\right\}+$$

$$+\sum\left\{X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\xi(\omega_1,\omega_2)+Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\zeta(\omega_2,\omega_1)\right\}$$

/74/

$$-E\zeta(\nu_1,\nu_2)=\sum\left\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\zeta(\nu_1,\omega)-\Omega^*(\nu_1,\omega)\zeta(\nu_2,\omega)\right\}+$$

$$+\sum\left\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\zeta(\omega_1,\omega_2)+Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\xi(\omega_2,\omega_1)\right\}$$

Подчеркнем, что те же самые уравнения мы получили бы, если бы вместо метода самосогласованного поля воспользовались методом приближенного вторичного квантования. В этом методе мы должны были бы ввести Бозе-амплитуды $\beta_{\nu\mu}$ $(\beta_{\mu\nu}=-\beta_{\nu\mu})$ заменив ими Ферми-амплитуды $\alpha_\nu\,\alpha_\mu$. Тогда мы диагонализировали бы соответствующий гамильтониан, являющийся квадратичной формой из операторов β, β^+ посредством канонического преобразования:

$$\beta_{\nu_1\nu_2}=\sum_n\left\{\xi_n(\nu_1,\nu_2)\xi_n+\zeta_n(\nu_1,\nu_2)\xi_n^+\right\} \qquad /75/$$

с законом нормировки:

$$\sum_n\left\{|\xi_n|^2-|\zeta_n|^2\right\}=1 \qquad /76/$$

Здесь ξ_n - новые Бозе-амплитуды с зависимостью от времени, определяемой множителем $exp(-iE_nt)$. При этом оказалось бы, что ξ и ζ должны удовлетворять как раз нашим уравнениям /74/. Заметим, кстати, что вывод этих уравнений с помощью метода приближенного вторичного квантования имеет некоторое преимущество над тем, который был нами дан выше, так как естественно приводит к условию нормировки /76/, определяющим знак E. В методе самосогласованного поля этот знак не фиксируется; нетрудно заметить, что если E,ξ,ζ есть решение системы секулярных уравнений /74/, то преобразование

$$E\to -E,\quad \xi\to\zeta^*,\quad \zeta\to\xi^*$$

приводит опять к решению той же системы.

Мы состовили сейчас уравнения для собственных колебаний. Рассмотрим теперь вопрос о вынужденных колебаниях, возбуждаемых малыми внешними полями, вызывающими вариацию $I(f,f')$. /Закон взаимодействия V считаем не зависящим от внешних полей/. Тогда повторяя предыдущие рассуждения, получим вместо однородных уравнений /70/, /72/ неоднородные уравнения вида:

$$i\frac{\partial\lambda(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_{\omega}\left\{\Omega(\nu_2,\omega)\lambda(\nu_1,\omega)-\Omega(\nu_1,\omega)\lambda(\nu_2,\omega)\right\}+$$
$$+\sum_{\omega_1,\omega_2}\left\{X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_1,\omega_2)+Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda^*(\omega_2,\omega_1)\right\}+$$
$$+\sum_{f,f'}\left\{v_{f'\nu_1}u^*_{f\nu_2}-u^*_{f\nu_1}v_{f'\nu_2}\right\}\delta I(f,f') \qquad /77/$$
$$-i\frac{\partial\lambda^*(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_{\omega}\left\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\lambda^*(\nu_1,\omega)-\Omega^*(\nu_1,\omega)\lambda^*(\nu_2,\omega)\right\}+$$
$$+\sum_{\omega_1,\omega_2}\left\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda^*(\omega_1,\omega_2)+Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_2,\omega_1)\right\}+$$
$$+\sum_{f,f'}\left\{v^*_{f'\nu_1}u_{f\nu_2}-u_{f\nu_1}v^*_{f'\nu_2}\right\}\delta I^*(f,f').$$

Применим теперь только что выведенные общие уравнения к конкретному случаю динамической системы, рассмотренной в § 1 в связи с теорией сверхпроводимости.

Подставим формулы /30/, /31/, /36/ из § 1 в выражения /71/ и раскроем тем самым уравнения /74/. Заметим, при этом, что спектр распадается на две ветви. У одной из них

$$\lambda_{\sigma\sigma}=0$$

и колебания происходят у пар частиц с противоположными спинами. Для другой ветви, наоборот:

$$\lambda_{-+}=\lambda_{+-}=0$$

и колебания происходят у пар с одинаковыми спинами. Рассмотрим здесь первую ветвь и положим:

$$\lambda_{-+}(p_1,p_2)=\lambda(p_1,p_2)$$
$$\xi_{-+}(p_1,p_2)=\xi(p_1,p_2)$$

$$\zeta_{-+}(p_1,p_2)=\zeta(p_1,p_2)$$

Тогда система уравнений /74/ примет вид:

$$E\xi(p_1,p_2)=\{\Omega(p_1)+\Omega(p_2)\}\xi(p_1,p_2)+$$

$$+\sum_{p_1',p_2'}\frac{\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')}{V}\{X(p_1,p_2;p_1',p_2')\xi(p_1',p_2')+Y(p_1,p_2;p_1',p_2')\zeta(-p_2',-p_1')\}$$

$$-E\zeta(-p_2,-p_1)=\{\Omega(p_1)+\Omega(p_2)\}\zeta(-p_2,-p_1)+$$

$$+\sum_{p_1',p_2'}\frac{\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')}{V}\{X(p_1,p_2;p_1',p_2')\zeta(-p_2',-p_1')+ \qquad /78/$$

$$+Y(p_1,p_2;p_1',p_2')\xi(p_1',p_2')\}$$

где $\Omega(p)$ имеет то же выражение, что и в § 1, и где:

$$X(p_1,p_2;p_1',p_2')=$$

$$=J(p_1,p_2;p_2',p_1')\{u(p_1)u(p_2)u(p_1')u(p_2')+v(p_1)v(p_2)v(p_1')v(p_2')\}+$$

$$+J(p_1,-p_1',p_2',-p)\{u(p_1)v(p_2)v(p_1')u(p_2')+v(p_1)u(p_2)u(p_1')v(p_2')\}+ \qquad /79a/$$

$$+[J(-p_1,p_2';-p_1',p_2)-J(p_2',-p_1;-p_1',p_2)]\times$$

$$\times\{v(p_1)u(p_2)v(p_1')u(p_2')+u(p_1)v(p_2)u(p_1')v(p_2')\}$$

$$Y(p_1,p_2;p_1',p_2')=$$

$$= -J(p_1,p_2;p_2',p_1')\{u(p_1)u(p_2)v(p_1')v(p_2')+v(p_1)v(p_2)u(p_1')u(p_2')\}+$$

$$+J(p_1,-p_1';p_2',-p_2)\{v(p_1)u(p_2)v(p_1')u(p_2')+u(p_1)v(p_2)u(p_1')v(p_2')\}+$$

$$+[J(-p_1,p_2';-p_1',p_2)-J(p_2',-p_1;-p_1',p_2)]\times \qquad /79б/$$

$$\times\{u(p_1)v(p_2)v(p_1')u(p_2')+v(p_1)u(p_2)u(p_1')v(p_2')\}$$

Как видно, полученные уравнения связывают между собой функции

$$\xi(p_1,p_2),\quad \zeta(-p_2,-p_1)$$

только при фиксированном p_1+p_2. Заметим также, что коэффициенты X, Y одинаковы в обоих уравнениях /78/. Поэтому будет удобно положить

$$p_1=p,\quad p_2=-p+q$$

$$\xi(p_1,p_2)-\zeta(-p_2,-p_1)=\theta_q(p)$$

$$\xi(p_1,p_2)+\zeta(-p_2,-p_1)=\partial_q(p)$$

Преобразуем тогда уравнения /78/ к более простой форме:

$$L_q(\theta)=E\partial;\quad M_q(\partial)=E\theta \qquad /80/$$

где

$$L_q(\theta)=\{\Omega(p)+\Omega(p-q)\}\theta(p)+1/V\sum_{p'}Q_p(p,p')\theta(p')$$

$$M_q(\partial)=\{M(p)+\Omega(p-q)\}\partial(p)+1/V\sum_{p'}R_q(p,p')\partial(p') \qquad /81/$$

и где $$Q(p,p') =$$

$$= J_q(p,p')\{u(p)u(p-q)+v(p)v(p-q)\}\{u(p')u(p'-q)+v(p')v(p'-q)\}+$$

$$+I_q(p,p')\{v(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)\}\{v(p')u(p'-q)-u(p')v(p'-q)\}$$

$$R_q(p,p') =$$

$$= J_q(p,p')[u(p)u(p-q)-v(p)v(p-q)][u(p')u(p'-q)-v(p')v(p'-q)]+$$

$$+G_q(p,p')[v(p)u(p-q)+u(p)v(p-q)][v(p')u(p'-q)+u(p')v(p'-q)]$$

причем $$J_q(p,p') = J(p,-p+q;-p'+q,p')$$

$$I_q(p,p') = J(p,p'-q;p',p-q)-J(p,p'-q;p-q,p')-J(p,-p';-p'+q,p-q)$$
/82/
$$G_q(p,p') = J(p,p'-q;p',p-q)-J(p,p'-q;p-q,p')+J(p,-p';-p'+q,p-q)$$

Поясним сейчас физический смысл функций θ и ϑ. Рассмотрим для этого выражения для плотности числа частиц $\rho(r)$ и плотности импульса $\vec{P}(r)$. Имеем:

$$\rho(r) = \langle \sum_\sigma \varphi_\sigma^*(r)\,\varphi_\sigma(r)\rangle = \frac{1}{V}\sum_{p_1 p_2 \sigma}\langle a_{p_1\sigma}^+ a_{p_2\sigma}\rangle e^{i(p_2-p_1)r} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2,\sigma} F_{\sigma\sigma}(p_1,p_2)\, e^{i(p_2-p_1)r}$$ /83/

и $$\vec{P}(r) = 1/2 \langle \sum_\sigma \left\{\varphi_\sigma^+(r)\left(-i\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\varphi_\sigma(r)\right)+i\frac{\partial\varphi_\sigma^+(r)}{\partial \bar{r}}\varphi_\sigma(r)\right\}\rangle =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2\sigma}\langle a_{p_1\sigma}^+ a_{p_2\sigma}\rangle(\bar{p}_1+\bar{p}_2)e^{i(p_2-p_1)r} = \frac{1}{V}\sum_{p_1 p_2 \sigma}F_{\sigma\sigma}(p_1,p_2)(\bar{p}_1+\bar{p}_2)e^{i(p_2-p_1)r}$$

Введем компоненты Фурье для этих плотностей:

$$\rho(r) = \sum_q \rho_q\, e^{i(qr)} \qquad \bar{P}(r) = \sum_q \bar{P}_q\, e^{i(qr)}$$

и заметим, что наше основное состояние является пространственно однородным и бестоковым. Имеем, следовательно, на основании /82/

$$\rho_0 = \frac{2}{V} \sum_p v_p^2 , \quad \rho_q = \frac{1}{V} \sum_{p_2 - p_1 = q} \left\{ \delta F_{++}(p_1, p_2) - \delta F_{--}(p_1, p_2) \right\}; \quad q \neq 0$$

$$\bar{P}_q = \frac{1}{2V} \sum_{p_2 - p_1 = q} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \left\{ \delta F_{++}(p_1, p_2) + \delta F_{--}(p_1, p_2) \right\} \qquad /84/$$

С другой стороны, раскрыв формулы /64/, получим:

$$\delta F_{--}(p_1, p_2) = v(p_1)\, u(p_2)\, \lambda(p_2, -p_1) + u(p_1)\, v(p_2)\, \lambda^*(p_1, -p_2)$$

$$\delta F_{++}(p_1, p_2) = v(p_1)\, u(p_2)\, \lambda(-p_1, p_2) + u(p_1)\, v(p_2)\, \lambda^*(-p_2, p_1) \qquad /85/$$

Подставив эти выражения в /84/, после очевидных упрощений найдем

$$\rho_q = 1/V \sum_{p_1 + p_2 = q} \left\{ v(p_2) u(p_1) + v(p_1) u(p_2) \right\} \left\{ \lambda(p_1, p_2) + \lambda^*(-p_2, -p_1) \right\} \qquad /86/$$

$$\vec{P}_q = 1/2V \sum_{p_1 + p_2 = q} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \left\{ v(p_2) u(p_1) - v(p_1) u(p_2) \right\} \left\{ \lambda(p_1, p_2) - \lambda^*(-p_2, -p_1) \right\}$$

Откуда на основании /73/:

$$\rho_q = \sum_E \rho_q^{(E)} e^{-iEt} , \qquad \vec{P}_q = \sum_E \vec{P}_q^{(E)} e^{-iEt}$$

$$\rho_q^{(E)} = 1/V \sum_p \left\{ u(p) v(p-q) + v(p) u(p-q) \right\} \vartheta_q(p) \qquad /87/$$

$$\vec{P}_q^{(E)} = 1/2V \sum_p (2\bar{p} - \bar{q}) \left\{ u(p) v(p-q) - v(p) u(p-q) \right\} \theta_q(p)$$

Таким образом, вклад в колебания плотности числа матриц от элементарного возбуждения определяется функцией ϑ, а соответствующий вклад в колебаниях плотности импульса - функцией θ. Обратимся теперь к уравнениям /83/. Положим в них:

$$\theta(p) = S_1\, \delta(p - p_0)$$

$$\vartheta(p) = S_2\, \delta(p - p_0) \qquad /88/$$

где S_1 и S_2 - постоянные, а p_0 - произвольный фиксированный импульс. Отбрасывая члены порядка V^{-1}, исчезающие после предельного перехода: $V \to \infty$ и вызывающие лишь локальные изменения в волновой функции, видим, что /88/ будет допустимой системой решений, если S_1 и S_2 будут связаны соотношениями:

$$S_1\{\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q)\}=ES_2$$

$$S_2\{\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q)\}=ES_1 \qquad /89/$$

откуда следует, что:

$$E^2=\{\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q)\}^2$$

Таким образом убеждаемся в существовании непрерывного спектра[x/]

$$E=\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q) \qquad /90/$$

отделенного щелью. При данном q энергия E здесь непрерывно зависит от импульса P_0. Построим еще асимптотическую часть волновой функции для элементарного возбуждения этого типа, для чего раскроем формулу /65/. Найдем:

$$\delta\Phi_{-+}(P_1,P_2)=u(P_1)u(P_2)\lambda(P_1,P_2)-v(P_1)v(P_2)\lambda^*(-P_2,-P_1)$$

и потому в рассматриваемом случае для δ - образной слагающей:

$$\delta\Phi_{-+}(P_1,P_2)=\delta(P_1-P_0)\delta(P_2+P_0-q)S\exp\{-i(\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q)t\}$$

где постоянная S будет

$$S=u(P_0)u(P_0-q)\frac{S_1+S_2}{2}+v(P_0)v(P_0-q)\frac{S_1-S_2}{2}$$

Имеем, следовательно, в r - представлении:

$$\delta\Phi_{-+}(r_1,r_2)/|r_1-r_2|\to\infty \simeq$$

$$\simeq const\ \exp\{-i[\Omega(P_0)+\Omega(P_0-q)]t+i[P_0r_1+(q-P_0)r_2]\}$$

Сравним это выражение с волновой функцией пары / -, + / в основном состоянии:

$$\Phi^0_{-+}(r_1,r_2)=const\int e^{ip(r_1-r_2)}u(P)v(P)\,dP$$

---

x/ Положительный знак выбираем на основании общего условия нормировки /76/, которое в рассматриваемом случае будет:

$$\sum_P \theta(P)\vartheta(P)>0 \qquad /76/$$

Подставив в это условие решение /88/, видим, что S_1 и S_2 должны иметь одинаковые знаки. Поэтому уравнение /89/ приводит к положительному знаку E.

Ясно, что такая Φ°_{-+} соответствует связанному состоянию пары частиц, в частности, при $|r_1 - r_2| \to \infty$ функция эта стремится к нулю. Выражение же $\delta\Phi_{-+}$ распадается на произведение двух плоских волн и соответствует независимому движению двух частиц с импульсами $p_0, q - p_0$.

Видим таким образом, что элементарные возбуждения из непрерывного спектра можно физически интепретировать как отвечающие диссоциации квазимолекулы на отдельные составляющие ее частицы. Перейдем теперь к изучению спектра коллективных колебаний, который будем определять с помощью решений уравнений /81/, соответствующих дискретным /при фиксированном q / значениям E.

Рассмотрим прежде всего случай, когда частицы не имеют электрического заряда. В этом случае ввиду отсутствия кулоновского взаимодействия будем считать все ядра I , $\mathcal{Y}$, G конечными. Сделаем еще ряд замечаний. Так, из уравнения /35/ следует, что:

$$L_0(\theta) = 0 \quad \text{для} \quad \theta = u(p)v(p)$$

Поэтому неоднородно уравнение

$$L_0(\theta) = f(p)$$

может иметь решение только, если

$$\sum_p f(p)u(p)v(p) = 0 \qquad /91/$$

Видим теперь, что система уравнений /81/ имеет при q = 0 решение:

$$\theta = u(p)v(p), \; \vartheta = 0, \; E = 0 \qquad /92/$$

и потому будем искать ее решение для малых $|q|$ с помощью разложений по степеням $|q|$:

$$\theta = u(p)v(p) + |q|\theta_1(p,e) + |q|^2\theta_2(p,e) + \ldots$$

$$\vartheta = |q|\vartheta_1(p,e) + \ldots \qquad /93/$$

$$E = |q|E_1 + \ldots$$

где $\vec{e} = \vec{q}/|\vec{q}|$

Подставив эти разложения в уравнения /81/, получим:

$$L_0(\theta_1) = -\sum_{1\le\alpha\le 3} e_\alpha \left\{ \frac{\partial L_q(uv)}{\partial q_\alpha} \right\}_q = 0 \qquad /94/$$

$$M_0(\partial_1) = E_1 u(p)v(p) \qquad /95/$$

$$L_0(\partial_2) = E_1\partial_1 - \sum_\alpha e_\alpha \left\{ \frac{\partial L_q(\theta_1)}{\partial q^\alpha} \right\}_{q=0} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left\{ \frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right\}_{q=0} \qquad /96/$$

Уравнение /94/ разрешимо, так как функция $f(p)$, стоящая в его правой части, обладает свойством:

$$f(-p) = -f(p)$$

ввиду которого условие /91/ выполняется тривиально. Для разрешимости уравнения /96/ мы должны потребовать на основании /91/, чтобы

$$E_1 \sum_p \partial_1 (p,e) u(p) v(p) =$$

$$= \sum_p u(p)v(p) \left\{ \sum_\alpha e_\alpha \frac{\partial L_q(\theta_1)}{\partial q^\alpha} \right\}_{q=0} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left\{ \frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right\}_{q=0} \qquad /97/$$

Из уравнения /95/ мы видим, что ∂_1 пропорционально E_1. Поэтому условие /97/ дает нам возможность определить E_1^2 и т.д. Фактически проведя указанную здесь программу вычислений в случае радиальной симметрии, можем убедиться, что при малом $|q|$:

$$E = \frac{|q|s}{\sqrt{3}}$$

где, если отвлечься от поправок на взаимодействие, s - будет равно величине скорости частиц на поверхности Ферми.

Мы находим, таким образом, коллективные колебания квазиакустического характера. Область их существования ограничена импульсами q, для которых соответствующая E лежит ниже порога возбуждения непрерывного спектра.

Посмотрим теперь, что произойдет с колебаниями этого типа у динамической системы электронов, рассматриваемой в теории сверхпроводимости. Заметим прежде всего, что наличие кулоновского взаимодействия вызывает здесь су щественную особенность у ядра G_q :

$$G_q = \frac{8\pi e^2}{|q|^2} + G'_q$$

Целесообразно поэтому представлять теперь оператор M_q в виде

$$M_q(\vartheta) = M'_q(\vartheta) +$$

$$+ \frac{8\pi e^2}{|q|^2}\left\{v(p)u(p-q) + u(p)v(p-q)\right\}\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta(p')\left\{v(p')u(p'-q) + u(p')v(p'-q)\right\} \quad /98/$$

явно выделив в нем часть с особенностью[x/] при $q = 0$. Для регуляризации уравнений /81/ введем новую неизвестную φ , положив:

$$\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta(p')\left\{v(p')u(p'-q) + u(p')v(p'-q)\right\} = \frac{|q|^2}{16\pi e^2}\varphi$$

Тогда наша система уравнений может быть записана в форме:

$$L_q(\theta) = E\vartheta$$

$$M'_q(\vartheta) + \left\{v(p)u(p-q) + u(p)v(p-q)\right\}\varphi/2 = E\theta \quad /99/$$

$$\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta(p')\left\{v(p')u(p'-q) + u(p')v(p'-q)\right\} = \frac{|q|^2}{16\pi e^2}\varphi$$

Видим, что при $q = 0$ она имеет решение при произвольном E:

$$\theta = u(p)v(p), \quad \vartheta = 0, \quad \varphi = E$$

Поэтому будем искать ее решение для малых $|q|$ с помощью расположения:

$$\theta = u(p)v(p) + |q|\theta_1(p,e) + |q|^2\theta_2(p,e) + \dots$$

---

x/ Не следует думать, что при более точной трактовке мы получили бы эффект экранирования в множителе $8\pi e^2/|q|^2$ и тем самым ликвидировали бы указанную способность. Причина этого в том, что мы имеем здесь дело с колебаниями плотности электрического заряда, что видно хотя из того, что в /98/ как раз и входит амплитуда колебаний /см.формулу /87//.При обследовании же неоднородности в распределении заряда кулоновские силы имеют далеко действующий характер и потому в p - представлении всегда должна быть указанная особенность при $q = 0$.

$$\vartheta = (q)\,\vartheta_1(p,e) + \ldots \qquad \varphi = E_0 + |q|\,\varphi_1 + \ldots \tag{100}$$

$$E = E_0 + |q|\,E_1 + \ldots$$

подставив которые в /99/, найдем:

$$L_0(\theta_1) = E_0\vartheta_1 - \sum_{\alpha} e_\alpha \left\{ \frac{\partial L_q(uv)}{\partial q_\alpha} \right\}_{q=0} \tag{101}$$

$$M_0'(\vartheta_1) = \mathcal{U}(P)\,\mathcal{V}(P)(E_1 - \varphi_1) + E_0\theta_1 + E_0/2 \sum_{\alpha} e_\alpha \left(\mathcal{U}(P)\frac{\partial \mathcal{V}(P)}{\partial P_\alpha} + \mathcal{V}(P)\frac{\partial \mathcal{U}(P)}{\partial P_\alpha} \right) \tag{102}$$

$$\frac{1}{V}\sum_{P'} \vartheta_1(P')\,\mathcal{U}(P')\,\mathcal{V}(P') = 0 \tag{103}$$

$$L_0(\theta_2) = E_0\vartheta_2 + E_1\vartheta_1 - \sum_{\alpha} e_\alpha \left\{ \frac{\partial L_q(\theta_1)}{\partial q_\alpha} \right\}_{q=0} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left\{ \frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right\}_{q=0} \tag{104}$$

$$2/V \sum_{P} \vartheta_2(P)\,\mathcal{U}(P)\,\mathcal{V}(P) = \frac{E_0}{16\pi e^2} + \frac{1}{V}\sum_{\alpha,P} \vartheta_1(P)\,e_\alpha \left\{ \mathcal{U}(P)\frac{\partial \mathcal{V}(P)}{\partial P_\alpha} + \mathcal{V}(P)\frac{\partial \mathcal{U}(P)}{\partial P_\alpha} \right\} \tag{105}$$

В уравнении /102/ возьмем $E_1 - \varphi_1 = 0$. Тогда из /100/, /102/ можно заметить, что θ_1 и ϑ_1 будут антисимметричны при перемене знака P и потому условие /103/ удовлетворится автоматически. Для разрешимости /104/ напишем наше обычное условие:

$$E_0 \sum \vartheta_2(P)\,\mathcal{U}(P)\,\mathcal{V}(P) = \tag{106}$$

$$= \sum \mathcal{U}(P)\,\mathcal{U}(P) \left\{ \sum_{\alpha} e_\alpha \left(\frac{\partial L_q(\theta_1)}{\partial q^\alpha} \right)_{q=0} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left[\frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right]_{q=0} \right\}$$

Но левая часть этого равенства на основании /105/ будет:

$$\frac{VE_0^2}{32\pi e^2} + \sum_{\alpha,\beta} \vartheta_1(P)\,e_\alpha \left\{ \mathcal{U}(P)\frac{\partial \mathcal{V}(P)}{\partial P_\alpha} + \mathcal{V}(P)\frac{\partial \mathcal{U}(P)}{\partial P_\alpha} \right\} \tag{107}$$

Теперь видим, что уравнение /106/, определяющее E_0 не имеет нулевого корня. Действительно, из /101/, /102/ следует, что левая часть /106/, представленная выражением /107/ обратится в нуль при $E_0 = 0$. Правая же часть /106/ при $E_0 = 0$ совпадает с правой частью /97/ и потому будет отлична от нуля.

Вычислим сейчас E_0 для радиально-симметричного случая. Возьмем:

$$E(p) = \frac{p^2}{2m}$$

и предположим еще, что:

$$J(p_1, p_2; p_2', p_1') = J(p_1 - p_1') \quad \text{при} \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \qquad /108/$$

Тогда можно проверить наличие тождества

$$L_q(\chi_q) = \left\{\frac{(p-q)^2 - p^2}{2m}\right\}\left(v(p)u(p-q) - \dot{u}(p)v(p-q)\right\} \qquad /109/$$

в котором

$$\chi_q(p) = u(p)v(p-q) + u(p-q)v(p) \qquad /110/$$

Заметим, что случай /108/ реализуется, если взаимодействие не зависит от скоростей и определяется потенциалом $V(r_1 - r_2)$. В этом случае

$$J(p) = -J(-p) = \int V(r)\, e^{i(rp)} dr$$

В теории сверхпроводимости кроме кулоновских сил, для которых условие /108/ естественно выполняется, необходимо принять во внимание еще Фрелиховское взаимодействие, обусловленное обменом фононами. Такое взаимодействие эффективно лишь в узком слое около поверхности Ферми, и в этой области его вклад в J будет:

$$J_p(p_1, p_2; p_2', p_1') = -g^2(p_1 - p_1') \quad \text{при} \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \qquad /111/$$

где $g(q)$ - величина, характеризующая связь электронов с фононами. Поэтому мы и можем пользоваться соотношениями /109/. Строго говоря, чтобы оно имело место точно, необходимо продеформировать выражение /110/. Мы заметили бы тогда отклонения порядка отношения c/ω, где ω - средняя энергия фотона, т.е. отклонения порядка величины эффектов запаздывания электронно-фононного взаимодействия.

В силу этого обстоятельства такое уточнение нецелесообразно проводить в рассматриваемой сейчас модели, в которой электронно-фононное взаимодействие заменено прямым взаимодействием электронов, поскольку сама эта замена допустима лишь с точностью до пренебрежения эффекта запаздывания. Применим сейчас соотношения /109/, /110/ для определения величины E_0. Ввиду эрмитовости оператора L_q имеем:

$$\sum_p \left\{ L_q(\theta)\chi_q - L_q(\chi_q)\theta \right\} = 0 \qquad /112/$$

откуда

$$E\frac{1}{V}\sum_p \vartheta(p)\left\{u(p)v(p-q)+v(p)u(p-q)\right\} = $$
$$= \frac{1}{V}\sum_p \theta(p)\left\{\frac{(p-q)^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}\right\}\left(v(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)\right) \qquad /113/$$

Вычислим теперь обе части этого равенства с точностью до величины порядка $|q|^2$ включительно. Из /100/ видим, что

$$\theta(p) = u(p)v(p) + |q|\theta_1 + \dots$$

Кроме того, из /99/ и /100/ имеем:

$$1/V\sum_p \vartheta(p)\left\{u(p)v(p-q)+v(p)u(p-q)\right\} = \frac{|q|^2}{16\pi e^2}\left\{E_0 + |q|\varphi_1 + \dots\right\}$$

Поэтому из /113/ получим

$$E_0^2 = \frac{16\pi e^2}{V}\sum_p u(p)v(p)\,\frac{(\bar p\bar e)}{m}\left\{v(p)\left(\bar e\,\frac{\partial u(p)}{\partial \bar p}\right)-u(p)\left(\bar e\,\frac{\partial v(p)}{\partial \bar p}\right)\right\} \qquad /114/$$

где $\bar e = \bar q/|q|$. Подставив в /114/ выражения u, v из /36/ найдем окончательно

$$E_0 = \sqrt{4e^2/3\pi \quad p_F^3/m} \qquad /115/$$

p_F - импульс Ферми.

Как видно, мы получили здесь обычное значение энергии для известных плазменных колебаний; специфика сверхпроводящего состояния полностью выпала[x]. Ввиду того,

---

[x] Этот результат был ранее получен Андерсоном [6]. Высказывавшееся ранее /см. § 7 в [1] /представление о существенности влияния сверхпроводящего состояния не подтвердилось.

что E_0 значительно больше энергии непрерывного спектра /при малых q /, найденное стационарное решение окажется в более точной трактовке лишь квазистационарным.

Отметим, однако, одно любопытное обстоятельство, а именно то, что несмотря на полученный сейчас результат, у системы уравнений /81/ значение Е = 0 можно рассматривать как приближенное собственное значение.

Действительно, учитывая /109/, нетрудно заметить, что взяв

$$\theta_q(P) = \chi_q(P), \quad \vartheta_q(P) = 0, \quad E = 0$$

мы удовлетворим системе /81/ с точностью до величин порядка $|q|^2$. Несколько позже мы заметим, что это обстоятельство оказывается весьма существенным для обеспечения градиентной инвариантности теории. Мы только что отмечали, что плазменные колебания со своим высоким значением Е не специфичны для сверхпроводящего состояния. В связи с этим можно поставить вопрос, имеются ли вообще коллективные колебания, характерные для такого состояния.

Как мы теперь видим, их можно искать лишь среди колебаний, не меняющих плотности распределения электрического заряда. Иначе говоря, мы должны искать решения системы /81/, у которых исчезает выражение

$$\frac{1}{V}\sum_P \vartheta(P)\left\{u(P)v(P-q) + v(P)u(P-q)\right\}$$

с которой и связано появление особенности при $q = 0$ /см. формулу /98//. Возьмем радиально-симметричный случай. Установим ось z по направлению вектора $\vec{q}$ и введем цилиндрические координаты. Будем искать решения вида:

$$\left.\begin{aligned} \theta_q(P) &= e^{in\varphi}\,\theta(P^2, P_z) \\ \vartheta_q(P) &= e^{in\varphi}\,\vartheta(P^2, P_z) \end{aligned}\right\} \quad n \neq 0$$

Такие решения формально будут существовать и для них указанное выражение тождественно равнонулю. Вопрос состоит лишь в том, будут ли соответствующие значения Е лежать ниже порога возбуждения непрерывного спектра.

Следовало бы проанализировать также колебания нерассматривавшейся здесь ветви спектра, у которой

$$\lambda_{-+} = \lambda_{+-} = 0$$

§ 5. Вопросы электродинамики сверхпроводящего состояния

Рассмотрим вопрос об изменении основного сверхпроводящего состояния под действием внешнего постоянного поля $\bar{A}(r)$. Чтобы работать в линейном приближении, будем считать A бесконечно малым первого порядка и воспользуемся общими уравнениями /77/. Тогда, если не учитывать наличия парамагнитного члена[x/], получим:

$$\lambda_{-+}(P_1,P_2) = 1/2\,\theta_q(P); \quad \lambda^*_{-+}(-P_2,-P_1) = \frac{1}{2}\,\theta_q(P) \qquad /116/$$

и

$$L_q(\theta_q) = -\frac{e}{m}(2\vec{p}-\vec{q})\vec{A}(q)\{v(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)\} \qquad /117/$$

Займемся сейчас исследованием свойств этого уравнения. Возьмем

$$e\vec{A}(q) = i\vec{q}\,\varphi(q) \qquad /118/$$

Тогда, в r - представлении мы должны иметь при наличии градиентной инвариантности

$$F(r_1,r_2) = e^{i(\varphi(r_2)-\varphi(r_1))}F_0(r_1,r_2)$$

или, поскольку в нашем случае φ бесконечно мало:

$$\delta F(r_1,r_2) = i\,[\varphi(r_2)-\varphi(r_1)]\,F_0(r_1,r_2)$$

Переходя к p - представлению и используя формулу /85/, получим

$$\lambda(P_1,P_2) = i\varphi(P_1+P_2)\{u_{P_1}v_{P_2}+v_{P_1}u_{P_2}\}$$

и

$$\theta_q(P) = 2i\varphi(q)\{u(P)v(P-q)+v(P)u(P-q)\} = 2i\varphi(q)\,\chi_q(P)$$

С другой стороны, найденное $\theta_q(P)$ должно удовлетворять уравнению /117/ в случае /118/ и потому

$$2i\varphi(q)L_q\{\chi_q\} =$$

$$= 1/im\,\{(2\bar{p}-\bar{q})\bar{q}\}\,\varphi(q)\,[u(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)]$$

Но это есть ни что иное как соотношение /109/.

---

x/ В линейном приближении его эффект можем всегда рассмотреть независимо.

Таким образом, свойство градиентной инвариатности имеет место с той же степенью точности, как и соотношение /109/, т.е. с точностью до эффектов запаздывания электронно-фононного взаимодействия.

Представим теперь себе то положение, которое получилось бы, если поступать следующим образом. Рассмотрим сперва гамильтониан системы без внешнего поля, совершим каноническое преобразование

$$a_{k+} = u_k \alpha_{k0} + v_k \overset{+}{\alpha}_{k1}$$

$$a_{-k,-} = u_k \alpha_{k1} - v_k \alpha^{+}_{k0}$$

и определим u , v из условия компенсации опасных диаграм с импульсами $k, -k$.

Затем введем в гамильтониан малое внешнее поле, преобразуем все выражение к амплитудам α , α^+, после чего не заботясь о компенсации новых опасных диаграмм с импульсами $k, -k+q$, возникающих из-за внешнего поля, применим обычную теорию возмущений. Тогда вместо /117/ мы получили бы:

$$\left\{\Omega(p)+\Omega(p-q)\right\}\theta_q(p) =$$

$$= -\frac{e}{m}(2\bar{p}-\bar{q})\bar{A}(q)\left\{v(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)\right\}$$

откуда

$$\theta_q(p) = \frac{-e/m\,(2\bar{p}-\bar{q})\bar{A}(\bar{q})}{\Omega(p)+\Omega(p-q)}\left\{v(p)u(p-q)-u(p)v(p-q)\right\} \qquad /119/$$

Этот результат, очевидно, уже не будет градиентно-инвариантным ни в каком разумном приближении. Заменив $L_q(\theta)$ на

$$\left\{\Omega(p)+\Omega(p-q)\right\}\theta$$

мы разрушили тем самым основное свойство этого оператора,- то, что нуль является его собственным значением при $q = 0$. Перейдем теперь к изучению зависимости плотности тока от вектор-потенциала. Имеем на основании /84/:

$$m\vec{j}_q = e\vec{p}_q - e^2\vec{A}(q)\ {}^2/_V \sum v_p^2$$

и потому, благодаря /87/:

$$m\vec{j}_q = 1/V \sum_p e(\bar{p} - \bar{q}/2)\,\theta_q(p)\,[u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)] -$$
$$- e^2 \bar{A}(q)\, 2/V \sum_p v_p^2 \qquad /120/$$

Обозначим через $T_\alpha(p,q)$ решение уравнения:

$$L_q(T_\alpha) = -\frac{2p_\alpha - q_\alpha}{m}\,[v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)] \qquad /121/$$
$$\alpha = 1,2,3$$

Тогда на основание /117/ и /120/ найдем:

$$\theta_q(p) = e\sum_\alpha T_\alpha(p,q)\,A_\alpha(q)$$

и

$$\vec{j}_q = e^2\rho_0/m \sum_\beta \{S_{\alpha\beta}(q) - \delta(\alpha-\beta)\}\,A_\beta(q) \qquad /122/$$

где

$$\rho_0 = 2/V \sum_p v_p^2$$

$$S_{\alpha\beta}(q) = 1/V \sum_p \frac{(2p_\alpha - q_\alpha)}{2\rho_0}\,[u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)]\,T_\beta(p,q) \qquad /123/$$

Ввиду /121/ можем написать также

$$S_{\alpha\beta}(q) = m/V\rho_0 \sum_p L_q(T_\alpha)\,T_\beta$$

Убеждаемся отсюда в симметричности $S_{\alpha\beta}$:

$$S_{\alpha\beta}(q) = S_{\beta\alpha}(q) \qquad /124/$$

Из /123/ имеем также

$$\sum_\alpha q_\alpha S_{\alpha\beta}(q) = \frac{m}{V\rho_0}\sum_p L_q(\chi_q)\,T_\beta = m/V\rho_0 \sum_p \chi_q L_q(T_\beta) =$$

$$= 1/V\rho_0 \sum_p (2p_\beta - q_\beta)\,[u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)]\,[u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)] =$$

$$= 1/V\rho_0 \sum_p (2P_\beta - q_\beta)\{u^2(P)v^2(P-q) - v^2(P)u^2(P-q)\} =$$

$$= 1/V\rho_0 \sum_p (2P_\beta - q_\beta)\{v^2(P-q) - v^2(P)\} =$$

$$= 1/V\rho_0 \sum_p (2P_\beta + q_\beta)v^2(P) - 1/V\rho_0 \sum_p (2P_\beta - q_\beta)v^2(P)$$

Получаем таким образом соотношения Букингама /7/

$$\sum_\alpha q_\alpha S_{\alpha\beta}(q) = q_\beta \qquad /125/$$

В силу этих соотношений и /122/ убеждаемся в выполнении закона сохранения:

$$\vec{q}\,\vec{j} = 0$$

Видим также, что j_q фактически зависит лишь от поперечной части вектор-потенциала A:

$$\vec{J_q} = e^2\rho_0/m \sum_\beta \{S_{\alpha\beta}(q) - \delta(\alpha-\beta)\}\mathfrak{U}_\beta(q)$$

$$\mathfrak{U}_\alpha(q) = A_\alpha(q) - \frac{(\vec{q}\,\vec{A}(q))}{q^2}$$

Исследуем сейчас зависимость $\vec{J_q}$ от $\vec{\mathfrak{U}}(q)$ при малых q. Так как теперь

$$\vec{q}\,\vec{\mathfrak{U}}(q) = 0$$

то уравнение /117/ можем представить в форме

$$L_q(\theta_q) = 2e/m\,(\vec{P_\perp}\,\vec{\mathfrak{U}})[u(P)v(P-q) - v(P)u(P-q)]$$

где $\vec{P_\perp}$ - составляющая $\bar{P}$ - перпендикулярная вектору $\bar{q}$. Установив в пространстве импульсов ось z по направлению $\mathfrak{U}_q$, а ось x - по направлению $\vec{q}$, получим тогда

$$\theta_q(P) = e\,\mathfrak{U}(q)\tau(P,q) \qquad /126/$$

где

$$L_q(\tau) = f(P,q) = 2/m\, P_z\left[U(P)V(P-q) - V(P)U(P-q)\right] \qquad /127/$$

Как видно здесь $f(P,q)$ будет антисимметричной функцией P_z.

$$f(P_x, P_y, -P_z; q) + f(P_x, P_y, P_z; q) = 0 \qquad /128/$$

Такая функция будет ортогональна к $U(P)V(P)$. Мы можем поэтому всегда[x/] искать решение уравшения /127/в виде:

$$\tau(P,q) = q\tau_1(P) + q^2\tau_2(P)$$

где τ_1, τ_2...– антисимметричные функции переменной P_z в смысле /128/. С другой стороны, подставив /126/ в /120/, найдем:

$$\vec{I}_q = e^2\rho_0/m\left\{\vec{S}(q) - \vec{e}_z\right\}\mathcal{U}(q)$$

где $\vec{e}_z$ – орт оси z, а

$$\vec{S}(q) = \sum \frac{2\vec{P} - \vec{q}}{2\rho_0}\tau(P,q)\left[U(P)V(P-q) - V(P)U(P-q)\right]$$

Но при $q \to 0$, функция τ будет первого порядка малости и потому $\vec{S}(q)$ будет исчезать как q^2. Итак, для достаточно малых q:

$$\vec{j}_q = -e^2\rho_0/m\, \vec{\mathcal{U}}(q) \qquad /129/$$

и мы имеем эффект Мейснера в чистом виде,[9],[10]

Как мы видели, при рассмотрении влияния вектор-потенциала существенным оказался[11] лишь оператор $L_q(\theta)$. Если бы мы пожелали рассмотреть влияние внешнего скалярного потенциала V, то в линейном приближении пришли бы к уравнению:

$$M_q(\vartheta) = -2e\,V(q)\left[U(P)V(P-q) + V(P)U(P-q)\right]$$

с оператором M_q. Так как оператор этот содержит сингулярный член из-за деформации зарядовой плотности, нетрудно убедиться, что специфика сверхпроводящего состояния здесь выпадает, и эффект экранировки будет происходить так же, как и в нормальном состоянии.

Заметим, наконец, что если мы будем изучать влияние члена, пропорционального $\vec{H} \times \vec{\sigma}$, то мы придем к новому оператору, тому самому, который входит в уравнения колебаний для той ветви спектра, где $\lambda_{-+} = 0$.

---

x/ С чисто математической точки зрения возможен, конечно, случай, когда уравнение $L_0(\theta) = 0$ кроме симметричного решения $\theta = U(P)V(P)$ имеет еще другое собственное решение, антисимметричное по отношению к P_z. Физически, однако, рассмотрение подобного случая не имеет оснований, и мы его учитывать не будем.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить проф. Венцеля и проф. Шафрота за ценные дискуссии по вопросам электродинамики сверхпроводящего состояния /Женева, июль 1958 года/, которые способствовали привлечению интереса автора к рассмотрению кругу проблем.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков "Новый метод в теории сверхпроводимости", Издат. АН СССР /1958/, английский перевод - /1959/ - в печати. Fortschitte d.Phys.
2. Н.Н.Боголюбов, ЖЭТФ, 34, 58 /1958/.
3. С.В.Тябликов, Научные Доклады Высшей Школы, сер.физ. № 3 /1958/.
4. Н.Н.Боголюбов, В.Г.Соловьев, ДАН /в печати/.
5. А.А.Власов "Теория многих частиц" ГИТТЛ, 1950.
6. P.W. Anderson, Phys.Rev.; 110, 827, 985 (1958); preprint "The Random Phase Approximation in the Theory of Superconductivity."
7. M.J. Buckingham, Nuovo Cim. 5, 1763 (1957).
8. В.А.Фок Zs. of Phys. 61, 126 (1930).
9. J. Bardeen, L. Cooper and J. Schrieffer, Phys.Rev. 108, 1175 (1957).
10. J.M. Blatt and T. Matsubara - in print.
11. J. Bardeen, Nuovo Cimento 5, 1765 (1957).