

И.С.Златев, П.С.Исаев

ВЛИЯНИЕ ФОРМ-ФАКТОРА
НА ПРОЦЕССЫ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
И РОЖДЕНИЯ ПАР НА ПРОТОНАХ ^{x/}

^{x/} Работа доложена на Всесоюзной межвузовской конференции по квантовой теории полей и теории элементарных частиц /2-6 октября 1958 г., Ужгород/.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А Н Н О Т А Ц И Я

В статье вычислены дифференциальные сечения процессов тормозного излучения электронов и рождения пар γ -квантами на протонах с учётом форм-фактора в низшем порядке теории возмущений. Формула дифференциального сечения тормозного излучения проинтегрирована по всем углам, кроме угла между направлением падающего электрона и направлением вылета фотона. Проведено сравнение дифференциального и интегрального сечения тормозного излучения с соответствующими формулами Бете-Гайтлера.

В в е д е н и е

Процессы тормозного излучения электронов и рождения пар γ -квантами на протонах были рассчитаны Бете и Гайтлером ^{/1/} в низшем порядке теории возмущений в приближении точечного и бесконечно тяжелого протона.

С развитием ускорительной техники появилась возможность ставить эксперименты при довольно высоких энергиях падающих частиц (электронов, γ -квантов). При этих энергиях в рассматриваемых процессах могут оказаться существенными как отдача нуклона, так и его структура. Действительно, опыты, проведенные Хофштадтером и др. ^{/2/}, по рассеянию электронов с энергией ~ 500 Мэв на водороде показывают, что для объяснения экспериментальных данных нуклону следует приписать некоторую структуру. В связи с этим представляет интерес выяснить влияние форм-фактора и отдачи на такие, близкие к рассеянию электронов, процессы, как тормозное излучение и рождение пар на нуклонах ^{/3/}.

Нами был проведен расчёт дифференциальных сечений рассматриваемых процессов в низшем порядке теории возмущений - графики а), б), в), г). На графиках двойная линия обозначает протонную линию, одиночная - электронную, а волнистая - фотонную линии. Дополнительный вклад в сечения будет происходить как от мезонной шубы нуклонов (графики д) и е)), так и от интерференционных членов $(a, \delta) + g$; $(b, z) + e$. Однако, его учёт является гораздо более сложным, чем расчёт графиков а), б), в), г), и поэтому в настоящей статье нами лишь обсуждается возможность его вклада. Недавно в работе ^{/4/} рассматривалось влияние структуры на процессы тормозного излучения и рождения пар. Рассмотрение проведено для углов θ , удовлетворяющих условиям:

$$\theta^2 \ll \frac{M}{P}, \quad P \gg M \quad (I)$$

где θ - угол между γ -квантом и электроном (или позитроном), M - масса нуклона и P - импульс электрона (или позитрона). Легко видеть, что приближение I) ограничивает рассмотрение вопроса и справедливо при энергиях лёгких частиц ≥ 10 Бэв и углов $\leq 5^\circ$. В случае $P \sim M$ удаётся расширить область углов до $\theta \leq 15^\circ$. Однако, при этом опускается форм-фактор, связанный с аномальным магнитным моментом нуклона.

В данной работе дифференциальные сечения справедливы без каких-либо ограничений.

§ I. Дифференциальное сечение тормозного излучения

Матричный элемент, соответствующий сумме диаграмм а) и б) имеет вид:

$$M_{(A+B)} = \frac{ie^3}{(2\pi)^{3/2}} \frac{M m \delta(q_0 + p_0 - p - k - q)}{\sqrt{2} |\vec{k}| \epsilon_0 \epsilon E_0 E} \frac{1}{(p_0 - p)^2}$$

2

$$[\bar{\omega}^s(\vec{p}) \Gamma^{\mu\nu} \omega^{s_0}(\vec{p}_0)] [\bar{u}^6(\vec{q}) \left\{ \hat{e}(\kappa) \frac{1}{(\hat{q} + \hat{p}_0 - \hat{p}) - m} \gamma_{\mu} + \gamma_{\nu} \frac{1}{\hat{q}_0 - \hat{k} - m} \hat{e}(\kappa) \right\} u^{s_0}(\vec{q}_0)]$$

где M - масса нуклона, m - масса электрона, $p_0(E_0, \vec{p}_0)$, $p(E, \vec{p})$ - 4-х импульсы начального и конечного состояния нуклона; $q_0(\epsilon_0, \vec{q}_0)$, $q(\epsilon, \vec{q})$ - 4-х импульсы начального и конечного состояния электрона, $\kappa(\kappa_0, \vec{\kappa})$ - 4-х импульс фотона, $\omega^s(\vec{p})$ - спинор, описывающий нуклон с импульсом \vec{p} и направлением спина S , $u^{s_0}(\vec{q}_0)$ - соответствующий спинор электрона, $\hat{e} = \gamma^{\alpha} e_{\alpha}$, γ^{μ} - дираковские матрицы, удовлетворяющие условию $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} I$, I - единичная матрица,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \mathcal{F}_1(|p_0 - p|^2) + (\mu/2M) \sigma^{\mu\nu} (p_0 - p)_{\nu} \mathcal{F}_2(|p_0 - p|^2)$$

$\mathcal{F}_1(|p_0 - p|^2)$ - 12-форм-фактор, зависящий от отдачи нуклона; μ - аномальный магнитный момент протона, выраженный в ядерных магнетонах.

$$\sigma^{\mu\nu} = 1/2 (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}), \quad \rho q = g^{\mu\nu} p_{\mu} q_{\nu}$$

Принята система единиц $\hbar = c = 1$, $e^2/4\pi = 1/137$.

В системе, в которой нуклон вначале покоится, формула дифференциального сечения тормозного излучения имеет вид:

$$d\sigma = \frac{e^6}{8(2\pi)^5} \frac{dk_0}{k_0 M E} \frac{1}{|d\epsilon(\epsilon)|} \frac{|\vec{q}|}{|\vec{q}_0|} \frac{d\Omega_{q_0} d\Omega_{\kappa}}{[(\epsilon_0 - \epsilon - k_0) \pm Q^2]^2} \left\{ \left[\frac{\vec{q}_0^2 \sin^2 \theta}{(\epsilon - |\vec{q}_0| \cos \theta)^2} + \frac{\vec{q}_0^2 \sin^2 \theta_0}{(\epsilon_0 - |\vec{q}_0| \cos \theta_0)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2|\vec{q}_0| |\vec{q}| \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi}{(\epsilon - |\vec{q}_0| \cos \theta_0)(\epsilon - |\vec{q}| \cos \theta)} \right] (2m^2 - Q^2 + (\epsilon + k_0 - \epsilon_0)^2) - 2k_0^2 \frac{\epsilon - |\vec{q}| \cos \theta}{\epsilon_0 - |\vec{q}_0| \cos \theta_0} - 2k_0^2 \frac{\epsilon_0 - |\vec{q}_0| \cos \theta_0}{\epsilon - |\vec{q}| \cos \theta} \right\} \\ \left[\mathcal{F}_1^2(|p_0 - p|^2) + (\mu/2M)^2 \mathcal{F}_2^2(|p_0 - p|^2) (M^2 - ME) + M^2 \left[\frac{\vec{q}_0^2 \sin^2 \theta}{(\epsilon - |\vec{q}_0| \cos \theta)^2} \left((\epsilon + k_0 + \epsilon_0)^2 - Q^2 \right) + \frac{\vec{q}_0^2 \sin^2 \theta_0}{(\epsilon_0 - |\vec{q}_0| \cos \theta_0)^2} \left((\epsilon_0 + \epsilon - k_0)^2 - Q^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2|\vec{q}_0| |\vec{q}| \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi}{(\epsilon - |\vec{q}_0| \cos \theta_0)(\epsilon - |\vec{q}| \cos \theta)} \right] \right] \\ \left. \left. \left[\mathcal{F}_1^2(|p_0 - p|^2) + 2(\mu/M)^2 \mathcal{F}_2^2(|p_0 - p|^2) (ME - M^2) \right] \right\}$$

где $Q^2 = \vec{q}_0^2 + \vec{q}^2 + \vec{k}^2 - 2|\vec{q}_0| |\vec{q}| (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi) + 2|\vec{q}| |\vec{k}| \cos \theta - 2|\vec{q}_0| |\vec{k}| \cos \theta_0$, $f(\epsilon) = \epsilon + k_0 - \epsilon_0 - M + E(\epsilon)$ (ϵ и $E(\epsilon)$ находятся из закона сохранения $q_0 + p_0 = p + q + k$), θ_0 - угол между векторами \vec{q}_0 и \vec{k} , θ - угол между векторами \vec{q} и \vec{k} , φ - угол между векторами $[\vec{k} \times \vec{q}_0]$ и $[\vec{k} \times \vec{q}]$;
 $d\Omega_{q_0} d\Omega_{\kappa} = \sin \theta d\theta \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi d\varphi_0$

Чтобы из (3) получить формулу Бете-Гайтлера необходимо сделать предельный переход

1) $M \rightarrow \infty$

2) считать нуклон точечным: ($\gamma_0 = 0$, $F_i = 1$)

3) $\mu = 0$

При этом закон сохранения энергии запишется в форме

$$\epsilon_0 = K_0 + \epsilon$$

Формула дифференциального сечения рождения пар на нуклонах может быть получена из (3) заменой

$$\epsilon \rightarrow -\epsilon_+, \quad \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_-, \quad |\vec{q}_0| \rightarrow |\vec{q}_-|, \quad |\vec{q}| \rightarrow |\vec{q}_+|, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta_+, \quad \theta_0 \rightarrow \theta_-, \\ \psi_+ \rightarrow \psi + \pi$$

и

$$\frac{dK_0}{\left| \frac{d\epsilon}{d\epsilon} \right|} \frac{|\vec{q}|}{|\vec{q}_0|} d\Omega_{\kappa} d\Omega_{q_0} \rightarrow - \frac{d\epsilon_+ |\vec{q}_+| |\vec{q}_-|}{K_0^2 \left| \frac{d\psi(\epsilon_-)}{d\epsilon_-} \right|} d\Omega_{q_+} d\Omega_{q_-}$$

где знак (+) связывается с позитроном, а (-) - с электроном.

$$\psi(\epsilon_-) = E(\epsilon_-) - M - K_0 + \epsilon_- + \epsilon_+$$

$$d\Omega_{q_+} d\Omega_{q_-} = \sin \theta_+ d\theta_+ \sin \theta_- d\theta_- d\psi_+ d\psi_-$$

Формула дифференциального сечения тормозного излучения (3) содержит сложную зависимость от отдачи нуклона. Чтобы получить наглядное представление о влиянии отдачи, форм-фактора и аномального магнитного момента протона μ на сечение тормозного излучения, мы провели сравнение формулы (3) с формулой Бете-Гайтлера. Нами проведены численные расчёты для частного случая, когда энергия падающего электрона равна 0,54, а энергия γ -кванта = 0,25 (в единицах $\hbar c = M = 1$). Вид форм-факторов $F_i(p_0 - p_1^2)$ и $F_x(p_0 - p_1^2)$ был взят из опытов Хофштадтера по рассеянию электронов на протонах при энергии падающих электронов ~500 Мэв (экспоненциальная модель, $F_i = F_x$, $\gamma_0 = 0,8 \cdot 10^{-13}$ см). Выбор энергии γ -кванта сделан из кинематических соображений (см. приложение). В таблице I мы приводим часть полученных нами численных данных, которые наиболее полно характеризуют влияние отдачи, форм-фактора и аномального магнитного момента на сечение тормозного излучения.

Т а б л и ц а I

θ	Дифференц. сечение Бете-Гайтлера	Дифференц. сечение (3)	Дифференц. сечение (3) без учета форм-фактора	Дифференц. сечение (3) без учета форм-фактора и аном. магнитного момента	
	$\frac{d\sigma_{Б-г.} \times 10^{36}}{dK_0 d\Omega_0 d\Omega_k} \frac{см^2}{(стер) эр}$	$\frac{d\sigma \times 10^{36}}{dK_0 d\Omega_0 d\Omega_k} \frac{см^2}{(стер) эр}$	$\frac{d\sigma}{d\sigma_{Б-г.}}$	$10^{36} \frac{см^2}{(стер) эр}$	
I	2	3	4	5	
		$\psi = 0$	$\theta = 30^\circ$		6
6°	6003000	5789000	0.9638	6048000	5863000
30°	136260	126480	0.9297	137370	129590
60°	3605	2252	0.6244	4398	2795
90°	544.4	218.0	0.4005	827.5	314.0
120°	134.37	48.95	0.3643	287.2	65.89
150°	36.71	21.35	0.5814	155.95	23.77
		$\psi = 0$	$\theta = 60^\circ$		
6°	213900	183270	0.8569	234500	191760
30°	14407	13533	0.9393	13966	12022
60°	2148	1690.8	0.7873	2350	1795.9
90°	270.7	130.50	0.4820	376.9	172.61
120°	68.49	21.03	0.3070	110.03	27.89
150°	22.67	7.710	0.3401	54.57	8.724
		$\psi = 0$	$\theta = 90^\circ$		
6°	31085	25848	0.8315	42610	25460
30°	3214	2787	0.8673	3471	2588
60°	347.2	581.9	1.6761	699.4	405.7
90°	179.40	125.89	0.7017	261.0	129.67
120°	53.01	19.344	0.3649	83.31	23.23
150°	20.39	5.721	0.2806	38.05	6.184

I	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

$\varphi = 0$ $\theta = 120^\circ$

6°	6586	7226	1.0972	16771	5469
30°	554.7	518.0	0.9340	2456	400.3
60°	162.73	194.71	1.1965	1792.5	120.78
90°	30.47	78.17	2.566	311.1	46.84
120°	26.51	21.96	0.8282	57.25	19.908
150°	16.217	6.060	0.3737	36.31	6.327

$\varphi = 0$ $\theta = 150^\circ$

6°	1210.2	3402	2.811	7944.0	918.7
30°	121.15	182.13	1.534	391.3	99.79
60°	64.60	67.64	1.0471	139.59	43.68
90°	25.85	34.43	1.3317	79.67	20.84
120°	7.154	16.852	2.356	55.93	11.232
150°	3.705	7.538	2.034	40.65	6.306

$\varphi = 30^\circ$ $\theta = 30^\circ$

6°	4884000	4641000	0.9503	4899000	4718000
30°	28440	76360	2.685	87090	79400
60°	2551	1930.1	0.7565	3966	2431
90°	475.0	202.1	0.4254	784.1	290.4
120°	114.8	47.29	0.4120	279.8	63.31
150°	34.07	21.08	0.6186	154.33	23.43

$\varphi = 30^\circ$ $\theta = 60^\circ$

6°	200500	170740	0.8517	221600	179240
30°	19901	17461	0.8774	19654	17673
60°	1505.5	1076.2	0.7148	1703.0	1200.3
90°	229.5	100.27	0.4368	311.8	133.31
120°	61.10	19.257	0.3152	102.99	25.38
150°	20.97	7.392	0.3525	52.51	8.180

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 30^\circ$		$\theta = 90^\circ$	
6°	20840	24900	1.1952	41580	24560
30°	2583	2163	0.8373	2928	2088
60°	678.7	562.2	0.8282	801.3	540.6
90°	152.82	89.00	0.5824	213.2	98.26
120°	47.06	16.508	0.3508	74.87	19.913
150°	18.953	5.476	0.2889	36.73	5.893
		$\varphi = 30^\circ$		$\theta = 120^\circ$	
6°	6415	7090	1.1054	14553	5363
30°	1134	635.3	0.5602	1114.2	405.5
60°	190.31	172.17	0.9047	284.4	135.70
90°	65.29	62.20	0.9526	131.97	49.96
120°	28.68	14.864	0.5183	55.00	17.177
150°	15.760	5.200	0.3299	34.60	5.925
		$\varphi = 30^\circ$		$\theta = 150^\circ$	
6°	1172.3	3371	2.876	7907	1562.2
30°	112.53	174.57	1.5512	382.8	96.35
60°	60.83	61.80	1.0160	133.71	41.66
90°	29.07	30.19	1.0386	74.49	19.769
120°	8.931	15.238	1.7063	53.18	11.020
150°	2.186	7.146	3.269	39.11	6.028
		$\varphi = 60^\circ$		$\theta = 30^\circ$	
6°	3214000	3038000	0.9453	3294000	3113000
30°	40690	34360	0.8444	44210	37210
60°	2336	1345.9	0.5763	3117	1745.1
90°	399.2	166.47	0.4171	685.5	238.4
120°	100.57	43.19	0.4295	260.0	57.03
150°	27.20	16.691	0.6135	149.63	22.52

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 60^{\circ}$	$\theta = 60^{\circ}$		
6°	170750	143420	0.8399	193170	151750
30°	7080	5723	0.8083	7882	6148
60°	753.2	462.6	0.6142	960.3	559.7
90°	149.03	63.17	0.4239	229.7	85.46
120°	44.24	15.577	0.3521	87.61	20.13
150°	16.600	6.876	0.4142	49.22	7.529
		$\varphi = 60^{\circ}$	$\theta = 90^{\circ}$		
6°	22290	22590	1.0135	38940	22350
30°	1486.0	1175.4	0.7910	1924.2	1189.2
60°	324.6	215.2	0.6629	432.1	234.6
90°	90.74	43.74	0.4821	137.32	52.29
120°	32.93	11.549	0.3507	58.05	13.870
150°	15.379	4.849	0.3154	33.12	5.158
		$\varphi = 60^{\circ}$	$\theta = 120^{\circ}$		
6°	5956	6722	1.1288	14097	5084
30°	363.4	340.0	0.9357	683.7	281.5
60°	126.98	97.31	0.7664	208.2	88.68
90°	47.99	33.24	0.6927	93.94	32.37
120°	24.96	11.658	0.4671	50.40	11.841
150°	14.037	5.089	0.3625	31.98	5.022
		$\varphi = 60^{\circ}$	$\theta = 150^{\circ}$		
6°	1084.9	3297	3.039	7810	1528.1
30°	90.35	155.16	1.7174	359.6	87.21
60°	52.12	48.72	0.9348	117.90	35.06
90°	30.26	22.85	0.7553	65.24	17.716
120°	13.537	11.506	0.8499	44.93	9.181
150°	7.053	6.239	0.8846	35.41	5.366

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 90^\circ$		$\theta = 30^\circ$	
6 ⁰	2177000	2018000	0.9267	2267000	2090000
30 ⁰	24040	17913	0.7452	26580	20290
60 ⁰	1625.2	901.3	0.5546	2391	1200.6
90 ⁰	291.1	131.94	0.4533	581.2	187.31
120 ⁰	71.70	38.49	0.5368	236.9	50.03
150 ⁰	18.340	19.484	1.0624	143.59	21.40
		$\varphi = 90^\circ$		$\theta = 60^\circ$	
6 ⁰	140810	116180	0.8251	164310	124220
30 ⁰	3425	2544	0.7427	4355	2871
60 ⁰	382.1	221.2	0.5788	519.3	279.6
90 ⁰	84.38	39.47	0.4678	166.44	52.97
120 ⁰	26.65	12.245	0.4595	72.58	15.372
150 ⁰	11.293	6.252	0.5536	42.57	6.767
		$\varphi = 90^\circ$		$\theta = 90^\circ$	
6 ⁰	23977	19936	0.8315	35082	19784
30 ⁰	825.8	642.6	0.7781	1289.8	666.2
60 ⁰	146.94	94.66	0.6442	255.6	107.79
90 ⁰	45.09	22.86	0.5071	89.74	27.72
120 ⁰	19.210	7.930	0.4128	43.79	9.379
150 ⁰	11.136	3.795	0.3467	26.45	4.393
		$\varphi = 90^\circ$		$\theta = 120^\circ$	
6 ⁰	5387	6274	1.1647	13526	4735
30 ⁰	232.1	242.0	1.0427	553.2	198.82
60 ⁰	65.10	52.65	0.8087	143.65	49.79
90 ⁰	29.75	17.812	0.5988	63.97	18.332
120 ⁰	16.687	7.537	0.4517	37.34	7.811
150 ⁰	12.828	4.205	0.3278	27.39	4.132

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 90^{\circ}$		$\theta = 150^{\circ}$	
6°	963.5	3204	3.326	7688	1484.7
30°	63.00	137.59	2.184	341.2	75.12
60°	34.56	36.24	1.0487	99.57	26.94
90°	22.22	16.012	0.7205	53.11	13.420
120°	13.189	8.379	0.6353	36.62	7.243
150°	8.168	5.295	0.6483	31.25	4.633

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 120^{\circ}$		$\theta = 30^{\circ}$	
6°	1637500	1490000	0.9098	1732700	1559100
30°	15321	11362	0.7416	19042	13251
60°	1171.0	652.1	0.5568	1929.1	876.9
90°	207.5	108.23	0.5217	504.3	151.08
120°	46.71	34.73	0.7437	218.0	44.33
150°	10.048	18.662	1.8571	138.23	20.37

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 120^{\circ}$		$\theta = 60^{\circ}$	
6°	119040	96570	0.8113	143050	104290
30°	2065	1481.6	0.7177	3006	1715.9
60°	212.9	132.02	0.6200	420.3	167.37
90°	44.66	27.66	0.6193	129.27	36.10
120°	13.381	10.014	0.7484	61.75	12.211
150°	6.627	5.742	0.8664	41.93	6.142

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 120^{\circ}$		$\theta = 90^{\circ}$	
6°	25370	17757	0.6998	33190	17642
30°	499.9	410.2	0.8206	964.6	424.9
60°	70.18	54.57	0.7776	178.75	61.14
90°	20.34	14.568	0.7164	65.76	17.156
120°	9.666	6.022	0.6230	35.48	6.864
150°	7.543	3.686	0.4887	22.11	3.813

I	2	3	4	5	6
		$\varphi = 120^\circ$		$\theta = 120^\circ$	
6°	4852	5867	1.2093	12988	4413
30°	142.64	179.92	1.2614	416.5	145.15
60°	30.81	33.40	1.0842	107.87	31.00
90°	14.490	11.414	0.7878	47.74	11.664
120°	9.974	5.444	0.5458	29.48	5.603
150°	8.931	3.577	0.4006	23.94	3.492
		$\varphi = 120^\circ$		$\theta = 150^\circ$	
6°	845.5	3109	3.677	7562	1437.1
30°	39.05	115.41	2.956	304.2	64.50
60°	19.287	28.12	1.4581	85.62	20.91
90°	14.142	11.945	0.8447	44.34	10.269
120°	10.853	6.565	0.6049	31.20	5.816
150°	10.735	4.596	0.4281	28.01	4.062
		$\varphi = 150^\circ$		$\theta = 30^\circ$	
6°	1388500	1243200	0.8954	1482000	1310700
30°	12076	8693	0.7199	15764	10336
60°	929.2	531.7	0.5722	1682.1	716.8
90°	157.43	95.05	0.6038	458.5	131.11
120°	30.42	32.32	1.0625	205.2	40.78
150°	4.312	18.113	4.201	134.37	19.679
		$\varphi = 150^\circ$		$\theta = 60^\circ$	
6°	106400	85490	0.8035	130730	92860
30°	1509	1043.6	0.6916	2444	1269.7
60°	137.95	98.35	0.7130	344.8	122.99
90°	24.11	22.37	0.9280	110.73	28.46
120°	5.602	8.817	1.5740	55.71	10.541
150°	3.553	5.411	1.5232	39.76	5.745

I	2	3	4	5	6
		$\psi = 150^\circ$		$\theta = 90^\circ$	
6°	26235	16356	0.6234	31440	16278
30°	350.7	314.5	0.8970	812.1	322.2
60°	36.98	39.98	1.0812	145.25	43.57
90°	8.509	11.267	1.3241	54.67	12.867
120°	4.377	5.074	1.1592	30.96	5.662
150°	5.258	3.382	0.6432	24.19	3.471
		$\psi = 150^\circ$		$\theta = 120^\circ$	
6°	4493	5597	1.2456	12626	4197
30°	93.52	148.94	1.5926	410.4	117.34
60°	14.368	25.63	1.7835	90.88	23.05
90°	6.817	8.844	1.2972	40.05	8.850
120°	6.108	4.489	0.7349	25.50	4.570
150°	7.224	3.223	0.4461	21.92	3.131
		$\psi = 150^\circ$		$\theta = 150^\circ$	
6°	760.5	3042	4.000	7465	1407.7
30°	23.49	104.66	4.456	287.3	57.75
60°	11.723	23.83	2.033	77.29	17.531
90°	9.957	9.918	0.9961	39.36	8.576
120°	8.913	5.606	0.6289	27.94	5.029
150°	7.887	4.180	0.5301	25.99	3.718

Для других значений углов θ_0 , θ и φ получаются примерно те же (по порядку величины, как в приведенной таблице) отклонения от формулы Бете-Гайтлера.

Интересно отметить, что учет только отдачи ($\mathcal{F}_i=1$, $\mu=0$) приводит к перераспределению дифференциального сечения (3) по отношению к дифференциальному сечению Бете-Гайтлера $dG_{Б-Г}$. Например, при $\varphi=0$, $\theta=30^\circ$, $\theta_0=60^\circ, \dots, 150^\circ$ сечение (3) оказывается всюду меньше $dG_{Б-Г}$, в то время как при $\varphi=150^\circ$, $\theta=90^\circ$, $\theta_0=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ сечение (3) всюду больше $dG_{Б-Г}$.

Аномальный магнитный момент протона всюду увеличивает сечение, в то время как форм-фактор уменьшает сечение. Таким образом не существует простой закономерности изменения дифференциального сечения (3) по отношению к дифференциальному сечению Бете-Гайтлера.

§ 2. Интегральное сечение тормозного излучения

Для сравнения с экспериментом целесообразно проинтегрировать формулу (3) по углам φ и θ и получить интегральное сечение тормозного излучения как функцию ε_0 , k_0 и θ_0 . Нами была выбрана экспоненциальная модель форм-фактора, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными по рассеянию электронов на нуклонах (2). Интегрирование проведено для случая $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_2$. До интегрирования в (3) произведена замена $|\vec{q}_0| \rightarrow \varepsilon_0$, $|\vec{q}| \rightarrow \varepsilon - \frac{m^2}{2(\varepsilon_0 - k_0)}$. Интегрирование производилось точно: по φ - в пределах $(0, 2\pi)$, а по θ в пределах $(0, \pi)$. Этим выбирался кинематический случай I (а, в) (см. приложение).

Полученная формула имеет чрезвычайно громоздкий вид:

$$dG(\varepsilon_0, k_0, \theta_0) = \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 dk \mathcal{F}(\varepsilon_0, k_0, \theta_0)$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon_0, k_0, \theta_0) = \frac{e^6}{8(2\pi)^5} \left\{ \sum_{\substack{j=-2, \dots, \frac{k_0+1}{2} \\ k=1, 3, 5, 7}} \mathcal{J}_j^k H_j^k + \sum_{\substack{m=-2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ n=1, 3}} I_m^n \frac{\mathcal{Y}_m^n}{2} \right\}$$

$$\mathcal{J}_j^k = \int_{\Delta-1}^{\Delta+1} \frac{x^j dx}{(h_0 + h_1 x + h_2 x^2)^{k/2}} \quad (4)$$

$$h_0 = b^2 - g^2 + 2bd\Delta + (d^2 + g^2)\Delta^2; \quad h_1 = -2bd - 2(d^2 + g^2)\Delta;$$

$$h_2 = d^2 + g^2; \quad \Delta = 1 + \frac{m^2}{2(\varepsilon_0 - k_0)^2};$$

$$b = \frac{M}{\beta} + \varepsilon_0 - k_0 + \frac{M\varepsilon_0^2}{6\beta} \varepsilon_0 k_0 (1 - \cos \theta_0)$$

$$d = k_0 - \varepsilon_0 \cos \theta_0; \quad g = \varepsilon_0 \sin \theta_0$$

I_m^n получаются из \mathcal{J}_j^k заменой b на f , где

$$f = \varepsilon_0 - k_0 + \frac{\varepsilon_0 k_0}{\varepsilon_0 - k_0} (1 - \cos \theta_0)$$

$$L = M(\epsilon_0 - \kappa_0) - \epsilon_0 \kappa_0 (1 - \cos \theta_0)$$

$$\beta = 1 + \frac{M r_0^2}{6} (\epsilon_0 - \kappa_0)$$

$$\gamma = 1 + \frac{M^2}{2M} (\epsilon_0 - \kappa_0)$$

$$d = \frac{M r_0^2}{6\beta} L$$

$$\delta = \frac{L(\gamma - 1)}{\gamma(\epsilon_0 - \kappa_0)} + d$$

$$A_1 = \frac{(1 + \mu)^2 L}{2M \kappa_0^2 \beta^4}$$

$$A_2 = \frac{(1 + \mu)^2 L \sin^2 \theta_0}{2M \kappa_0^2 \beta^4 (1 - \cos \theta_0)^2}$$

$$A_3 = - \frac{(1 + \mu)^2 L}{M \kappa_0^2 \beta^4 \epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)}$$

$$A_4 = + \frac{(1 + \mu)^2 L^2}{2M^2 \beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0) \epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)}$$

$$A_5 = \frac{(1 + \mu)^2 \epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)}{2M^2 \beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0)}$$

$$A_{6a} = \frac{2L \gamma \epsilon_0^2}{M \kappa_0^2 \beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0)^2}$$

$$A_{6b} = \frac{L \gamma (M + 2\epsilon_0)}{M \kappa_0^2 \beta^4 (\kappa_0 - \epsilon_0)}$$

$$A_{7a} = \frac{2L \gamma \sin^2 \theta_0}{M \kappa_0^2 \beta^4 (1 - \cos \theta_0)^2}$$

$$A_{7b} = \frac{L \gamma (M + 2\epsilon_0 - 2\kappa) \sin^2 \theta_0}{M \kappa_0^2 \beta^4 (\kappa_0 - \epsilon_0) (1 - \cos \theta_0)^2}$$

$$A_{8a} = \frac{2L \gamma [\kappa_0^2 + 2\epsilon_0 (\epsilon_0 - \kappa)]}{M \kappa_0^2 \beta^4 \epsilon_0 (\epsilon_0 - \kappa)^2 (1 - \cos \theta_0)}$$

$$A_{8b} = \frac{2\gamma L (M + 2\epsilon_0 - \kappa)}{M \kappa_0^2 \beta^4 \epsilon_0 (\kappa_0 - \epsilon_0) (1 - \cos \theta_0)}$$

$$A_9 = \frac{L^2 \gamma}{M \epsilon_0 (\kappa_0 - \epsilon_0)^2 \beta^4 (1 - \cos \theta_0)}$$

$$A_{10} = \frac{\epsilon_0 \gamma \sin^2 \theta_0}{M (\kappa_0 - \epsilon_0)^2 \beta^4 (1 - \cos \theta_0)}$$

$$y_1 = 6b^2 d - 6d g^2 + 12bd^2 - 6bg^2 + 6d^3$$

$$y_2 = 2(6bd^2 - 3bg^2 + 6d^3 - 9dg^2)$$

$$y_3 = 6(2d^3 - 3dg^2)$$

$$z_1 = 4bd + 4d^2 - 2g^2$$

$$z_2 = 2(2d^2 - g^2)$$

$$y = 2(b + d)^3$$

$$z = 2(b + d)^2$$

$$D = \frac{\beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0)}{L} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} (4\beta - 3) + 4\beta - 4 \right]$$

$$U = \frac{\gamma - 1}{\gamma} 3\beta^3 (\beta - 1) + (\beta - 1)^2 (3\beta^2 + 2\beta + 1)$$

$$H = \frac{L(\beta - 1)^2}{\epsilon_0 - \kappa_0} \left\{ \frac{(\gamma - 1)(2\beta + 1)}{\gamma} + \frac{2(\beta^2 - 1)}{\beta} \right\}$$

$$K = \frac{(\beta - 1)^3 L^2}{\beta (\epsilon_0 - \kappa_0)^2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{\beta - 1}{\beta} \right)$$

$$N = \beta^4 \frac{2\gamma - 1}{\gamma}$$

$$P = \frac{\beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0)}{L} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right)$$

$$R = -\beta^3 \frac{2\gamma - 1}{\gamma} + 1$$

$$S = \frac{L}{\epsilon_0 - \kappa_0} \left[(\beta^2 - 1) \left(\frac{1 - 2\gamma}{\gamma} \right) + \frac{2(\beta - 1)}{\beta} \right]$$

$$T = -\frac{(\beta-1)^2 L^2}{\beta(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{\beta-1}{\beta} \right)$$

$$U = \frac{\beta^4 (\epsilon_0 - \kappa_0)^2}{L^2} \left[\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma} \right) (4\beta-2) - 1 \right]$$

$$V = \frac{\beta(\epsilon_0 - \kappa_0)}{L} \left[\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma} \right) \beta^2 (3\beta-2) - \beta^2 \right]$$

$$W = 2\beta^2 (\beta-1) \frac{\gamma-1}{\gamma} + (\beta-1)^2 (2\gamma+1)$$

$$X = \frac{L}{\epsilon_0 - \kappa_0} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} (\beta^4 - 2) - \beta^4 \right]$$

$$B_1 = \alpha^2 A_1 + \frac{\kappa}{2} A_{6a} + \frac{T}{2} A_{6s}$$

$$B_2 = \alpha^2 A_3 - \frac{\kappa}{2} A_{8a} - \frac{T}{2} A_{8s}$$

$$B_3 = \frac{\alpha^4}{\beta-f} A_5 + \frac{\kappa\alpha}{2} A_{10}$$

$$B_4 = \alpha^2 A_2 + \frac{\kappa}{2} A_{7a} + \frac{T}{2} A_{7s}$$

$$B_5 = 2\alpha A_1 + \frac{H}{2} A_{6a} + \frac{S}{2} A_{6s}$$

$$B_6 = -\alpha^2 A_3 + \frac{\kappa}{2} A_{8a} + \frac{T}{2} A_{8s}$$

$$B_7 = 2\alpha A_3 - \frac{H}{2} A_{6a} - \frac{S}{2} A_{6s}$$

$$B_8 = \frac{\alpha^3}{\beta-f} \left(\frac{\alpha}{\beta-f} + 4 \right) A_5 - \frac{H\alpha + \kappa}{2} A_{10}$$

$$B_9 = 2\alpha A_2 + \frac{H}{2} A_{7a} + \frac{S}{2} A_{7s}$$

$$B_{10} = \frac{\alpha}{\beta-f} \left[\frac{\alpha}{\beta-f} + 2 \right] A_4$$

$$B_{11} = 2A_1 + \epsilon A_{6a} + R A_{6s}$$

$$B_{12} = 2A_3 - \epsilon A_{8a} - R A_{8s}$$

$$B_{13} = \frac{2\alpha^2}{\beta-f} \left[\frac{\alpha^2}{(\beta-f)^2} + \frac{4\alpha}{\beta-f} + 6 \right] A_5 -$$

$$- (\epsilon\alpha + H) A_{10}$$

$$B_{14} = 2A_2 + \epsilon A_{7a} + R A_{7s}$$

$$B_{15} = \frac{2}{\beta-f} \left(\frac{\alpha}{\beta-f} + 1 \right)^2 A_4$$

$$B_{16} = \epsilon A_{6a} - R A_{6s}$$

$$B_{17} = \epsilon A_{8a} - R A_{8s}$$

$$B_{18} = 2 \left(\frac{\alpha}{\beta-f} + 1 \right)^4 A_5$$

$$H_{-2}^7 = -\frac{2m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} (\beta+d)^3 B_1$$

$$H_{-1}^7 = \left\{ 4B_1 + 2(\beta+d)B_2 + 2B_3 + \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} \frac{T}{\beta-f} A_9 \right\} (\beta+d)^3$$

$$H_0^7 = -(y+2y_1)B_1 - [dy + (\beta+d)y_1]B_2 - y_1B_3 + 2(\beta+d)^3 B_4 + \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} (\beta+d)^3 \frac{\alpha^2}{\beta-f} A_4 - (\beta+d)^3 \frac{2T}{\beta-f} A_9$$

$$H_1^7 = (y_1 + y_2)B_1 + [dy_1 + \frac{\beta+d}{2}y_2]B_2 + \frac{y_2}{2}B_3 - y_1B_4 - y \frac{\alpha^2}{\beta-f} A_4 + (y+2y_1) \frac{T}{2(\beta-f)} A_9$$

$$H_2^7 = -\left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} \right) B_1 - \left(\frac{d}{2} \frac{y_2}{\alpha} + \frac{\beta+d}{6} y_3 \right) B_2 - \frac{y_3}{6} B_3 + \frac{y_2}{2} B_4 + y_1 \frac{\alpha^2}{\beta-f} A_4 - (y_1 + y_2) \frac{T}{2(\beta-f)} A_9$$

$$H_3^7 = \frac{y_3}{6} B_1 + \frac{d}{6} \frac{y_3}{\alpha} B_2 - \frac{y_3}{6} B_4 - \frac{y_2}{2} \frac{\alpha^2}{\beta-f} A_4 + \left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} \right) \frac{T}{2(\beta-f)} A_9$$

$$H_4^7 = \frac{y_3}{6} \frac{\alpha^2}{\beta-f} A_4 - \frac{y_3}{6} \frac{T}{2(\beta-f)} A_9$$

$$H_{-2}^5 = -\frac{2m^2(\beta+d)^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} B_5$$

$$H_{-1}^5 = (\beta+d)^2 \left\{ 4B_5 + 2B_6 + 2(\beta+d)B_7 - 2B_8 - \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} W A_9 \right\}$$

$$H_0^5 = -(\bar{x} + 2\bar{x}_1)B_5 - [d\bar{x} + (\beta+d)\bar{x}_1]B_7 - \bar{x}_1B_6 + 2(\beta+d)^2 B_9 + \bar{x}_1 B_8 + \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} (\beta+d)^2 B_{10} + 2(\beta+d)^2 W A_9$$

$$H_1^5 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) B_5 + (d\bar{x}_1 + \frac{b+d}{2} \bar{x}_2) B_7 + \frac{\bar{x}_1}{2} B_6 - \bar{x}_1 B_9 - \frac{\bar{x}_2}{2} B_8 - 2(b+d)^2 B_{10} - \frac{1}{2} (\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2) W A_9$$

$$H_2^5 = -\frac{\bar{x}_2}{2} B_5 - \frac{d\bar{x}_2}{2} B_7 + \frac{\bar{x}_2}{2} B_9 + \bar{x}_1 B_{10} + \frac{1}{2} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) W A_9$$

$$H_3^5 = -\frac{1}{2} \bar{x}_2 B_{10} - \frac{1}{4} \bar{x}_2 W A_9$$

$$H_{-2}^3 = -\frac{m^2 (b+d)}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} B_{11}$$

$$H_{-1}^3 = 2(b+d) B_{11} + (b+d)^2 B_{12} - 2(b+d) B_{17} - (b+d) B_{18} - \frac{m^2 (b+d)}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} V A_9$$

$$H_0^3 = -(b+3d) B_{11} - 2d(b+d) B_{12} + 2d B_{17} + d B_{18} + (b+d) B_{19} + 2(b+d) V A_9 + \frac{m^2 (b+d)}{2(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} B_{15}$$

$$H_1^3 = d B_{11} + d^2 B_{12} - d B_{17} - (b+d) B_{18} - (b+3d) V A_9$$

$$H_2^3 = d B_{15} + d V A_9$$

$$H_{-2}^1 = -\frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} B_{16}$$

$$H_{-1}^1 = 2B_{16} - 2A_3 - B_{18} + 2A_5 + \omega A_{8a} - (b+d) B_{17} + R A_{8\delta} - \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} U A_9 + (D\lambda + \omega) A_{10}$$

$$H_0^1 = \frac{m^2}{2(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} \frac{B_{15}}{b-f} - B_{16} + D A_{7a} - P A_{7\delta} + d B_{17} + 2U A_9$$

$$H_1^1 = -\frac{B_{15}}{b-f} - U A_9$$

$$\omega_{-2}^3 = \frac{-m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} (f+d) N A_{6a}$$

$$\omega_{-1}^3 = 2(f+d) N A_{6a} - (f+d)^2 N A_{8a} - \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} (f+d) P A_9 + (f+d) X A_{10}$$

$$\omega_0^3 = -(f+3d) N A_{6a} + (f+d) N A_{7a} + 2d(f+d) N A_{8a} + 2(f+d) P A_9 - d X A_{10}$$

$$\omega_1^3 = d N A_{6a} - d N A_{7a} - d^2 N A_{8a} - (f+3d) P A_9$$

$$\omega_2^3 = d P A_9$$

$$\omega_{-2}^1 = \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} B_{16}$$

$$\omega_{-1}^1 = B_{18} - 2B_{16} + [N+D(f+d)] A_{8a} - (f+d) P A_{8\delta} + \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} U A_9 - (D\lambda + \omega - 1) A_{10}$$

$$\omega_0^1 = -\frac{m^2}{2(\epsilon_0 - \kappa) \lambda} \frac{B_{15}}{b-f} + B_{16} - D A_{7a} + P A_{7\delta} - d B_{17} - 2U A_9$$

$$\omega_1^1 = \frac{B_{15}}{b-f} + U A_9$$

В предельном случае $M \rightarrow \infty$, $\nu_0 = 0$, $\mu = 0$ интегральная формула (4) переходит в проинтегрированную аналогичным образом формулу Бете-Гайтлера^{5/}. Действительно, из-за $\nu_0 = 0$ и $\mu = 0$ получается: $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. При большом M имеем: $b = M + O(1)$

$$\begin{aligned}
 L_1 &= M(\epsilon_0 - \kappa_0) + O(1) & B_{16} &= -\frac{A_{68}}{M} + O\left(\frac{1}{M}\right); B_{17} = -\frac{A_{98}}{M} + O\left(\frac{1}{M}\right); B_{18} = 2A_5 \\
 A_1 &= \frac{\epsilon_0 - \kappa_0}{2\kappa_0^2} + O\left(\frac{1}{M}\right) & H_j^k &= 0 \text{ при } k = 7, 5; j = -2, \dots, \frac{k+1}{2}; \\
 A_2 &= \frac{(\epsilon_0 - \kappa_0) \sin^2 \theta_0}{2\kappa_0^2 (1 - \cos \theta_0)} + O\left(\frac{1}{M}\right) & H_{-2}^3 &= -\frac{M \cdot m^2 \cdot B_{11}}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} + O(1) \\
 A_3 &= -\frac{(\epsilon_0 - \kappa_0)}{\kappa_0^2 \epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)} + O\left(\frac{1}{M}\right) & H_{-1}^3 &= M^2 B_{12} + O(M) \\
 A_4 &= \frac{\epsilon_0 - \kappa_0}{2\epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)} + O\left(\frac{1}{M}\right) & H_0^3 &= -MB_{11} - 2MdB_{12} + M \cdot B_{14} + O(1) \\
 A_5 &= \frac{\epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)}{2M^2 (\epsilon_0 - \kappa_0)} & H_1^3 &= dB_{11} + d^2 B_{12} - dB_{14} - M \cdot B_{15} + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 A_{6a} &= \frac{2\epsilon_0^2}{\kappa_0^2 (\epsilon_0 - \kappa_0)} + O\left(\frac{1}{M}\right) & H_2^3 &= dB_{15}; H_{-2}' = -\frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} B_{16} \\
 A_{6b} &= -\frac{M}{\kappa_0^2} + O(1) & H_{-1}' &= -MB_{17} + O(1); H_0' = -B_{16} - \frac{A_{75}}{M} + dB_{17}; H_1' = -\frac{A_9}{M^2}; \\
 A_{7a} &= \frac{2(\epsilon_0 - \kappa_0) \sin^2 \theta_0}{\kappa_0^2 (1 - \cos \theta_0)^2} + O\left(\frac{1}{M}\right) & \psi_{-2}^3 &= -\frac{m^2 (f+d) A_{6a}}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} \\
 A_{7b} &= -\frac{M \sin^2 \theta_0}{\kappa_0^2 (1 - \cos \theta_0)^2} + O(1) & \psi_{-1}^3 &= 2(f+d)A_{6a} - (f+d)^2 A_{6a} - \frac{m^2 (f+d) A_9}{M(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} + (f+d)MA_{10} + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 A_{8a} &= \frac{2[\kappa_0^2 + 2\epsilon_0(\epsilon_0 - \kappa_0)]}{\kappa_0^2 \epsilon_0 (\epsilon_0 - \kappa_0) (1 - \cos \theta_0)} + O\left(\frac{1}{M}\right) & \psi_0^3 &= -(f+3d)A_{6a} + (f+d)(A_{7a} + 2dA_{8a} + \frac{2A_9}{M}) - dMA_{10} + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 A_{8b} &= -\frac{2M}{\kappa_0^2 \epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)} + O(1) & \psi_1^3 &= d(A_{6a} - A_{7a}) - d^2 A_{8a} - \frac{(f+3d)}{M} A_9 + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 A_9 &= \frac{M}{\epsilon_0 (1 - \cos \theta_0)} + O(1) & \psi_2^3 &= \frac{d}{M} A_9 + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 A_{10} &= \frac{\epsilon_0 \sin^2 \theta_0}{M(\kappa_0 - \epsilon_0)^2 (1 - \cos \theta_0)} & \psi_{-2}' &= \frac{m^2}{(\epsilon_0 - \kappa_0)^2} B_{16} \\
 B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_{10} = B_{13} = 0 & & \psi_{-1}' &= -2B_{16} + A_{8a} - \frac{(f+d)}{M} A_{8b} + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 B_{11} = 2A_1; B_{12} = 2A_3; B_{14} = 2A_2; & & \psi_0' &= B_{16} + \frac{A_{75}}{M} - dB_{17} + O\left(\frac{1}{M}\right) \\
 B_{15} = \frac{2A_4}{M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right) & & \psi_1' &= \frac{A_9}{M^2} + O\left(\frac{1}{M^2}\right)
 \end{aligned}$$

При $M \rightarrow \infty$

$$H_{-2}^3 y_{-2}^3 \rightarrow 0; H_{-1}^3 y_{-1}^3 \rightarrow 0; H_0^3 y_0^3 \rightarrow 0; \psi_{-2}^3 y_{-2}^3 \rightarrow 0; \psi_{-1}^3 y_{-1}^3 \rightarrow 0; \psi_0^3 y_0^3 \rightarrow 0;$$

$$H_1^3 y_1^3 \rightarrow 0; H_2^3 y_2^3 \rightarrow 0; \psi_1^3 y_1^3 \rightarrow 0; \psi_2^3 y_2^3 \rightarrow 0;$$

Таким образом, интегральная формула (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = d\Omega_{\varphi} \frac{\pi e^6}{8(2\pi)^5} \frac{dK_0}{\varepsilon_0 K_0} \left\{ -I_{-2}^3 \left(\frac{2\varepsilon_0^2 m^2}{\varepsilon^3} (f+d) \right) + I_{-1}^3 (f+d) \left[\frac{4\varepsilon_0^2}{\varepsilon} (f+d) \frac{2(2\varepsilon_0\varepsilon + K_0^2)}{\varepsilon\varepsilon_0(1-\cos\theta_0)} - \right. \right. \\
 - \left. \frac{m^2 K_0^2}{\varepsilon_0 \varepsilon^2 (1-\cos\theta_0)} + \frac{K_0^2 \varepsilon_0 \sin^2\theta_0}{\varepsilon^2 (1-\cos\theta_0)} \right] + I_0^3 \left[-(f+3d) \frac{2\varepsilon_0^2}{\varepsilon} + (f+d) \frac{2\varepsilon \sin^2\theta_0}{(1-\cos\theta_0)^2} + 2d(f+d) \frac{2(2\varepsilon_0\varepsilon + K_0^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon (1-\cos\theta_0)} + \right. \\
 + 2(f+d) \frac{K_0^2}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} - d \frac{K_0^2 \varepsilon_0 \sin^2\theta_0}{\varepsilon^2 (1-\cos\theta_0)} \left. \right] + I_1^3 \left[d \frac{2\varepsilon_0^2}{\varepsilon} - d \frac{2\varepsilon \sin^2\theta_0}{(1-\cos\theta_0)^2} - d^2 \frac{2(2\varepsilon_0\varepsilon + K_0^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon (1-\cos\theta_0)} - \right. \\
 - \left. (f+3d) \frac{K_0^2}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} \right] + I_2^3 d \frac{K_0^2}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} + I_{-2}' \frac{m^2}{\varepsilon^2} + I_{-1}' \left(-2 + \frac{2(f+d)}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} + \frac{2(2\varepsilon_0\varepsilon + K_0^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon (1-\cos\theta_0)} + \right. \\
 \left. + I_0' \left(1 - \frac{\sin^2\theta_0}{(1-\cos\theta_0)^2} - \frac{2d}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} \right) - \frac{4}{\varepsilon_0 (1-\cos\theta_0)} \ln \frac{2\varepsilon}{m} \right\} \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 - K_0$.

Если теперь ввести обозначения $\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ и $\beta = \sqrt{\gamma^2 + 4(1-\gamma)\sin^2\frac{\theta_0}{2}}$, то формула (5) переходит в формулу, полученную в работе^{5/} с точностью до членов $\sim m^2$.

Для сравнения интегрального сечения с сечением, полученным путем интегрирования формулы Бете-Гайтлера, приводим таблицу II.

Таблица II

θ_0	$\mathcal{F}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$	$\mathcal{F}_{B-2}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$	$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{B-2}}$
10°	0,12428 10 ⁻²⁸	0,8922 10 ⁻²⁹	1,3930
20°	0,8322 10 ⁻³⁰	0,5514 10 ⁻³⁰	1,5092
30°	0,13381 10 ⁻³⁰	0,10727 10 ⁻³⁰	1,2474
60°	0,3813 10 ⁻³²	0,6295 10 ⁻³²	0,6057
90°	0,4427 10 ⁻³³	0,10958 10 ⁻³²	0,4040
120°	0,13031 10 ⁻³³	0,2732 10 ⁻³³	0,4770
150°	0,7162 10 ⁻³⁴	0,7535 10 ⁻³⁴	0,9505

Примечание: Интегральное сечение мы записываем в виде $d\sigma(\varepsilon_0, K_0, \theta_0) = \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 dk_0 \mathcal{F}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$; $\mathcal{F}_{B-2}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$ аналогичная величина из проинтегрированной формулы Бете-Гайтлера. Численный расчёт проведен для случая $\varepsilon_0 = 0,54$, $K_0 = 0,25$.

Сравнение $\mathcal{F}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$ и $\mathcal{F}_{B-2}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$, проведенное для $\theta_0 < 10^\circ$, показало, что с уменьшением θ_0 величина $\mathcal{F}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$ приближается к $\mathcal{F}_{B-2}(\varepsilon_0, K_0, \theta_0)$, так что уже при $\theta_0 = 5^\circ$ разница между ними не превышает 3%.

З а к л ю ч е н и е

В опыте Бернштейна и Пановского^{/7/} по измерению полного сечения тормозного излучения электронов с энергией 500-550 Мэв на водороде было показано, что в области углов, не превышающих $7-10^{\circ}$, формула Бете-Гайтлера верна с высокой степенью точности. В то же время проведенное нами сравнение (см. таблицу П) показывает, что уже при $\theta_0 = 10^{\circ}$ различие достигает 40%. Кажущееся разногласие объясняется тем, что основной вклад в сечение дают углы $\ll 10^{\circ}$ (максимум излучения лежит при $\theta_0 \sim \frac{\pi}{\epsilon_0}$), где влияние форм-фактора отдачи и аномального магнитного момента ничтожно и поэтому различие в 40% при $\theta_0 = 10^{\circ}$ не вносит существенных изменений в полное сечение.

Отсюда следует, что для экспериментального обнаружения влияния форм-фактора в рассматриваемых процессах, необходимо измерить интегральную кривую как функцию угла θ_0 хотя бы в интервале ($5^{\circ}-30^{\circ}$).

Если эксперимент подтвердит формулу Бете-Гайтлера хотя бы в указанном интервале, то это будет означать, что существует заметный вклад от мезонной шубы нуклона и, следовательно, оказывается существенным учёт графиков д) и е) уже при энергиях ~ 500 Мэв.

Таким образом, экспериментальное изменение интегрального сечения при не очень больших энергиях ($\sim 500-600$ Мэв) представляет определенный интерес.

В настоящее время нами подсчитывается вклад от мезонной шубы нуклона с помощью дисперсионных соотношений.

Авторы приносят глубокую благодарность А.А. Логунову и В.С. Барашенкову за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кинематика процесса тормозного излучения

При заданных энергиях ϵ_0 и K_0 и углах θ_0 , θ и ψ энергия рассеянного электрона определяется из закона сохранения энергии

$$M + \epsilon_0 - K_0 - \epsilon - E = 0$$

при выполнении закона сохранения трехмерного импульса

$$\vec{q}_0 - \vec{p} - \vec{q} - \vec{k} = 0$$

т.е. из уравнения

$$B - \epsilon - \sqrt{B^2 - 2C + \epsilon^2 + 2A\sqrt{\epsilon^2 - m^2}} = 0,$$

(I)

где введены обозначения

$$A = K_0 \cos \theta - |\vec{q}_0| (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi)$$

$$B = M + \varepsilon_0 - K_0$$

$$C = M \varepsilon_0 - M K_0 - \varepsilon_0 K_0 + m^2 + |\vec{q}_0| K_0 \cos \theta_0$$

Оказывается, что не при каждом наборе заданных величин ε_0 , K_0 , θ_0 , θ , φ уравнение (I) имеет точно одно решение.

Возможны следующие случаи:

I. Уравнение (I) имеет точно одно решение в интервале $m \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 - K_0$. Это будет выполнено, когда:

а) $A \geq 0$, $C - Bm \geq 0$: или

б) $A < 0$, $C - Bm \leq 0$, $|A| \geq \frac{B(\varepsilon_0 - K_0) - C}{\sqrt{(\varepsilon_0 - K_0)^2 - m^2}}$ Равенство может быть только в одном условии.

в) $A < 0$, $|A| < B$, $A \leq \frac{B(\varepsilon_0 - K_0) - C}{\sqrt{(\varepsilon_0 - K_0)^2 - m^2}}$

2. Уравнение (I) имеет один двойной корень. Это будет при выполнении условий:

$$A < 0, \quad |A| < B, \quad C - m \sqrt{A^2 + B^2} = 0$$

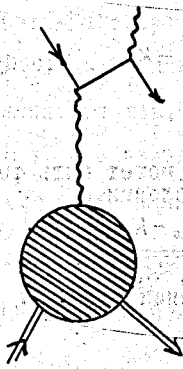
$$Bm \leq \sqrt{A^2 + B^2} (\varepsilon_0 - K_0)$$

3. Уравнение (I) будет иметь два различных корня, когда

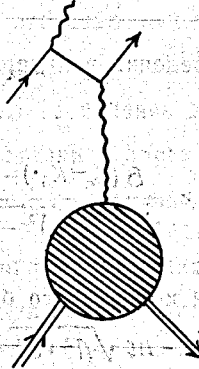
$$A < 0, \quad |A| < B, \quad C - Bm \leq 0, \quad B \cdot m < \sqrt{B^2 - A^2} (\varepsilon_0 - K_0)$$

$$C - m \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \quad |A| \leq \frac{B(\varepsilon_0 - K_0) - C}{\sqrt{(\varepsilon_0 - K_0)^2 - m^2}}$$

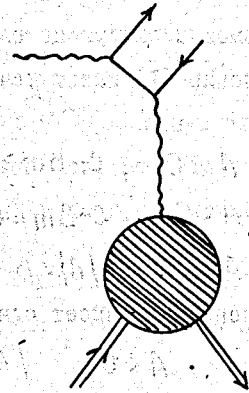
4. Во всех остальных случаях уравнение (I) не имеет корней.



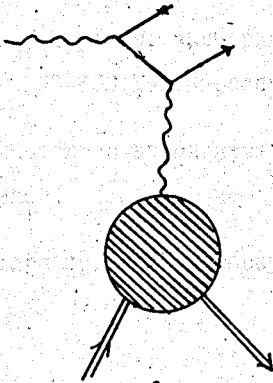
a



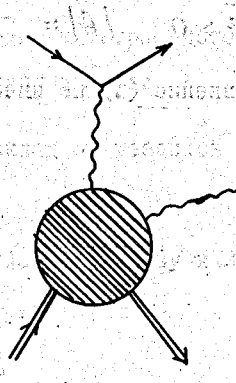
b



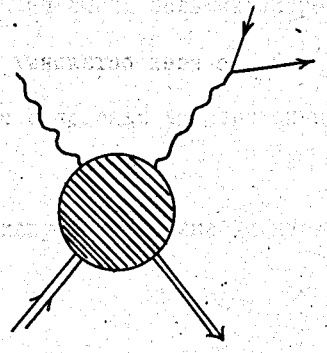
c



d



e



f

Л И Т Е Р А Т У Р А :

1. Bethe H., Heitler W., Proc. Roy. Soc A146, 83, (1934).

См. так же В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, Москва, 1956 год.

2. R. Hofstadter, Rev. Mod. Phys., 28, 214, (1956).

3. И. Златев, П.С. Исаев, ЖЭТФ, 35, 309, (1958).

4. И.Т. Дятлов, ЖЭТФ, 35, 155, (1958).

5. P.V.C. Hough, Phys. Rev., 74, 80, (1948).

6. D. Bernstein, W.K. Panofsky, Phys., Rev., 102, 522, (1956).

Работа поступила в издательский отдел 22 ноября 1958г.