ЖЭТФ, 1967, т. 37, в 6, с 1177-1180

18/V

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2648

Э.А. Перельштейн

К КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

P - 2648

Э.А. Перельштейн

К КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Квазилинейная теория различных по физической природе апериодических неустойчивостей в некоторых случаях [1-3] позволяет проследить развитие неустойчивости во времени вплоть до установления конечного стационарного состояния.

Общим для указанных выше работ является асимптотическое уравнение для фоновой функции распределения f, которое описывает процесс диффузии в пространстве скоростей x,

$$\frac{\partial f}{\partial W} = A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right), \tag{1}$$

где W -энергия электромагнитного поля, возникающего при неустойчивости, A - численная постоянная. Это уравнение решается при выбранном начальном условии $f\big|_{W=0} = f_0$.

Необходимое условие существования конечного стационарного состояния, следующее из дисперсионного уравнения квазилинейной теории [1-3], записывается в виде

$$\frac{\partial I}{\partial W}\bigg|_{W=W^{\infty}} > 0 , \tag{2}$$

здесь $I(W) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx$, W^{∞} -энергия электромагнитного поля в предельном стационарном состоянии.

Уравнение (2) должно выполняться вместе с ограничениями квазилинейной теории.

В перечисленных работах, где в качестве начальной функции распределения выбиралось максвелловское распределение, условие (2) выполнялось. Однако в случае произвольного начального распределения выполнение неравенства (2) заранее не очевидно. Более того, как будет видно из последующего изложения, оказывается, что даже качественные результаты квазилинейной теории апериодических неустойчивостей зависят от вида начальной функции распределения.

1. При нахождении решения уравнения (1) воспользуемся одним общим выводом работ [1-3], где показано, что при развитии неустойчивости четность функции распределения по x сохраняется. Кроме того, начальное распределение выбирается четным. Благодаря этому, четное решение уравнения (1) можно представить, используя преобразование Фурье-Бесселя [4] в виде:

$$f = x^{3/2}\int_0^\infty J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{A}}u\right)\phi(u)e^{-Wu^2}u\,du\,. \tag{3}$$

Используя начальное условие, с помощью обратного преобразования Фурье-Бесселя получим

$$\phi(u) = \frac{1}{2A}\int_0^\infty x^{3/2} J_{-3/4}\left(\frac{x}{2\sqrt{A}}u\right)f_0(x)\,dx\,. \tag{4}$$

Следует отметить, что применение преобразования Фурье-Бесселя накладывает определенные ограничения на выбор начальной функции распределения /4/.

Окончательно функцию распределения f можно записать в виде

$$f = \frac{x^{3/2}}{2A}\int_0^\infty u\,du\int_0^\infty x'^{3/2} J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{A}}u\right)J_{-3/4}\left(\frac{x'^2}{2\sqrt{A}}u\right)e^{-Wu^2} f_0(x')\,dx'\,, \tag{5}$$

или после интегрирования по u

$$f = \frac{x^{3/2}e^{-\frac{x^4}{16WA}}}{4AW}\int_0^\infty x'^{3/2}e^{-\frac{x'^4}{16WA}} I_{-3/4}\left(\frac{x^2x'^2}{8AW}\right)f_0(x')\,dx'\,. \tag{6}$$

2. Выяснить зависимость выполнения неравенства (2) от начальной функции распределения в общем виде представляется затруднительным. Поэтому ограничимся иллюстративными примерами, отражающими суть вопроса.

Подставляя в формулу (5) начальное распределение в виде максвелловского $f_0 = Be^{-\frac{x^2}{x_0^2}}$, легко получить

$$f = \frac{B\Gamma(3/2)x^{3/2}}{2^{3/2}A^{5/8}x_0^2\Gamma(5/4)}\int_0^\infty u^{1/4} J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{A}}u\right)\frac{e^{-Wu^2}}{\left(\frac{1}{x_0^4}+\frac{u^2}{4A}\right)^{3/4}}du \tag{7}$$

и интеграл

$$I(W) = -\frac{B\Gamma(3/2)\Gamma(3/4)}{x_0\Gamma(5/4)}\Psi\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\frac{4WA}{x_0^4}\right), \tag{8}$$

где $\Psi(\frac{1}{2},\frac{3}{4},x)$ –вырожденная гипергеометрическая функция /5/.

Используя малый параметр $\left(\frac{4WA}{x_0^4}\right) \ll 1$, необходимый для построения квазилинейной теории, приведем первые два члена разложения $I(W)$ в ряд

$$I \approx -\frac{2B\sqrt{\pi}}{x_0} + \frac{8B[\Gamma(3/4)]^2}{\Gamma(1/4)\,x_0}\left(\frac{4WA}{x_0^4}\right)^{1/4} . \tag{9}$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в работе /1/.

Далее, поскольку довольно простым начальным распределением в виде "ступеньки"

$$f_0 = n\sigma(x_1 + x)\,\sigma(x_1 - x) \tag{10}$$

(где $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$, n – нормировочная постоянная) воспользоваться нельзя из-за нарушения условия адиабатичности квазилинейного метода, выберем в качестве начальной функции распределения функцию, в которую переходит "ступенчатая" в процессе диффузии в момент времени $t(W_0)$:

$$f_0 = \frac{n x^{3/2} x_1^{1/4}}{2A^{1/4}} \int_0^\infty J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{A}}u\right) J_{1/4}\left(\frac{x_1^2}{2\sqrt{A}}u\right) e^{-W_0 u^2} du . \tag{11}$$

Тогда решение уравнения (1) с начальным условием (11) можно записать в виде

$$f = \frac{n x^{3/2} x_1^{1/4}}{2A^{1/4}} \int_0^\infty J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{A}}u\right) J_{1/4}\left(\frac{x_1^2}{2\sqrt{A}}u\right) e^{-(W_0+W)u^2} du . \tag{12}$$

При достаточно больших W_0 (см. приложение) условие адиабатичности выполняется в области $x \lesssim x_1$, которая дает основной вклад в интеграл $I(W)$.

Вычисление $I(W)$ при подстановке в него функции распределения из формулы (12) дает

$$I = \frac{-2n}{x_1}\left[\phi\left(\frac{x_1^4}{16A(W_0+W)}\right) + 1\right], \tag{13}$$

где

$$\phi(z) = \frac{z^{1/4}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} e^{-z}\,\Phi(3/4, 5/4, z) - 1 ,$$

$\Phi(3/4, 5/4, z)$ –вырожденная гипергеометрическая функция /5/. График функции $\phi(z)$ представлен на рис. 1. Из него непосредственно видно, что условие (2) выполняется лишь при значениях параметра $z_0 = \frac{x_1^4}{16AW_0}$, лежащих слева от точки максимума $\phi(z)$. Условие адиабатичности ограничивает допустимые значения $z^\infty \lesssim z_0$ (см. приложение). При выполнении этих условий неустойчивость закрывается. Таким образом, выбор начальной функции распределения оказывается существенным даже для качественных выводов квазилинейной теории апериодических неустойчивостей.

Автор благодарен Я.Б.Файнбергу, В.Д. Шапиро, М.Л. Иовновичу и В.Г. Маханькову за интерес к работе и ценные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Адиабатичность изменения фоновой функции распределения в квазилинейной теории определяется, во-первых, малостью начального инкремента неустойчивости γ_0 и достаточно большим среднеквадратичным разбросом скоростей частиц и, во-вторых, выполнением неравенства

$$\left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t}\right| \lesssim \gamma_0 . \qquad (П.1)$$

Учитывая далее, что явная зависимость f от времени заключается лишь в изменении электромагнитной энергии, и, кроме того, $\frac{dW}{dt} = 2\gamma W$, вместо (П.1) получим

$$\left|\frac{2\gamma W}{f}\frac{\partial f}{\partial W}\right| \lesssim \gamma_0 . \qquad (П.2)$$

Усилим это неравенство, требуя

$$\left|W\frac{\partial f}{\partial W}\right| \lesssim f . \qquad (П.3)$$

Перейдем теперь к исследованию этого неравенства в зависимости от величины W_0 в формуле (12) ($W_0 = 0$ в этой формуле соответствует выбору начального распределения в виде "ступеньки"). Представим асимптотическое выражение f в виде (6)

$$f = \frac{nx^{3/2} e^{-\frac{x^4}{16(W+W_0)A}}}{4A(W+W_0)} \int_0^{x_1} x'^{3/2} e^{-\frac{x'^4}{16(W+W_0)A}} I_{-3/4}\left(\frac{x^2 x'^2}{8A(W+W_0)}\right) dx' . \qquad (П.4)$$

Заменив экспоненту в подынтегральной функции ее минимальным значением, введем вспомогательную функцию

$$\phi = \frac{n e^{-\frac{x^4 - x_1^4}{16(W+W_0)A}} x_1^{1/2}}{x^{1/2}} I_{1/4}\left(\frac{x^2 x_1^2}{8A(W_0+W)}\right) . \qquad (П.5)$$

Очевидно, $\phi \le f$ и неравенство (П.3) можно усилить следующим образом:

$$\left|W\frac{\partial f}{\partial W}\right| \lesssim \phi . \qquad (П.6)$$

Выражение для $\frac{\partial f}{\partial W}$, не содержащее квадратур, можно получить, находя $\frac{\partial f}{\partial x}$ из (15) и используя затем уравнение (1).

Окончательно вместо (П.6) получаем следующее требование:

$$\frac{W x^4}{16 A (W_0 + W)^2} \left(1 - \frac{x_1^2\, I_{-1/4}\left(\frac{x^2 x_1^2}{8A(W + W_0)}\right)}{x^2\, I_{1/4}\left(\frac{x^2 x_1^2}{8A(W_0 + W)}\right)}\right) \leq 1 . \qquad (П.7)$$

Проанализируем выполнение этого неравенства, предполагая выполнение неравенства

$$\frac{x_1^4}{16 W_0 A} \ll 1 .$$

Нетрудно показать, что при этом в области $x \leq x_1$ условие (П.7) выполняется, если энергия электромагнитного поля W не возрастает значительно, а именно:

$$\frac{W}{W_0} < \frac{16 A W_0}{x_1^4} . \qquad (П.8)$$

Таким образом, из предыдущего рассмотрения исключается начальное распределение в виде "ступеньки". Далее, если параметры x_1 и W_0 выбраны таким образом, что $\frac{x_1^4}{16 W_0 A} \approx 1$, то в области $x \leq x_1$ неравенство (П.7) выполняется при условии

$$\frac{W}{W_0} < 1 . \qquad (П.9)$$

Из неравенства (П.7) также следует, что при выборе начальной функции распределения в виде (12) условие адиабатичности нарушается для $x \gg x_1$. Однако это нарушение несущественно, так как функция распределения в этой области экспоненциально убывает, область $x \gg x_1$ вносит пренебрежимо малый вклад в дисперсионный интеграл $I(W)$.

Заметим, кроме того, что начальный инкремент определяется независимыми параметрами x_1, W_0, n и малость его может быть достигнута для определенных x_1 и W_0 соответствующим выбором n.

Таким образом, оправдывается выбор параметра $\frac{x_1^4}{16 W_0 A}$ в двух указанных выше областях.

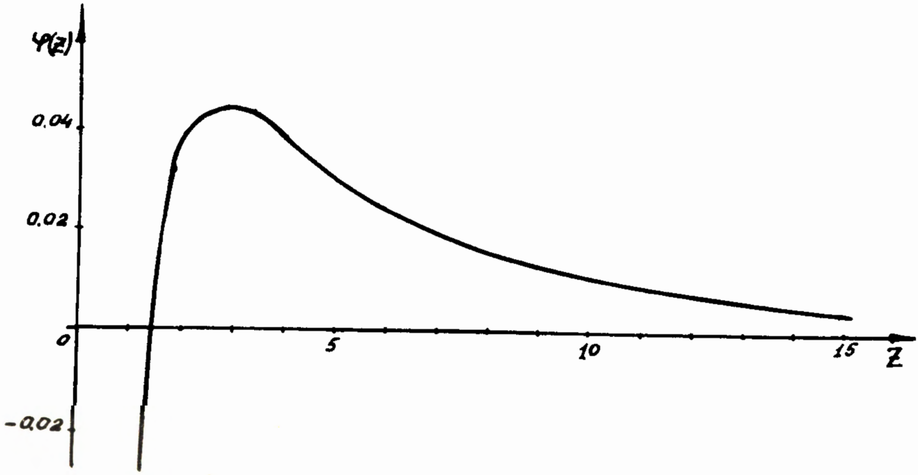
Литература

1. В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Киев, Наукова думка, 1965, т. 4, 175.
2. В.Г. Маханьков, В.И. Шевченко. Квазилинейная теория апериодических неустойчивостей при взаимодействии пучка с плазмой. Препринт ОИЯИ, Р- 1652, Дубна, 1964.
3. Э.А. Перельштейн. Квазилинейная теория эффекта отрицательной массы. Доклад на международной конференции по ускорителям, г. Фраскати, 1965.

4. Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi. Higher Tanscendental Function, New-York–Toronto–London. McGraw–Hill Book Company, INC., 1953, v.II.

5. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1966 г.



Р и с. 1.