ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р - 265 е

В.К. Мельников

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

г. Дубна, 1958 год

Р - 265

В.К. Мельников

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Введение

Как известно, обратной задачей теории рассеяния называется задача восстановления потенциальной функции в уравнении Шредингера по спектральным свойствам его решений. Математически строгое решение этой задачи для случая центрально-симметричного поля было дано в известных работах И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана/1,2/, М.Г.Крейна/3/, В.А.Марченко/4/ и др.

Однако, все эти работы основывались на том, что используемая спектральная характеристика (спектральная функция или S - функция) известна для всех значений параметра κ, входящего в уравнение Шредингера. Физически это означает необходимость знать результаты эксперимента по рассеянию для всех энергий.

На самом деле мы можем это знать только для конечного интервала энергий, а тот факт, что при сравнительно небольших энергиях уравнение Шредингера становится непригодным для описания физического явления, не позволяет надеяться даже на то, что этот интервал может быть сделан как угодно большим. Поэтому для того, чтобы можно было непосредственно применить результаты работ/1-4/, необходимо каким-то образом экстраполировать используемую спектральную характеристику за пределы известного интервала энергий. Однако, встречающиеся иногда попытки аналитической экстраполяции предельной фазы (или S -функции) являются крайне неудовлетворительными, ввиду того, что сколь угодно малыми возмущениями предельной фазы (или S -функции), произведенными при достаточно большой энергии, можно сколь угодно сильно возмутить потенциал. Этот факт заставляет искать другой путь для решения задачи.

В настоящей работе, основанной на применении метода Фурье, дается способ для восстановления низкочастотных гармоник потенциала и волновых функций по предельной фазе S - рассеяния, известной для конечного интервала энергий и показывается устойчивость этого процесса.

Пользуюсь случаем выразить свою признательность С.В.Фомину, Л.А.Чудову и Я.А.Смородинскому за полезные обсуждения и консультации.

I. Постановка задачи

Как известно, радиальная составляющая волновой функции S -волны в центрально-симметричном поле удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2R(r,E)}{dr^2} + V(r)\,R(r,E) = E\,R(r,E)$$

с условием в нуле: $R(0,E)=0$.

Сделаем замену: $r = x\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}$, $V(r) = \alpha V(x)$, $E = \alpha\kappa^2$, $R(r,E) = \varphi(x,\kappa)$ ($\alpha > 0$ - произвольно) и будем предполагать, что $R(r,E)$ нормированы так, что $\varphi'(0,\kappa) = \kappa$. Тогда $\varphi(x,\kappa)$ будет удовлетворять уравнению:

$$-\varphi''(x,\kappa) + V(x)\,\varphi(x,\kappa) = \kappa^2\varphi(x,\kappa) \tag{I}$$

с начальными условиями:

$$\varphi(0,\kappa)=0\ ,\quad \varphi'(0,\kappa)=\kappa\,. \qquad (\mathrm{I}')$$

Как показано в /2/, так определенные $\varphi(x,\kappa)$ допускают представление

$$\varphi(x,\kappa)=\sin\kappa x+\int_0^x R(x,t)\sin\kappa t\,dt\,, \qquad (2)$$

где $R(x,t)$ удовлетворяет при $0\leq t\leq x$ уравнению:

$$R''_{x^2}(x,t)-R''_{t^2}(x,t)=V(x)\,R(x,t) \qquad (3)$$

с условиями:

$$R(x,0)=0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dx}R(x,x)=\frac{1}{2}V(x)\,. \qquad (4')$$

Пусть $V(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x\to\infty$. Тогда при больших x $\varphi(x,\kappa)$ имеет асимптотический вид:

$$\varphi(x,\kappa)\approx A(\kappa)\sin(\kappa x+\delta(\kappa)), \qquad (5)$$

где $\delta(\kappa)$, так называемые, предельные фазы ($A(\kappa)$ может быть вычислено по $\delta(\kappa)$) и наша задача состоит в том, чтобы найти $V(x)$ и $\varphi(x,\kappa)$ по $\delta(\kappa)$. Подставив (4') в (3), получим уравнение

$$R''_{x^2}(x,t)-R''_{t^2}(x,t)=2\,R(x,t)\frac{d}{dx}R(x,x) \qquad (6)$$

с условием $R(x,0)=0$, которое мы используем для нечетного продолжения $R(x,t)$ на отрицательные t $(-x\leq t<0)$. Таким образом, наша задача свелась к нахождению решения уравнения (6) такого, чтобы $\varphi(x,\kappa)$, определенное по формуле (2), имело асимптотический вид (5). Найдя такое $R(x,t)$, мы с помощью соотношения (4') найдем и $V(x)$. Решением этой задачи мы и займемся. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $V(x)$ непрерывна.

2. Случай финитного потенциала

Пусть при $x\geq x_0$ $V(x)\equiv 0$. Тогда согласно (3) $R(x,t)$ удовлетворяет при $x\geq x_0$ уравнению

$$R''_{x^2}(x,t)-R''_{t^2}(x,t)=0 \qquad (7)$$

и, следовательно, при $x\geq x_0$

$$R(x,t)=f_1(x-t)+f_2(x+t).$$

Из условия (4) следует, что $f_2(x)=-f_1(x)$, т.е.

$$R(x,t)=f(x-t)-f(x+t), \qquad (8)$$

где $f(x)=f_1(x)$. Из условия (4') следует, что при $\xi\geq 2x_0$ (т.е. при $x+t\geq 2x_0$ или $x-t\geq 2x_0$) $f'(\xi)\equiv 0$. Пользуясь последним замечанием, мы получаем, что при $x+t\geq 2x_0$

$$R'_x(x,t)=-R'_t(x,t), \qquad (9)$$

а при $x-t\geq 2x_0$

$$R'_x(x,t)=R'_t(x,t) \qquad (9')$$

Таким образом, определив $R(2x_0,t)$, мы легко находим, что

$$R(x_0,t) = R(2x_0, x_0+t) - R(2x_0, x_0-t)\,, \tag{10}$$

$$R'_x(x_0,t) = -\frac{d}{dt}\left[R(2x_0, x_0+t) + R(2x_0, x_0-t)\right], \tag{10'}$$

и наша задача сводится к решению задачи Коши для уравнения (6) в треугольнике, ограниченном прямыми $x=t$, $x=-t$ и $x=x_0$.

3. Определение $R(2x_0,t)$ и задача Коши

Пусть при $x \geqslant x_0$ $V(x) \equiv 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$ асимптотическое равенство (5) перейдет в точное, т.е. при $x \geqslant x_0$

$$\sin \kappa x + \int_0^x R(x,t)\sin \kappa t\,dt = A(\kappa)\sin(\kappa x + \delta(\kappa)). \tag{11}$$

Дифференцируя (2) по x и пользуясь (9), мы легко получаем, что при $x \geqslant 2x_0$

$$\varphi'(x,\kappa) = \kappa\left(\cos \kappa x + \int_0^x R(x,t)\cos \kappa t\,dt\right). \tag{12}$$

Из (5) имеем при $x \geqslant x_0$:

$$\varphi'(x,\kappa) = \kappa A(\kappa)\cos(\kappa x + \delta(\kappa)),$$

т.е. при $x \geqslant 2x_0$

$$\cos \kappa x + \int_0^x R(x,t)\cos \kappa t\,dt = A(\kappa)\cos(\kappa x + \delta(\kappa)). \tag{13}$$

Таким образом, формулы (11) и (13) дают нам возможность, зная $\delta(\kappa)$, определить преобразование Фурье от $R(x,t)$ при $x \geqslant 2x_0$. Отсюда, пользуясь соотношениями (10) и (10'), находим, что для $\kappa_n = n\frac{\pi}{x_0}$, где n - целое,

$$\int_{-x_0}^{x_0} R(x_0,t)\sin \kappa_n t\,dt = (-1)^n\, 2\, A(\kappa_n)\sin \delta(\kappa_n), \tag{14}$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} R(x_0,t)\cos \kappa_n t\,dt = 0, \tag{14'}$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} R'_x(x_0,t)\sin \kappa_n t\,dt = (-1)^{n+1}\, 2\kappa_n\left(A(\kappa_n)\cos \delta(\kappa_n) - 1\right), \tag{15}$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} R'_x(x_0,t)\cos \kappa_n t\,dt = 0. \tag{15'}$$

Таким образом по $\delta(\kappa)$ мы можем вычислить коэффициенты Фурье от начальных данных на отрезке $-x_0 \leqslant t \leqslant x_0$ прямой $x = x_0$. Продолжим наши данные периодически с периодом $2x_0$ на всю прямую $x = x_0$ и применим к решению уравнения (6) с начальными данными (14), (14'), (15) и (15') метод Фурье. Предварительно сделаем замену:

$$\xi = \frac{\pi}{x_0}x\,,\quad \tau = \frac{\pi}{x_0}t\,,\quad R(\xi,\tau) = \frac{x_0}{\pi}R(x,t).$$

Нетрудно проверить, что $R(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$R''_{\xi^2}(\xi,\tau) - R''_{\tau^2}(\xi,\tau) = 2R(\xi,\tau)\frac{d}{d\xi}R(\xi,\xi) \tag{16}$$

с начальными данными на прямой $\xi=\pi$:

$$R(\pi,\tau) = \frac{x_0}{\pi} R(x_0,t), \tag{17}$$

$$R'_\xi(\pi,\tau) = \frac{x_0^2}{\pi^2} R'_x(x_0,t). \tag{17'}$$

Будем искать $R(\xi,\tau)$ в виде:

$$R(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi) \sin n\xi . \tag{18}$$

Продифференцировав (18) формально и подставив в (16), получим для определения $a_n(\xi)$ систему уравнений:

$$a_n''(\xi) + n^2 a_n(\xi) = 2a_n(\xi)\frac{d}{d\xi}\sum_{p=1}^{\infty} a_p(\xi)\sin p\xi . \tag{19}$$

Пользуясь (14), (15), (17) и (17'), находим, что

$$a_n(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\pi,\tau)\sin n\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-x_0}^{x_0} R(x_0,t)\sin \kappa_n t\, dt = (-1)^n \frac{2}{\pi} A(\kappa_n)\sin\delta(\kappa_n)$$

и

$$a_n'(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_\xi'(\pi,\tau)\sin n\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{x_0}{\pi^2}\int_{-x_0}^{x_0} R_x'(x_0,t)\sin \kappa_n t\, dt = (-1)^{n+1}\frac{2\kappa_n x_0}{\pi^2}\left(A(\kappa_n)\cos\delta(\kappa_n) - 1\right).$$

Заменяя κ_n на $n\frac{\pi}{x_0}$, получаем:

$$a_n(\pi) = (-1)^n \frac{2}{\pi} A\left(n\frac{\pi}{x_0}\right)\sin\delta\left(n\frac{\pi}{x_0}\right), \tag{20}$$

$$a_n'(\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2n}{\pi}\left\{A\left(n\frac{\pi}{x_0}\right)\cos\delta\left(n\frac{\pi}{x_0}\right) - 1\right\}, \tag{20'}$$

и наша задача свелась к решению системы (19) с начальными данными (20) и (20').

Заметим сразу, что равенство (9) при $x=2x_0$ и $t>0$ справедливо также и в случае, когда $V(x)\equiv 0$ при $x>x_0$, а в точке x_0 имеет разрыв первого рода (например, прямоугольная потенциальная яма). Следовательно, и в этом случае сохраняет свою силу равенство (13). Нетрудно проверить, что сохраняют свою силу в этом случае и равенства (10) и (10'). Следовательно, и в этом случае мы можем применить метод Фурье и свести задачу к решению системы (19) с начальными данными (20) и (20'). Особенность этого случая должна найти свое отражение в асимптотике для $\delta(\kappa)$ при больших κ.

4. Связь между $V(x)$ и $\delta(\kappa)$

Как известно, решение уравнения (1) с начальными данными (1') удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\varphi(x,\kappa) = \sin\kappa x + \frac{1}{\kappa}\int_0^x V(\xi)\sin\kappa(x-\xi)\,\varphi(\xi,\kappa)\,d\xi. \tag{21}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi(x,\kappa) = \sin\kappa x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^n} Q_n(x,\kappa), \tag{22}$$

где

$$Q_n(x,\kappa) = \int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} V(x_1)\cdots V(x_n)\sin\kappa(x-x_1)\cdots\sin\kappa(x_{n-1}-x_n)\sin\kappa x_n\,dx_1\cdots dx_n .$$

Легко видеть, что

$$|Q_n(x,\kappa)| \leq \int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} |V(x_1)\cdots V(x_n)|\,dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^x |V(\xi)|\,d\xi\right)^n,$$

и, следовательно, ряд (22) при любом $\kappa\neq 0$ сходится равномерно на любом отрезке $[0,x]$. Если же дополнительно $\int_0^\infty |V(\xi)|\,d\xi < \infty$, то при любом $\kappa\neq 0$ ряд (22) сходится равномерно на всей полупрямой $[0,\infty)$.

Пусть при $x > x_0$ $V(x)\equiv 0$. Тогда согласно (22) при $x \geqslant x_0$

$$\varphi(x,\kappa) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^n}\Phi_n(\kappa)\right)\sin\kappa x + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^n}\Psi_n(\kappa)\right)\cos\kappa x, \tag{23}$$

где

$$\Phi_n(\kappa) = \int_0^{x_0}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} V(x_1)\cdots V(x_n)\cos\kappa x_1\sin\kappa(x_1-x_2)\cdots\sin\kappa(x_{n-1}-x_n)\sin\kappa x_n\,dx_1\cdots dx_n, \tag{24}$$

а

$$\Psi_n(\kappa) = -\int_0^{x_0}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} V(x_1)\cdots V(x_n)\sin\kappa x_1\sin\kappa(x_1-x_2)\cdots\sin\kappa(x_{n-1}-x_n)\sin\kappa x_n\,dx_1\cdots dx_n. \tag{25}$$

Сравнивая (23) с (5), которое в случае $V(x)\equiv 0$ при $x>x_0$ переходит при $x\geqslant x_0$ в точное равенство, имеем:

$$A(\kappa)\cos\delta(\kappa) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^n}\Phi_n(\kappa), \tag{26}$$

$$A(\kappa)\sin\delta(\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^n}\Psi_n(\kappa). \tag{27}$$

Последние формулы будут справедливы и в том случае, если $x_0=\infty$, а $\int_0^\infty |V(\xi)|\,d\xi < \infty$. В этом случае $\varphi(x,\kappa)$ допускает представление:

$$\varphi(x,\kappa) = A(\kappa,x)\sin(\kappa x + \delta(\kappa,x)).$$

Положим $A(\kappa) = \lim_{x\to\infty} A(\kappa,x)$ и $\delta(\kappa) = \lim_{x\to\infty}\delta(\kappa,x)$. Если $\int_0^\infty |V(\xi)|\,d\xi<\infty$, то эти пределы существуют. Полагая в формулах (24) и (25) $x_0=\infty$, мы получим такие $\Phi_n(\kappa)$ и $\Psi_n(\kappa)$, что равенства (26) и (27) сохраняют свою силу. Если предположить дополнительно, что $\int_0^\infty \xi|V(\xi)|\,d\xi<\infty$, то легко показать, что при малых κ

$$|\Phi_n(\kappa)| \leq \frac{\kappa^n}{n!}C^n, \quad a \quad |\Psi_n(\kappa)| \leq \frac{\kappa^n o(\kappa)}{n!}C^n,$$

где C – некоторая постоянная, а $o(\kappa)\to 0$ при $\kappa\to 0$ и не зависит от n. Отсюда следует, что правая часть равенства (27) стремится к нулю при $\kappa\to 0$, а правая часть равенства (26) ограничена в окрестности точки $\kappa = 0$. Легко можно показать, что при $\kappa\to 0$ правая часть равенства (26) стремится к некоторому пределу. Отсюда легко следует, что $A(\kappa)$ и $\delta(\kappa)$ есть непрерывные функции κ. Если предположить дополнительно, что

$$\int_0^\infty \xi^\ell |V(\xi)|\,d\xi < \infty \quad \text{для} \quad \ell = 0,1,\dots,m+1, \quad \text{то}$$

легко показать, что при $k>0$ $A(k)\cos\delta(k)$ и $A(k)\sin\delta(k)$ имеют непрерывные производные до порядка m. Выражения для них находятся с помощью соответствующих предельных переходов в правых частях равенств (26) и (27).

Найдем асимптотическое выражение для $\delta(k)$ при больших k, предполагая, что $\int\limits_0^\infty |V(\xi)|d\xi<\infty$. Из формул (24) и (25) видно, что $\Phi_n(k)$ и $\Psi_n(k)$ при фиксированном n есть ограниченные функции k. Поэтому первые члены асимптотики $\delta(k)$ будут определяться первыми $\Phi_n(k)$ и $\Psi_n(k)$. Найдем для них явное выражение. Будем считать, что $V(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, $V'(x)\to 0$ при $x\to\infty$, $\int\limits_0^\infty |V'(x)|dx<\infty$ и $\int\limits_0^\infty |V''(x)|dx<\infty$. Разделив выражение (25) на (26), получим, что

$$tg\,\delta(k)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\Psi_n(k)}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\Phi_n(k)}. \tag{28}$$

Отсюда находим, что при больших k

$$\delta(k)=-m\pi+\frac{C_1}{k}+\frac{C_2}{k^3}+\frac{o(\frac{1}{k})}{k^3}, \tag{29}$$

где $C_1=-\frac{1}{2}\int\limits^{\infty}V(x)dx$, $C_2=-\frac{V'(0)}{8}$, m – целое, а $o(\frac{1}{k})\to 0$ при $k\to\infty$. Если же $V(x)$ или $V'(x)$ имеет конечное число разрывов первого рода, то в асимптотике для $\delta(k)$ появится дополнительно конечная сумма членов типа

$\frac{A_s}{k^2}\sin 2kx_s$ или $\frac{B_s}{k^3}\cos 2kx_s'$, где x_s – есть точка разрыва $V(x)$, а x_s' – $V'(x)$. Коэффициент A_s пропорционален $V(x_s+0)-V(x_s-0)$, а B_s – $V'(x_s'+0)-V'(x_s'-0)$.

5. Вычисление C_1

Пользуясь соотношением (4'), находим, что $C_1=-\lim\limits_{x\to\infty}R(x,x)$. Возьмем произвольное $x_0>0$. Тогда мы можем написать, что

$$R(2x_0,t)=\frac{A_0(x_0)}{2x_0}+\frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(x_0)\cos n\frac{\pi}{x_0}t+B_n(x_0)\sin n\frac{\pi}{x_0}t\right),$$

где

$$A_n(x_0)=\int\limits_0^{2x_0}R(2x_0,t)\cos n\frac{\pi}{x_0}t\,dt,\quad B_n(x_0)=\int\limits_0^{2x_0}R(2x_0,t)\sin n\frac{\pi}{x_0}t\,dt.$$

Известно, что в точке разрыва первого рода ряд Фурье сходится к полусумме значений функции справа и слева от точки разрыва. В нашем случае получается, что

$$R(2x_0,2x_0)=\frac{2}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x_0)-\frac{1}{x_0}B_0(x_0), \tag{30}$$

так как $R(2x_0,0)=0$.

Устремляя x_0 к бесконечности, мы легко получаем, что сумма, стоящая в правой части равенства (30) формально стремится к выражению

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{A(k)\cos\delta(k)-1\right\}dk.$$

Нетрудно показать, что этот предельный переход является оправданным. Таким образом, мы получили следующее выражение для C_1 :

$$C_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{A(\kappa)\cos\delta(\kappa) - 1\}\, d\kappa . \tag{31}$$

Используя равенство (26), легко устанавливаем, что интеграл в правой части равенства (31) является достаточно хорошо сходящимся.

Пусть $A(\kappa)$ и $\delta(\kappa)$ известны до какого-то κ_{max}. Полагая $C_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\kappa_{max}} \{A(\kappa)\cos\delta(\kappa) - 1\}\, d\kappa$, мы совершим ошибку в определении C_1, равную $-\frac{2}{\pi}\int_{\kappa_{max}}^\infty \{A(\kappa)\cos\delta(\kappa) - 1\}\, d\kappa$. Как будет видно из дальнейшего, ошибка в определении $V(x)$ и $\varphi(x,\kappa)$ будет иметь порядок величины $\frac{2}{\pi}\int_{\kappa_{max}}^\infty \{A(\kappa)\cos\delta(\kappa) - 1\}\, d\kappa$. Поэтому для того, чтобы ошибка в определении $V(x)$ и $\varphi(x,\kappa)$ была малой, необходимо, чтобы величина $\frac{2}{\pi}\int_{\kappa_{max}}^\infty \{A(\kappa)\cos\delta(\kappa) - 1\}\, d\kappa$ была малой.

6. Связь между $A(\kappa)$, $\delta(\kappa)$ и связанными состояниями*)

Рассмотрим сначала случай финитного потенциала. Умножим (II) на i и сложим с (I3). Получим, что при $x \geq 2x_0$ и κ действительном

$$e^{i\kappa x} + \int_0^x R(x,t)\, e^{i\kappa t} dt = A(\kappa)\, e^{i\kappa x} e^{i\delta(\kappa)}$$

Отсюда непосредственно имеем:

$$1 + \int_0^x R(x,t)\, e^{i\kappa(t-x)} dt = A(\kappa)\, e^{i\delta(\kappa)} \tag{32}$$

при $x \geq 2x_0$ и κ действительном.

Пусть $G(\kappa) = 1 + \int_0^{2x_0} R(2x_0,t)\, e^{i\kappa(t-2x_0)} dt$. Нетрудно видеть, что $G(\kappa)$ аналитична в нижней полуплоскости комплексного переменного. Из того, что

$$G(\kappa) = \left\{ i\varphi(2x_0,\kappa) + \frac{\varphi'(2x_0,\kappa)}{\kappa} \right\} e^{-i2\kappa x_0}$$

легко следует, что в нижней полуплоскости $G(\kappa)$ имеет только конечное число нулей. Действительно, всякому нулю κ_0 функции $G(\kappa)$, лежащему в нижней полуплоскости, отвечает собственная функция уравнения (I), имеющая при $x > x_0$ вид:

$$\varphi(x,\kappa) = C e^{-i\kappa_0 x},$$

и, следовательно, принадлежащая $L_2(0,\infty)$. Так как в случае финитного потенциала уравнение (I) имеет только конечное число собственных функций, принадлежащих $L_2(0,\infty)$, то наше утверждение доказано. Из самосопряженности уравнения Шредингера следует, что κ_0^2 есть действительное число. Так как при $\kappa_0^2 > 0$ собственные функции не обладают интегрируемым квадратом, то $\kappa_0^2 \leq 0$. Случай, когда $\kappa_0 = 0$ есть нуль функции $G(\kappa)$, требует особого рассмотрения, так как в этом случае сколь угодно малым изменением потенциала можно добиться появления нового дискретного уровня. Предельная фаза в этом случае также ведет себя особым образом. Таким образом, исключив

---

*) При написании этого пункта существенную помощь оказал мне Л.А.Чудов и его работа/5/.

случай, когда $G(0)=0$, мы установили, что в рассматриваемом случае $G(k)$ имеет в нижней полуплоскости конечное число чисто мнимых нулей и не обращается в нуль на действительной оси. Следовательно, и $A(k)$ на действительной оси не обращается в нуль. Отсюда, используя формулу (27), находим, что $\sin\delta(0)=0$, т.е. $\delta(0)$ кратно π. Изменением, если нужно, знака у $A(k)$ мы всегда можем добиться того, чтобы $\delta(0)$ можно было выбрать равным нулю. Тогда, применяя равенства (26) и (27), находим, что на действительной оси $\delta(k)$ нечетная, а $A(k)$ – четная функция.

На действительной оси $A(k)$ действительна. Следовательно, на действительной оси либо $A(k)=|G(k)|$ либо $A(k)=-|G(k)|$. Выясним, какая из этих возможностей имеет место на самом деле. Из равенства (26) имеем, что

$$A(k)\cos\delta(k)\to 1 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Так как согласно (29) $\delta(k)\to -m\pi$ при $k\to\infty$, то $A(k)\to(-1)^m$ при $k\to\infty$, т.е. справедливо соотношение

$$A(k)=(-1)^m\,|G(k)|, \tag{33}$$

где $m=-\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\delta(k)}{\pi}$, а выбор $\delta(k)$ произведен так, что $\delta(0)=0$. Определим смысл m в формуле (29). Воспользуемся для этого теоремой о связи между числом нулей внутри замкнутого контура аналитической функции $G(k)$ и изменением ее аргумента вдоль этого контура (см./6/, § 23). За контур интегрирования C_R примем кривую, состоящую из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и нижней половины окружности $|k|=R$. Возьмем R настолько большим, чтобы внутрь нашего контура попали все нули функции $G(k)$, лежащие в нижней полуплоскости, и перейдем к пределу при $R\to\infty$. Тогда с помощью элементарных вычислений получаем, что число нулей N функции $G(k)$, лежащих в нижней полуплоскости, связано с $\delta(k)$ следующим соотношением:

$$2\pi N=\delta(-\infty)-\delta(\infty)=-2\delta(\infty).$$

Сравнивая полученное равенство с формулой (29), получаем, что $m=N$. Так как $N\geq 0$, то и $m\geq 0$.

Обозначим через $-i\varkappa_s$ $(\varkappa_s>0,\ s=1,\dots,m)$ нули функции $G(k)$, лежащие в нижней полуплоскости. Тогда $k^2=-\varkappa_s^2$ – дискретные собственные значения уравнения (I). Пусть

$$\widetilde{G}(k)=G(k)\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{i\varkappa_s-k}{i\varkappa_s+k}\right). \tag{34}$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{G}(k)$ аналитична в нижней полуплоскости и не обращается в ней в нуль. Поэтому функция

$$\mathcal{F}(k)=\ln\widetilde{G}(k)=\ln|\widetilde{G}(k)|+i\arg\widetilde{G}(k)$$

будет также аналитичной всюду в нижней полуплоскости. Из определения функции $\mathcal{F}(k)$ следует, что при больших k $|\mathcal{F}(k)|<\frac{C}{|k|}$, где C – постоянная. Следовательно, для функции $\mathcal{F}(k)$ может быть написано так называемое дисперсионное соотношение (см./7/, § 46), связывающее значения действительной и мнимой части функции $\mathcal{F}(k)$ на действительной оси:

$$\ln|\widetilde{G}(k)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arg\widetilde{G}(k')}{k-k'}\,dk',$$

т.е.

$$|\widetilde{G}(k)|=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arg\widetilde{G}(k')}{k-k'}\,dk'\right\}.$$

Используя (32), (33), (34) и определение функции $G(k)$, получим, что на действительной оси

$$b_n''(\xi) + n^2 b_n(\xi) = 2\left\{ b_n(\xi) + \frac{2C_1 X_0 n}{X_0^2+\pi^2 n^2}\cos n\xi + \frac{1}{\pi}\frac{X_0^2(C_1^2-2\alpha_1)}{X_0^2+\pi^2 n^2}\sin n\xi \right\}\cdot \tag{38}$$

$$\cdot\frac{d}{d\xi}\sum_{p=1}^{\infty}\left(b_p(\xi)\sin p\xi + \frac{C_1 X_0 p}{X_0^2+\pi^2 p^2}\sin 2p\xi + \frac{1}{\pi}\frac{X_0^2(C_1^2-2\alpha_1)}{X_0^2+\pi^2 p^2}\sin^2 p\xi\right).$$

О системе (38) необходимо заметить следующее. При почленном дифференцировании ряда $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{C_1 X_0 p}{X_0^2+\pi^2 p^2}\sin 2p\xi$ возникает ряд, имеющий две δ – образные особенности, одну в точке $\xi = 0$, другую в точке $\xi=\pi$. Это связано с тем, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{C_1 X_0 p}{X_0^2+\pi^2 p^2}\sin 2p\xi$$

является рядом Фурье некоторой гладкой периодической функции, имеющий разрывы первого рода в точках $\xi=n\pi$ (n – целое). Непрерывность $a_n(\xi)$ и $a_n'(\xi)$ в точке $\xi=\pi$ и $\xi = 0$ требует, чтобы эти особенности были исключены. Это показывает недостаточность формального подхода при выводе системы (I9), однако, других дефектов этот вывод не имеет. Из равенств (37) и (37') видно, что при больших n

$$b_n(\pi) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad и \quad b_n'(\pi) = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Для первых $M=\left[\frac{X_0 K_{max}}{\pi}\right]$ значений n мы можем определить $b_n(\pi)$ и $b_n'(\pi)$, и, положив $b_n(\pi) = b_n'(\pi)=0$ при $n>M$, решить обрезанную систему. При фиксированном X_0 ошибка в определении $b_n(\xi)$ будет зависеть от M и при $M\to\infty$ (т.е. $K_{max}\to\infty$) будет стремиться к нулю. Из вида системы (38) ясно, что решение этой системы зависит непрерывно от C_1 и α_1. Система (38) позволяет оценить ошибку в определении $b_n(\xi)$ и, следовательно, в определении $R(x,t)$, связанную с погрешностями в определении фазы.

Литература

I. И.М.Гельфанд и Б.М.Левитан, ДАН СССР 77, № 4 (I95I).
2. И.М.Гельфанд и Б.М.Левитан, Изв. АН СССР, сер.матем., I5, № 4 (I95I).
3. М.Г.Крейн, ДАН СССР I05, № 3 (I955).
4. В.А.Марченко, ДАН СССР I04, № 5 (I955).
5. Л.А.Чудов – Об одном методе восстановления комплексного финитного потенциала по предельной фазе, препринт ОИЯИ, I958 г.
6. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат – Методы теории функций комплексного переменного, Госиздат физ.мат.литературы, Москва, I958 г.
7. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, – Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, Москва, I957.

Работа поступила в издательский отдел 25 ноября I958 года.