ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2642

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РАССЕЯНИЕ ДВУХ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2642

Ч/99/2 ч.

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РАССЕЯНИЕ ДВУХ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

§ 1. Введение

В работе[1] авторов была установлена идентичность между уравнением

$$(1-\phi_t^2)\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} - (1+\phi_x^2)\phi_{tt} = 0\,, \tag{1}$$

описывающим нелинейное скалярное поле в двухмерном псевдоевклидовом пространстве x, t с лагранжианом типа Борна-Инфельда[2]

$$L = 1 - \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}\,, \tag{2}$$

и уравнением экстремальных поверхностей $z = \phi(x,t)$ (мыльные пленки) в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dz^2$, где площадь поверхности задается интегралом

$$S = -\iint(\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1)\,dx\,dt, \tag{3}$$

условия экстремума которого приводят также к уравнениям (1). Там же найдено решение задачи Коши для уравнения (1).

На основе этой аналогии было предложено обобщение лагранжиана (2) на случай нескольких нелинейных полей в двухмерном пространстве взаимодействующих определенным образом, причем эта система также допускает точное решение. Для этого рассмотрим проблему экстремальной двухмерной поверхности в $n+2$ — мерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sum_{i=1}^{n} dz_i^2$.

Пусть поверхность задана уравнениями

$$z_1 = \phi_1(x,t)\,, \quad z_2 = \phi_2(x,t)\,, \ldots z_n = \phi_n(x,t)\,. \tag{4}$$

Тогда площадь поверхности определяется интегралом

$$S = -\iint(\sqrt{(1+\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}^2)(1-\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,t}) + (\sum_{i=1}\phi_{i,x}\phi_{i,t})^2} - 1)\,dx\,dt\,. \tag{5}$$

Величину S мы можем интерпретировать как функцию действия системы n полей с плотностью лагранжиана

$$L = 1 - \sqrt{(1+\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}^2)(1-\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,t}^2)+(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t})^2}\ . \qquad (6)$$

Запишем уравнения движения для этой системы :

$$(1-\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,t}^2)\phi_{j,x,x}+2(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t})\phi_{j,x,t}-(1+\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}^2)\phi_{j,t,t} = 0\ . \qquad (7)$$

$$(j = 1,2,\dots n)$$

В работе /1/ была решена задача Коши для уравнения (7) для произвольного числа полей n. Именно, для начальных данных

$$\phi_i(x,t)\big|_{t=0} = a_i(x)\ ; \quad \phi_{i,t}(x,t)\big|_{t=0} = b_i(x) \qquad (8)$$

решение получено в параметрическом виде

$$t(\alpha,\beta) = \frac{\beta-\alpha}{2} + ½\int_{\alpha}^{\beta} H(\lambda)\,d\lambda\ ,$$

$$x(\alpha,\beta) = \frac{\beta+\alpha}{2} + ½\int_{\alpha}^{\beta} G(\lambda)\,d\lambda\ , \qquad (9)$$

$$\phi_i(\alpha,\beta) = \frac{a(\alpha)+a(\beta)}{2} + ½\int_{\alpha}^{\beta}\pi_i(\lambda)\,d\lambda\ .$$

Величины $\pi_i(x)$, $G(x)$, $H(x)$ в формулах (9) имеют важный физический смысл. $\pi_i(x)$ является каноническим импульсом поля $\phi_i(x,t)$ при $t=0$:

$$\pi_i(x) = \frac{\partial L}{\partial\phi_{i,t}}\Big|_{t=0} = \frac{b_i(x)[1+\sum_{i=1}^{n}a_i'^2(x) - a_i'(x)\sum_{i=1}^{n}a_i'(x)b_i(x)]}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}a_i'^2(x))(1-\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x))+(\sum_{i=1}^{n}a_i'(x)b_i(x))^2}}\ . \qquad (10)$$

$G(x)$ -плотность импульса системы полей с лагранжианом (6) при $t = 0$:

$$G(x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\phi_{i,t}}\phi_{i,x}\Big|_{t=0} = -\sum_{i=1}^{n}\pi_i(x)a_i(x) = \frac{-\sum_{i=1}^{n}a_i'(x)b_i(x)}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^{n}a_i'^2)(1-\sum_{i=1}^{n}b_i^2)+(\sum_{i=1}^{n}a_i'b_i)^2}}\ . \qquad (11)$$

Наконец, $H(x)$ является плотностью гамильтониана системы с лагранжианом (6):

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \phi_{i,t} - L\Big|_{b=0} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i'^2(x)}{\sqrt{(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i'^2)(1 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i)^2}} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (a_i'^2(x) + \pi_i^2(x)) + (\sum_{i=1}^{n} a_i'(x)\pi_i(x))^2} - 1 \quad . \qquad (12)$$

Мы покажем, что задача рассеяния двух плоских волн в электродинамике Борна-Инфельда сводится к нахождению решения уравнений (7) для $n = 2$.

§ 2. Решение задачи рассеяния

Рассмотрим уравнения электромагнитного поля в электродинамике Борна-Инфельда[2]. Лагранжиан этой системы имеет вид:

$$L = 1 - \sqrt{1 + F - G^2};$$

где

$$F = \tfrac{1}{2} f_{ik} f^{ik} \quad , \qquad G = \tfrac{1}{4} \epsilon^{sk\ell m} f_{sk} f_{\ell m} \quad , \qquad (13)$$

$\epsilon^{sk\ell m}$ – полностью антисимметричный тензор, $\epsilon^{1234} = \tfrac{1}{2}$,

$f_{i,k}$ – компоненты тензора электромагнитного поля.

Если ввести вектор-потенциал электромагнитного поля, то $f_{i,k} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$. ϕ подчиняется условию Лоренца $\frac{\partial \phi^k}{\partial x_k} = 0$. При варьировании по ϕ_i из (13) следуют уравнения для электромагнитного поля:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i}} \right) = 0 \qquad (k = 1,2,3,4) \qquad (14)$$

или

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^i} P^{ik} = 0 \, , \qquad \text{где} \qquad P^{ik} = \frac{f^{ik} - G\epsilon^{ik\ell m} f_{\ell m}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \quad .$$

Нетрудно проверить, что плоская волна произвольной формы $\phi_i(x,y,z,t) = \phi_i((\vec{k}\vec{r}) - |\vec{k}|t)$ является решением уравнений (14). Действительно, для плоской волны с четырех-импульсом k уравнения (14) принимают форму:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i \frac{\partial P^{i\ell}}{\partial s} = 0 \quad (\ell = 1,2,3,4), \quad \text{где} \quad s = (\vec{k}\vec{r}) - |\vec{k}|t \ . \tag{14а}$$

Условие Лоренца в этом случае записывается так ;

$$\sum_{i=1}^{4} k_i \frac{\partial \phi\ (s)}{\partial s} = 0 \ , \quad k^2 = 0 \ . \tag{14б}$$

Далее легко убедиться, что для плоской волны с учетом условий (14б) имеют место равенства $F = G = 0$. Таким образом, $P^{i\ell} = f^{i\ell}$, как в случае линейных уравнений Максвелла, и уравнение (14а) с учетом (14б) удовлетворяется:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i \frac{\partial}{\partial s} \left(k^i \frac{\partial \phi^\ell}{\partial s} - k^\ell \frac{\partial \phi^i}{\partial s} \right) = 0 \ .$$

Сумма двух плоских волн

$$\phi_i (x,y,z,t) = \phi_{1,i}(k_1^\ell x_\ell) + \phi_{2,i}(k_2^\ell x_\ell)$$

также удовлетворяет уравнениям (14) в пространственно-временной области, где они не перекрываются, т.е. в области, где одна из функций равна нулю.

Мы можем без ограничения общности считать, что эти волны движутся по оси x что достигается преобразованием Лоренца. Для этого направим ось времени по четырех-вектору $k_1 + k_2$, а ось x – по направлению $k_1 - k_2$, тогда в новой системе

$$(\vec{k}_1\vec{r}) - |k_1|t = \sqrt{\frac{(k_1 k_2)}{2}}(x' - t') \ ,$$

$$(\vec{k}_2\vec{r}) - |k_2|t = -\sqrt{\frac{(k_1 k_2)}{2}}(x' + t') \ .$$

Поскольку уравнения (14) и лагранжиан (13) инвариантны к преобразованиям Лоренца, то мы вправе сформулировать нашу задачу следующим образом.

Найти решение уравнений (14), удовлетворяющее следующим асимптотическим условиям. При $t \to -\infty$ решение должно переходить в две плоские волны, движущиеся навстречу друг другу ;

$$\lim_{u \to \infty} \phi_i (x,y,z,t) = \psi_{i,2}(v) \ , \quad \lim_{v \to -\infty} \phi_i (x,y,z,t) = \psi_{i,1}(u) \ ; \tag{15}$$

где $u = x - t$, $v = x + t$ — изотропные координаты.

Предельные значения вектор-потенциала также должны удовлетворять условию Лоренца, которое для них в переменных u, v имеет вид:

$$\frac{\partial\psi_{4,1}(u)}{\partial u} + \frac{\partial\psi_{1,1}(u)}{\partial u} = 0 ,$$

$$\frac{\partial\psi_{4,2}(v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi_{1,2}(v)}{\partial v} = 0 . \qquad (15a)$$

Чтобы удовлетворить условиям (15), будем искать решение уравнений (14), не зависящее от y и z, т.е. будем считать ϕ_i функциями только от двух переменных x, t. В этом случае уравнения (14) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi_1}{\partial t}}{L-1}\right) = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_4}{\partial x}}{L-1}\right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{-\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right)}{L-1} + \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}\right)}{L-1} = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{-\frac{\partial\phi_3}{\partial t} + \frac{\partial\phi_2}{\partial tx}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}\right)}{L-1} + \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}\right)}{L-1} = 0 . \qquad (16)$$

Из первых двух уравнений (16) сразу следует, что

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial x} - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = c(L-1) , \qquad c = \text{constant} . \qquad (17)$$

Условие Лоренца, когда ϕ зависит от x, t, связывает только ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x} = 0 \qquad (17a)$$

Складывая и вычитая (17) и (17a) и переходя к изотропным переменным u, v, получим

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial u} + \frac{\partial\phi_1}{\partial u} = c(L-1)\ ; \quad \frac{\partial\phi_4}{\partial v} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} = c(L-1)\ . \tag{18}$$

Теперь, если сравним уравнения (18) с (15а), в которые (18) должны соответственно переходить при $u \to -\infty$ и $v \to \infty$ согласно предельным условиям (15), мы видим, что необходимо для согласования с предельными значениями положить в (17) $c = 0$. С физической точки зрения это можно понять так. Величина $\dfrac{\frac{\partial\phi_4}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial t}}{L-1}$ в теории Борна-Инфельда есть x -компонента вектора электрической индукции $\vec{D}$. Согласно (17) она постоянна. Если $c \neq 0$, то, помимо плоской волны на бесконечности, существует постоянная продольная индукция, как если бы существовал конденсатор с раздвинутыми по x на бесконечность пластинами.

В случае $c = 0$ лагранжиан (13) принимает вид, совпадающий с (6) для двух полей, так как компоненты ϕ_4 и ϕ_1, когда поле зависит только от x и t, входят в L в комбинации $\dfrac{\partial\phi_4}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_1}{\partial t}$ и, следовательно, из-за (17) выпадают из L x/

$$L = 1 - \sqrt{(1 + \sum_{i=2}^{3} \phi_{i,x}^{2})(1 - \sum_{i=1}^{3} \phi_{i,t}^{2}) + (\sum_{i=2}^{3} \phi_{i,x}\phi_{i,t})^{2}}\ . \tag{19}$$

Два последних уравнения (16) для ϕ_2 и ϕ_3 совпадают с соответствующими уравнениями (7) при $j = 2,3$.

Таким образом, наша задача свелась к решению уравнения (7) с асимптотическими условиями (15).

Из решения задачи Коши (9) для начальных данных (8) мы можем получить искомое решение, удовлетворяющее (15).

Для этого исследуем асимптотическое поведение решения (9), устремляя $v \to -\infty$ при фиксированном u и $u \to \infty$ при фиксированном v. u и v -изотропные координаты (15). В обоих этих случаях $t = \frac{v-u}{2} \to -\infty$.

Примем далее, что $a_i'(x)$ и $b(x)$ достаточно быстро убывают на бесконечности.

Параметры α и β в (9) приспособлены к задаче Коши (8), для решения задачи о рассеянии плоских волн (15) более удобны другие параметры: $\mu = \mu(\alpha)$, $\nu = \nu(\beta)$. К ним мы приходим, рассматривая пределы выражений (9) при $\beta \to -\infty$ и при $\alpha \to \infty$.

---

x/ В случае $c \neq 0$ также можно исключить ϕ_1 и ϕ_4 из L и получить точное решение, в этом случае

$$1 - L = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\sqrt{(1 + \sum_{i=2}^{3} \phi_{i,x}^{2})(1 - \sum_{i=2}^{3} \phi_{i,t}) + (\sum_{i=2}^{3} \phi_{i,x}\phi_{i,t})^{2}}\ .$$

В первом случае из (9) получаем

$$\lim_{\beta\to-\infty} u = \lim(x-t) = \alpha + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\alpha}[H(\lambda)-G(\lambda)]\,d\lambda = \mu(\alpha),$$

$$\lim_{\beta\to-\infty} v = \lim_{\beta\to-\infty}(x+t) = -\infty, \qquad (20)$$

$$\lim_{\beta\to-\infty} \phi_1(\alpha,\beta) = \frac{a_1(\alpha)}{2} - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\alpha}\pi_1(\lambda)\,d\lambda = \psi_{1,1}(\mu).$$

Во втором случае

$$\lim_{\alpha\to\infty} u = \lim_{\alpha\to\infty}(x-t) = \infty,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} v = \lim_{\alpha\to\infty}(x+t) = \beta - \tfrac{1}{2}\int_{\beta}^{\infty}[H(\lambda)+G(\lambda)]\,d\lambda = \nu(\beta), \qquad (21)$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \phi(\alpha,\beta) = \frac{a_1(\beta)}{2} - \tfrac{1}{2}\int_{\beta}^{\infty}\pi_1(\lambda)\,d\lambda = \psi_{2,1}(\nu).$$

В дальнейшем будет показаню, что введенные здесь функции $\psi_{1,1}$ и $\psi_{2,1}$ совпадают с предельными значениями (15).

Этот факт уже следует из того, что $\mu=\mu(\alpha)$ и $\nu=\nu(\beta)$ –монотонно возрастающие функции, так как $H(\lambda) > G(\lambda)$, следовательно, преобразование от α, β к параметрам μ, ν взаимооднозначно, а мы видели (20) и (21), что при $\beta\to-\infty$ $v\to-\infty$ и $u\to-\infty$, когда $\alpha\to\infty$. Из (20), (21) и (9) следует, что

$$\phi_1(\alpha,\beta) = \psi_{1,1}(\mu) + \psi_{2,1}(\nu) + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\lambda)\,d\lambda. \qquad (22)$$

Величина $\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\lambda)\,d\lambda$ может быть выражена через предельные значения $\psi_{1,1}$ и $\psi_{2,1}$, так как из (20), (21) имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\psi_{2,1}(\nu) = 0, \qquad \lim_{\mu\to-\infty}\psi_{1,1}(\mu) = 0,$$

$$\lim_{\nu\to-\infty}\psi_{2,1}(\nu) = \lim_{\mu\to\infty}\psi_{1,1}(\mu) = \psi_{0,1} = -\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\lambda)\,d\lambda. \qquad (23)$$

При этом выводе учтено, что $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}\mu(\alpha) = \pm\infty$; $\lim\limits_{\beta\to\pm\infty}\nu(\beta) = \pm\infty$. Таким образом, можно записать

$$\phi_1(\mu,\nu) = \psi_{1,1}(\mu) + \psi_{2,1}(\nu) - \psi_{0,1} \quad . \tag{24}$$

Теперь остается выразить u и v как функции от μ, ν. Из определения функций $\mu(\alpha)$ и $\nu(\beta)$ в (20), (21) и выражений для u и v, следующих из (9),

$$\begin{aligned} u(\alpha,\beta) &= x-t = \alpha + \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [G(\lambda)-H(\lambda)]\,d\lambda \quad , \\ v(\alpha,\beta) &= x+t = \beta + \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [H(\lambda)+G(\lambda)]\,d\lambda \ , \end{aligned} \tag{25}$$

можем заключить, что

$$\begin{aligned} u &= \mu(\alpha) + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\beta}[G(\lambda)-H(\lambda)]\,d\lambda \quad , \\ v &= \nu(\beta) + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty}[G(\lambda)+H(\lambda)]\,d\lambda \quad . \end{aligned} \tag{26}$$

В первом из этих интегралов произведем замену переменных $\sigma = \nu(\lambda)$, а во втором $\sigma = \mu(\lambda)$. Так как согласно (20) и (21)

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = 1 + \frac{H(\lambda)-G(\lambda)}{2}\ , \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = 1 + \frac{H(\lambda)+G(\lambda)}{2} \quad ; \tag{27}$$

то

$$\begin{aligned} u &= \mu(\alpha) - \int_{-\infty}^{\nu(\beta)} \frac{H(\lambda) - G(\lambda)}{2 + H(\lambda) + G(\lambda)}\,d\sigma\ , \quad \sigma = \nu(\lambda) \ ; \\ v &= \nu(\beta) + \int_{\mu(\alpha)}^{\infty} \frac{H(\lambda)+G(\lambda)}{2 + H(\lambda) - G(\lambda)}\,d\sigma \quad , \quad \sigma = \mu(\lambda)\ . \end{aligned} \tag{28}$$

Для выражения величин, стоящих под интегралами (28), через $\psi_{1,1}$ и $\psi_{2,1}$ воспользуемся определением $\psi_{1,1}$ и $\psi_{2,1}$ в (20) и (21) и найдем

$$\frac{d\psi_{1,1}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{a_1'(\lambda) - \pi_1(\lambda)}{2 + H(\lambda) - G(\lambda)}\ , \quad \sigma = \mu(\lambda) \ ;$$

$$\frac{d\psi_{2,1}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{a_1'(\lambda) + \pi_1(\lambda)}{2 + H(\lambda) + G(\lambda)}\ , \quad \sigma = \nu(\lambda)\ .$$

Учитывая определение $G(\lambda)$ (12) и $H(\lambda)$ (11) легко определить, что

$$\sum_{i=2}^{3} \left(\frac{d\psi_{1,i}(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 = \frac{H(\lambda)+G(\lambda)}{2+H(\lambda)-G(\lambda)},$$

$$\sum_{i=2}^{3} \left(\frac{d\psi_{2,i}(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 = \frac{H(\lambda)-G(\lambda)}{2+H(\lambda)+G(\lambda)}. \tag{30}$$

Таким образом, получаем

$$u = \mu(\alpha) - \int_{-\infty}^{\nu(\beta)} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{2,i}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$v = \nu(\beta) + \int_{\mu(\alpha)}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\sigma)\,d\sigma. \tag{31}$$

В новых переменных μ, ν и начальных функциях $\psi_{1,i}$, $\psi_{2,i}$ окончательно решение представляется так:

$$\phi_i(\mu,\nu) = \psi_{1,i}(\mu) + \psi_{2,i}(\nu) - \psi_{0,i} \qquad (i = 2,3);$$

$$u = \mu - \int_{-\infty}^{\nu} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{2,i}(\sigma)\,d\sigma;$$

$$v = \nu + \int_{\mu}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\sigma)\,d\sigma. \tag{32}$$

Нетрудно доказать, что это решение удовлетворяет предельным условиям (15) и уравнениям (16). В самом деле, если выбрать калибровку так, что $\phi_4 = 0$, то из уравнения (17) с $c = 0$ и условия Лоренца (17а) имеем, что $\phi_1 = \mathrm{const}$, мы можем положить эту константу также равной нулю, тогда отличными от нуля остаются $\phi_2(x,t)$ и $\phi_3(x,t)$. Для них решение задано в параметрической форме (32), и при помощи прямой подстановки можно убедиться, что оно удовлетворяет уравнениям (16).

Из (32) для ϕ_2 и ϕ_3 имеем при $u \to \infty$ также и $\mu \to \infty$, а ν становится равным v.

Следовательно:

$$\lim_{u \to \infty} \phi_i = \psi_{2,i}(v) \qquad (i = 2,3) , \tag{33}$$

Если же $v \to -\infty$, то и $\nu \to -\infty$, а μ становится равным u. Следовательно,

$$\lim_{v \to -\infty} \phi_i = \psi_{1,i}(u) \qquad (i = 2,3) . \tag{34}$$

Таким образом, задача о рассеянии двух плоских волн в электродинамике Борна-Инфельда решена.

Посмотрим, во что переходит наше решение при $u \to -\infty$ и при $v \to \infty$. В обоих этих случаях $t = \frac{v-u}{2} \to \infty$. Очевидно из (32), когда $u \to -\infty$, то $\mu \to -\infty$, а становится равным $v - H_1$, где

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\sigma)\, d\sigma . \tag{35}$$

Следовательно,

$$\lim_{u \to -\infty} \phi_i = \psi_{2,i}(v - H_1) - \psi_{2,i}(-\infty) . \tag{36}$$

Когда $v \to \infty$, то $\nu \to \infty$, а $\mu = u + H_2$, где

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{2,i}(\sigma)\, d\sigma . \tag{37}$$

Следовательно,

$$\lim_{v \to \infty} \phi_i = \psi_{1,i}(u + H_2) - \Psi_{1,i}(\infty) . \tag{38}$$

Таким образом, две плоские электромагнитные волны из $t = -\infty$ в результате столкновения друг с другом переходят при $t = \infty$ тоже в две плоские волны той же формы, но со сдвинутыми аргументами ! Величины H_1, $- H_2$, на которые происходит сдвиг аргументов, равны импульсом соответственно первой и второй волны. При желании процесс столкновения можно рассматривать в системе центра инерции, где $H_1 = -H_2$.

§ 3. Обсуждение результатов

Полученное нами решение (32) оказывается, вообще говоря, многозначной функцией от u , v . Действительно, рассмотрим зависимость u от μ, ν :

$$u = \mu - B(\nu), \quad v = \nu + A(\mu);$$

где

$$B(\nu) = \int_{-\infty}^{\nu} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{2i}(\sigma)\,d\sigma, \quad A(\mu) = \int_{\mu}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\sigma)\,d\sigma. \tag{39}$$

Исключая ν из уравнений (39), получаем уравнение

$$\mu = u + B(v - A(\mu)), \tag{40}$$

определяющее μ как функцию от u , v . Правая часть этого уравнения – монотонно возрастающая функция от μ , так как ее производная равна

$$\sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{2,i}(v - A(\mu)) \sum_{j=2}^{3} \psi'^{2}_{1,j}(\mu) \geq 0, \tag{41}$$

Так как

$$0 \leq A(\mu) \leq H_1,$$

то

$$u + B(v) \leq u + B(v - A(\mu)) \leq u + B(v + H_1); \tag{42}$$

Следовательно, все корни уравнения (40) лежат в пределах (42) и их всегда нечетное число.

Если во всех точках

$$\sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\mu) \sum_{j=2}^{3} \psi'^{2}_{2,j}(\nu) < 1, \tag{43}$$

то имеется всего один корень уравнения (40) и решение (32) есть однозначные функции от u , v . Можно написать приближенное выражение для нашего решения, как функции от u , v

$$\phi_i = \psi_{1,i}(u + B(v)) + \psi_{2,i}(v - A(u)) - \psi_{0,i}. \tag{44}$$

Оно будет тем точнее, чем меньше верхняя грань выражения

$$\sum_{i=2}^{3} \psi'^{2}_{1,i}(\mu) \sum_{j=2}^{3} \psi'^{2}_{2,j}(\nu).$$

При нарушении условия (43) (в наших единицах 1 играет роль абсолютного масштаба градиента поля) якобиан

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\mu\,,\,\nu)} = 1 - \sum_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{1,i}(\mu)\sum_{j=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,j}(\nu) \tag{45}$$

не везде отличен от нуля. Если якобиан (45) равен нулю, то в этих точках напряженности поля оказывается бесконечными, так как

$$E_x = 0 \quad ,$$

$$E_y = \frac{\psi'_{1,2}(\mu)\left[1 - \sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,i}(\nu)\right] - \psi'_{2,2}(\nu)\left[1 - \sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{1,i}(\mu)\right]}{1 - \sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{1,i}(\mu)\sum\limits_{j=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,j}(\nu)} \quad ; \tag{46}$$

$$E_z = \frac{\psi'_{1,3}(\mu)\left[1 - \sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,i}(\nu)\right] - \psi'_{2,3}(\nu)\left[1 - \sum\limits_{i=2}\psi'^{\,2}_{1,i}(\mu)\right]}{1 - \sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{1,i}(\mu)\sum\limits_{j=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,j}(\nu)} \quad .$$

Мы можем заключить,такям образом, что эта теория, как это и предполагалось ее авторами /2/, теряет смысл, когда напряженности поля становятся больше некоторой постоянной величины (в нашем случае 1), играющей роль абсолютного масштаба поля. Как уже отмечалось, если начальные данные заданы так, что выполнено (43), то никаких неоднозначностей не возникает и при малых полях $\sum\limits_{i=2}^{3}\psi'^{\,2}_{1,i}(u)\sum\limits_{j=2}^{3}\psi'^{\,2}_{2,j}(v) \ll 1$ эта теория переходит в электродинамику Максвелла.

В заключение авторы выражают благодарность Д.И. Блохинцеву за полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Литература

1. Б. Барбашов, Н. Черников. ЖЭТФ, 5 (1966).

2. M. Born, L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A 144, 425 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1966 г.