ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2638

И.И. Тугов

К ТЕОРИИ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

4202/1 кр.

Р - 2688

И.И. Тугов

К ТЕОРИИ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. Введение

Применение общего метода исследования групповых свойств некоторых уравнений в частных производных второго порядка [1] к дифференциальному уравнению, описывающему n -мерную кулоновскую задачу в импульсном пространстве, позволяет исследовать возможные наборы квантовых чисел и дать способ построения соответствующих нормированных систем собственных функций.

В 1935 г. Фоком было показано, что уравнение Шредингера для атома водорода обладает симметрией четырехмерного шара в том смысле, что волновые функции в импульсном пространстве, принадлежащие одному уровню дискретного спектра, реализуют неприводимое представление группы $O(4)$. Как показано в [2], уравнение Шредингера для атома водорода, записанное в импульсном пространстве, некоторой заменой независимых и зависимой переменных приводится к интегральному уравнению для четырехмерных сферических функций, решения которого реализуют неприводимое представление группы $O(4)$. Подобный метод был впоследствии использован Аллилуевым, который рассмотрел многомерное обобщение задачи Кеплера [3], а также в последнее время независимо Переломовым и Поповым [4] и Кузнецовым [5] для построения собственных функций непрерывного спектра. Однако такой подход с нашей точки зрения, не может считаться удовлетворительным, так как приводит к ограничению лишь одной из возможных систем собственных функций дискретного и непрерывного спектров.

Цель настоящей работы заключается в следующем:

1. Построить дифференциальное уравнение для n -мерной кулоновской задачи в импульсном пространстве. Показать эквивалентность этого уравнения волновому уравнению в n -мерном римановом пространстве постоянной кривизны $K > 0$ (дискретный спектр) или $K < 0$ (непрерывный спектр). Решением уравнений Киллинга найти генераторы соответствующей группы уравнения (например, группы движений трехмерного пространства постоянной положительной кривизны для дискретного спектра атома водорода; однородной группы Лоренца в случае непрерывного спектра).

2. Исследовать возможные наборы квантовых чисел в трехмерном случае. В работе Смородинского и автора [6] построены все возможные наборы перестановочных операторов в трехмерных пространствах постоянной кривизны $K \gtrless 0$. Будет показано,

что для атома водорода эти операторы являются выражениями, квадратичными в инфинитезимальных операторах группы – компонентах вектора Рунге–Ленца и углового момента.

3. Построить в ряде систем координат нормированные системы собственных функций непрерывного и дискретного спектров.

Настоящая работа представляет собой попытку более общего подхода к проблеме и, естественно, содержит некоторые известные результаты. При этом необходимо заметить, что рассматриваемая группа симметрии, например $O(4)$ для атома водорода, не является единственной группой, генераторы которой соответствуют интегралам движения задачи Кеплера. Оказывается, что группу $SU(3)$ в некотором смысле также можно рассматривать как группу симметрии атома водорода. При этом генераторы группы $SU(3)$ связаны с генераторами $O(4)$, так как построены из компонент вектора Рунге–Ленца и углового момента[x].

2. Многомерная кулоновская задача в импульсном пространстве

Рассмотрим многомерную кулоновскую задачу в импульсном пространстве. Волновая функция $\Psi(p)$ в p –представлении определяется как преобразование Фурье волновой функции $\Psi(x)$ в x –представлении. Вместо решения уравнения Шредингера в координатном пространстве и последующего вычисления преобразования Фурье иногда оказывается более удобным записать уравнение Шредингера в виде интегрального уравнения в импульсном пространстве /2–5/. Другим возможным способом является использование импульсного представления квантовомеханических операторов, в котором x^i заменяются на $i\partial/\partial p^i$, а $\partial/\partial x^i$ на ip^i. В этом случае уравнение Шредингера будет иметь вид дифференциального уравнения в импульсном пространстве.

Запишем уравнение Шредингера для n –мерной кулоновской задачи

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{(\partial x^i)^2}+\left(E+\frac{\epsilon}{r}\right)\psi=0\ , \qquad (2.1)$$

где $r=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^{1/2}$, $\epsilon=1$ в поле притяжения и $\epsilon=-1$ в поле отталкивания, постоянные m, e, h положены равными единице, в следующем виде:

$$(p^2+p_0^2)\psi=\frac{2\epsilon}{r}\psi\ , \quad p_0^2=-2E\ . \qquad (2.2)$$

[x] Сообщение о группе $SU(3)$ как группе симметрии задачи Кеплера было сделано автором на VI Всесоюзной конференции по физике элементарных частиц в Ужгороде 19 октября 1965 г. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в другом месте.

Умножив обе части уравнения (2.2) слева на r, получим $r(p^2+p_0^2)\psi=2\epsilon\psi$, откуда

$$r(p^2+p_0^2)r(p^2+p_0^2)\psi=4\epsilon^2\psi\ . \qquad (2.3)$$

Очевидно, что в случае рассеяния ($E>0$) решениями последнего уравнения являются как собственные функции в поле притяжения (решения уравнения (2.2) при $\epsilon=1$), так и в поле отталкивания ($\epsilon=-1$). Используя вытекающие из перестановочных соотношений между компонентами n –мерного импульса и координатами $[p^k,x^\ell]=-i\delta^{k\ell}$ $(k,\ell=1,\dots,n)$ перестановочные соотношения

$$[r,p^2]=2i(\vec{p}\vec{r})\frac{1}{r}-(n-1)\frac{1}{r}\ ;\ [r^2,p^2]=4i(\vec{p}\vec{r})-2n;\ [(\vec{p}\vec{r}),p^2]=2ip^2\ , \qquad (2.4)$$

последовательно преобразуем уравнение (2.3)

$$[(p^2+p_0^2)r^2(p^2+p_0^2)+2i(\vec{p}\vec{r})(p^2+p_0^2)-(n-1)(p^2+p_0^2)]\psi=4\psi\ , \qquad (2.5)$$

$$[(p^2+p_0^2)^2r^2+6i(p^2+p_0^2)(\vec{p}\vec{r})-(3n-1)(p^2+p_0^2)-4p^2]\psi=4\psi\ . \qquad (2.6)$$

В p –представлении последнее уравнение будет:

$$(p^2+p_0^2)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial p^i)^2}+6(p^2+p_0^2)\sum_{i=1}^{n}p^i\frac{\partial\Psi}{\partial p^i}+[(3n-1)(p^2+p_0^2)+4p^2+4]\Psi=0. \qquad (2.7)$$

В следующем разделе будет показана эквивалентность уравнения (2.7) волновому уравнению в n –мерном пространстве постоянной кривизны.

3. Симметрия уравнения в импульсном пространстве

Запишем уравнение (2.7) в следующих обозначениях:

$$F[\Psi]\equiv a^{ij}\Psi_{ij}+b^i\Psi_i+c\Psi=0\ , \qquad (3.1)$$

где $\Psi_{ij}=\partial^2\Psi/\partial p^i\partial p^j$, $\Psi_i=\partial\Psi/\partial p^i$,

а коэффициенты $a^{ij}=(p^2+p_0^2)^2\delta^{ij}$, $b^i=6(p^2+p_0^2)p^i$, $c=(3n-1)(p^2+p_0^2)+4p^2+4$ (3.2) зависят от p. Мы будем рассматривать уравнение (3.1) в терминах ассоциированного с этим уравнением риманова пространства V_n, основной тензор a_{ij} которого определен уравнениями $a_{jk}\, a^{ij} = \delta^i_k$, $i, k = 1, \dots, n$ [7]. Очевидно, что метрика пространства, ассоциированного с уравнением (2.7), есть

$$ds^2 = a_{ij}\, dp^i\, dp^j = (p^2 + p_0^2)^{-2} \sum_{i=1}^{n} (dp^i)^2 . \qquad (3.3)$$

В работе Смородинского и автора[1] исследовалась симметрия уравнения Шредингера в n-мерном римановом пространстве V_n' и было показано, что группа этого уравнения есть группа движений пространства V_n', конформного V_n. При этом уравнение можно привести к инвариантному виду уравнения Шредингера в пространстве V_n' с потенциалом, пропорциональным скалярной кривизне R этого пространства. Применение использованного в[1] подхода не ограничивается уравнением Шредингера и приводит к совершенно аналогичному результату для уравнения (2.7). В этом разделе мы покажем эквивалентность уравнения (2.7) уравнению Шредингера с постоянным потенциалом $\sim R = \mathrm{const}$, т.е. волновому уравнению в пространстве постоянной кривизны. В следующем разделе решением уравнений Киллинга будет построена алгебра Ли допускаемой уравнением (2.7) группы. Следуя[1], вычислим величины

$$a^i = b^i + a^{k\ell}\, \Gamma^i_{k\ell} \qquad (i = 1, \dots, n), \qquad (3.5)$$

$$H = -2c + a^i_{,i} + \tfrac{1}{2} a^i a_i + \frac{n-2}{2(n-1)} R , \qquad (3.4)$$

где R –скалярная кривизна ассоциированного с уравнением (2.7) пространства с метрикой (3.3), $\Gamma^i_{k\ell}$ –символы Кристоффеля второго рода, запятой отмечены ковариантные производные относительно основного тензора a_{ij}. Удобно вычислить a'^i и H' для уравнения

$$F'[\Psi] = e^{-\theta} F[\Psi] = (p^2 + p_0^2)^{-2} F[\Psi] , \qquad (3.6)$$

обладающего, очевидно, евклидовым ассоциированным пространством, а затем перейти к a^i и H по следующим формулам[1,7]:

$$a^i = \left(a'^i + \frac{n-2}{2} a'^{ij}\, \theta_j\right) e^{\theta} , \quad (i = 1, \dots, n); \; H = (p^2 + p_0^2)^2 H' , \qquad (3.7)$$

где $\theta_j = \partial\theta/\partial p^j$. Для уравнения (3.6) формулы (3.4) и (3.5) дают ($a'_i = a'^i$),

$$a'^i = b'^i = \frac{6p^i}{p^2 + p_0^2} , \quad H' = -\frac{2c}{(p^2 + p_0^2)^2} + \tfrac{1}{2}\frac{36p^2}{(p^2 + p_0^2)^2} + \frac{6n(p^2 + p_0^2) - 12p^2}{(p^2 + p_0^2)^3} .$$

Используя (3.7) и (3.2), получим

$$a^i = \frac{n+1}{2} \frac{\partial}{\partial p^i} (p^2 + p_0^2)^2 , \qquad (3.8)$$

$$H = 2p_0^2 - 8 = \mathrm{const} . \qquad (3.9)$$

Покажем, что при помощи преобразования

$$\bar{F}[\Psi] = e^{-\nu} F[e^{\nu}\Psi] \qquad (3.10)$$

можно получить уравнение $\bar{F}[\Psi] = 0$ (эквивалентное уравнению $F[\Psi] = 0$), у которого все $\bar{a}^i = 0$. Нетрудно видеть, что уравнения (3.1) и (3.10) обладают одним ассоциированным пространством. Поэтому $\bar{a}^i = a^i + 2a^{ij}\nu_j = a^i + 2(p^2 + p_0^2)^2 \partial\nu/\partial p^i$. Используя (3.8), запишем систему уравнений $\bar{a}^i = 0$, $i = 1, \dots, n$ в виде

$$\frac{n+1}{2} \frac{\partial}{\partial p^i} (p^2 + p_0^2)^2 + 2(p^2 + p_0^2)^2 \frac{\partial\nu}{\partial p^i} = 0 ,$$

откуда

$$\frac{\partial\nu}{\partial p^i} = \frac{\partial}{\partial p^i} \ln (p^2 + p_0^2)^{-\frac{n+1}{2}} .$$

Таким образом, если произвести преобразование (3.10) с функцией

$$e^{-\nu} = (p^2 + p_0^2)^{\frac{n+1}{2}} , \qquad (3.11)$$

то для уравнения $\bar{F}[\Psi] = 0$ величины $\bar{a}^i \equiv 0$. Заметим, что при преобразовании (3.10) величина H не меняется[7], т.е. $\bar{H}$ для уравнения (3.10) равно H из (3.9).

Отметим теперь следующий факт. Условие $\bar{a}^i = 0$ и определение (3.4) этих величин дает для коэффициентов $\bar{b}^i$ уравнения (3.10) $\bar{b}^i = -a^{k\ell}\,\Gamma^i_{k\ell}$ (напомним, что уравнения (3.1) и (3.10) обладают одним ассоциированным пространством), и мы можем записать уравнение (3.10) в виде:

$$\bar{F}[\Psi] \equiv a^{ij}\,\Psi_{ij} - a^{k\ell}\,\Gamma^i_{k\ell}\,\Psi_i + \bar{c}\Psi \equiv \Delta_2\Psi + \bar{c}\Psi = 0 , \qquad (3.12)$$

где Δ_2 –второй дифференциальный параметр Бельтрами[8] или оператор Лапласа, определенный на метрике (3.3)

$$\Delta_2\Psi \equiv a^{ij}\left(\partial^2\Psi/\partial p^i\,\partial p^j - \Gamma^k_{ij}\,\partial\Psi/\partial p^k\right) . \qquad (3.13)$$

Фактически ассоциированное с уравнением риманово пространство вводится так, чтобы коэффициенты при вторых производных уравнения совпадали с соответствующими коэффициентами определенного на этом пространстве оператора Лапласа (3.13). При помощи преобразования (3.10) с $e^{-\nu}$ из (3.11) оказывается возможным привести уравнение (3.1) к виду (3.12), т.е. представить содержащие производные члены в виде оператора Лапласа на метрике (3.3).

Согласно /1/ коэффициент $\bar{c}$ уравнения (3.12) равен

$$\bar{c} = -\frac{H}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)} R = -p_0^2 + 4 + \frac{n-2}{4(n-1)} R , \qquad (3.14)$$

где подставлено значение H из (3.9). С другой стороны, $\bar{c}$ можно вычислить по формуле $\bar{c} = c + b^i \nu_i + a^{ij} \nu_{ij} + a^{ij} \nu_i \nu_j$ /7/, где $\nu_i = \partial\nu/\partial p^i$, $\nu_{ij} = \partial^2 \nu/\partial p^i \partial p^j$. Подставив сюда ν из (3.11), получим

$$\bar{c} = -(n-1)^2 p_0^2 + 4 . \qquad (3.15)$$

Сравнение (3.14) и (3.15) дает следующее выражение для R:

$$R = -4n(n-1)p_0^2 = \text{const} . \qquad (3.16)$$

Разумеется, этот результат можно было бы получить непосредственно, вычислив скалярную кривизну R пространства с метрикой (3.3). Как известно из римановой геометрии /8/, для пространства постоянной кривизны K скалярная кривизна R равна $R = n(1-n) K$. Отсюда

$$K = 4p_0^2 . \qquad (3.17)$$

Таким образом, уравнение (2.7) для многомерной кулоновской задачи эквивалентно уравнению собственных значений оператора Лапласа

$$\bar{F}[\Psi] \equiv \Delta_2 \Psi - [(n-1)^2 p_0^2 - 4]\Psi = 0 \qquad (3.18)$$

в пространстве постоянной кривизны $K > 0$ для дискретного спектра ($p_0^2 > 0$) и $K < 0$ для непрерывного спектра $p_0^2 < 0$ (рассеяние).

В дальнейшем при построении систем собственных функций уравнения (3.18) будет удобнее иметь дело с уравнением собственных значений оператора Лапласа в пространстве одной и той же постоянной кривизны $K = \pm 1$. Чтобы получить такое уравнение, разделим (3.18) на $|4p_0^2|$. Тогда для дискретного спектра ($p_0^2 > 0$)

$$(4p_0^2)^{-1}\bar{F}[\Psi] \equiv \Delta_2 \Psi - [(\frac{n-1}{2})^2 - \frac{1}{p_0^2}]\Psi = 0 , \qquad (3.19)$$

где Δ_2 – оператор Лапласа на метрике (ср.(3.3))

$$ds^2 = \frac{4p_0^2 \sum_{q=1}^{n} (dp^i)^2}{(p^2 + p_0^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (dP^i)^2}{(1 + \frac{1}{4}P^2)^2} . \qquad (3.20)$$

Здесь $P^i = 2p^i/p_0$, $p_0 = \sqrt{-2E}$. Для непрерывного спектра ($p_0^2 < 0$)

$$(-4p_0^2)^{-1} \bar{F}[\Psi] \equiv \Delta_2 \Psi - [\frac{1}{p_0^2} - (\frac{n-1}{2})^2]\Psi = 0 , \qquad (3.21)$$

где Δ_2 – оператор Лапласа на метрике

$$ds^2 = \frac{-4p_0^2 \sum_{i=1}^{n} (dp^i)^2}{(p^2 + p_0^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (dP^i)^2}{(1 - \frac{1}{4}P^2)^2} . \qquad (3.22)$$

Здесь $P^i = 2p^i/|p_0| = 2p^i/\sqrt{2E}$, $E > 0$. Выражения (3.20) и (3.22) представляют собой известную риманову форму линейного элемента для пространств постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно /8/.

Как известно (см. /9/), собственные значения оператора Лапласа на n-мерной сфере (т.е. n-мерном пространстве постоянной положительной кривизны) равны $-N(N+n-1)$, где N – неотрицательное целое число. Используя (3.19), получим известный результат /3/:

$$E_N = -\frac{1}{2}(N + \frac{n-1}{2})^{-2} . \qquad (3.23)$$

Собственные значения оператора Лапласа в пространстве постоянной отрицательной кривизны (непрерывный спектр) равны $N(N+n-1)$, где N – любое комплексное число (см. /9/). Для того, чтобы $N(N+n-1)$ было вещественным, необходимо, чтобы было либо N вещественно, либо $N = -\frac{n-1}{2} + ik$, где k – вещественно. Из (3.21) получим $E_N = -\frac{1}{2}(N + \frac{n-1}{2})^{-2}$. Очевидно, что для непрерывного спектра ($E > 0$) случай вещественного N не подходит. При $N = -\frac{n-1}{2} + ik$ имеем:

$$E_k = \frac{1}{2k^2} . \qquad (3.24)$$

При $n = 3$ этим собственным значениям отвечают унитарные представления группы Лоренца. При этом вещественное N отвечает дополнительной серии представлений, $N = 1 + ik$ – представлениям основной серии /10/. Последние и реализуются собственными функциями непрерывного спектра, соответствующим значениям главного квантового числа (3.24). Следующая часть работы посвящена нахождению возможных наборов других квантовых чисел, для построения которых существенны групповые свойства уравнений (2.7) и (3.18) (группы, допускаемые эквивалентными уравнениями, подобны).

4. Уравнения Киллинга и алгебра Ли

Под группой симметрии уравнения вида (3.1) подразумевается совокупность таких преобразований независимых и зависимой переменных с замкнутой алгеброй операторов

$$X = \xi^i \partial/\partial p^i + \sigma\Psi\partial/\partial\Psi \ , \qquad (4.1)$$

относительно которых уравнение инвариантно

$$XF[\Psi] = \lambda F[\Psi] \qquad (4.2)$$

Операторы X продолжены на производные второго порядка от Ψ ; ξ^i ; σ и множитель λ зависят от p /7/. Эти функции находятся из системы определяющих уравнений, которая при $\sigma^i = 0$ сводится к уравнениям Киллинга

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0 \qquad (i,j = 1,\dots,n) \ - \qquad (4.3)$$

определяющим уравнениям группы движений некоторого риманова пространства /1/. Для уравнения (3.18) это пространство совпадает с ассоциированным, поскольку согласно (3.9) для него $H = \mathrm{const}$. Итак, группа симметрии уравнения (3.18) – и эквивалентного ему уравнения (2.7) – есть группа движений пространства постоянной кривизны $K > 0$ для дискретного спектра $E < 0$ и $K < 0$ для непрерывного спектра $E > 0$ (см. (3.20) и (3.22)). Как показано в /1/, при условии $\sigma^i = 0$ операторы (4.1) имеют вид $\bar X = \xi^i \partial/\partial p^i$ и переводят решения уравнения (3.18) в решения, т.е. на многообразии $\bar F = 0$

$$[\bar X, \bar F] = 0 \ . \qquad (4.4)$$

При этом, очевидно, что если Ψ –решение уравнения (2.7), то

$$\bar\Psi = e^{-\nu}\Psi = (p^2 + p_0^2)^{\frac{n+1}{2}}\Psi \ - \qquad (4.5)$$

решение уравнения (3.10).

Перейдем к решению уравнений Киллинга (4.3), определяющих уравнение группы движений пространства постоянной кривизны $K = 4p_0^2$ (3.17) с метрикой (3.3). Непосредственной проверкой можно убедиться, что общее решение уравнений (4.3) содержит $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров и имеет вид:

$$\xi^i = \frac{a_i}{2|p_0|}[2(p^i)^2 - p^2 + p_1^2] + \sum_{s=1}{}' \frac{a_s}{|p_0|} p^s p^i + \sum_{s=1}^{n}{}' \beta_{is} p^s \ , \quad (i = 1,\dots,n) \ , \qquad (4.6)$$

где штрих при знаке суммы указывает, что надо пропустить слагаемое при $s = i$. Постоянные a_i произвольны, постоянные $\beta_{is} = -\beta_{si}$. Напишем операторы, соответствующие решению (4.6). Постоянные β_{is} дают операторы обычного углового момента:

$$\bar X_{ij} = p^i \partial/\partial p^j - p^j \partial/\partial p^i \quad (i,j = 1,\dots,n) \ , \qquad (4.7)$$

постоянные a_i приводят к операторам $\bar X_{0i} = -\bar X_{i0} \ (i = 1,\dots,n)$

$$\bar X_{0i} = \frac{1}{2|p_0|}[2(p^i)^2 - p^2 + p_0^2]\frac{\partial}{\partial p^i} + \frac{p^i}{|p_0|}\sum_{s=1}^{n}{}' p^s \frac{\partial}{\partial p^s} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{|p_0|}\left(p^i p^s + \delta_{is}\frac{p_0^2 - p^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial p^s} .$$

Полученные операторы при $p_0^2 > 0$ ($E < 0$ –дискретный спектр) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\bar X_{\lambda\mu}, \bar X_{\rho\sigma}] = \delta_{\lambda\sigma}\bar X_{\mu\rho} + \delta_{\mu\rho}\bar X_{\lambda\sigma} - \delta_{\lambda\rho}\bar X_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\bar X_{\lambda\rho} \quad (\lambda,\mu,\sigma,\rho = 0,1,\dots,n) \ , \qquad (4.9)$$

которые совпадают с перестановочными соотношениями алгебры Ли группы $O(n+1)$. В случае непрерывного спектра ($p_0^2 < 0$, $E > 0$) соответствующая группа является группой $O(1,n)$ (при $n = 3$ группа Лоренца с одним времениподобным измерением). Используя обозначения $\bar X_{ij} = -\epsilon_{ijk}\bar L_k$, имеем ($p_0^2 < 0$):

$$[\bar L_i, \bar L_k] = \epsilon_{ikm}\bar L_m \ , \ [\bar L_i, \bar X_{0k}] = \epsilon_{ikm}\bar X_{0m} \ ,$$
$$[\bar X_{0i}, \bar X_{0k}] = -\epsilon_{ikm}\bar L_m \ . \qquad (4.10)$$

Операторы $\bar X$ образуют базис алгебры Ли группы уравнения (3.10) $\bar F[\Psi] = 0$. Нетрудно построить из этих операторов базис X алгебры Ли эквивалентного уравнения (3.1) $F[\Psi] = 0$. Согласно (4.4) операторы $\bar X$ (4.7) и (4.8) перестановочны с "гамильтонианом" $\bar F$ на многообразии решений $\bar\Psi$ уравнения (3.10), т.е. $[\bar X, \bar F]\bar\Psi = 0$. Докажем, что операторы

$$X = e^{\nu}\bar X e^{-\nu} = (p^2 + p_0^2)^{-\frac{n+1}{2}}\bar X (p^2 + p_0^2)^{\frac{n+1}{2}} \qquad (4.11)$$

перестановочны с оператором $F = e^{\nu}\bar{F}e^{-\nu}$ (см. (3.10)) на многообразии Ψ решений уравнения (3.1) $F[\Psi] = 0$. Действительно,

$$[X, F]\Psi = [e^{\nu}\bar{X}e^{-\nu}, e^{\nu}\bar{F}e^{-\nu}]\Psi = e^{\nu}[\bar{X},\bar{F}]e^{-\nu}\Psi = e^{\nu}[\bar{X},\bar{F}]\bar{\Psi} = 0 ,$$

поскольку согласно (4.5), если Ψ решение уравнения (3.1), то $e^{-\nu}\Psi$ является решением (3.10), т.е. $e^{-\nu}\Psi = \bar{\Psi}$. Применяя (4.11) к операторам $\bar{X}$ (4.7) и (4.8), получим базис X

$$X_{ij} = \bar{X}_{ij} = p^i\,\partial/\partial p^j - p^j\,\partial/\partial p^i = iL_{ij} \qquad (i,j = 1,\dots,n) , \tag{4.12}$$

$$X_{0i} = (p^2+p_0^2)^{-\frac{n+1}{2}}\bar{X}_{0i}(p^2+p_0^2)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{|p_0|}\Big(p^i\sum_{s=1}^{n} p^s\frac{\partial}{\partial p^s} + \frac{p_0^2-p^2}{2}\frac{\partial}{\partial p^i} + \frac{n+1}{2}p^i\Big) = -\frac{iA_i}{|p_0|} \tag{4.13}$$

где A –многомерное обобщение вектора Рунге–Ленца

$$A_i = \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(L_{si}p^s + p^sL_{si}) + \frac{\epsilon x^i}{r} = L_{si}p^s - \frac{i(n-1)}{2}p^i + \frac{\epsilon x^i}{r} =$$

$$= p^i(\vec{p}\vec{r}) - p^2x^i + i\frac{n-1}{2}p^i + \frac{\epsilon x^i}{r} = p^i(\vec{p}\vec{r}) - \frac{p^2x^i}{2} + i\frac{n+1}{2}p^i - x^iH ; \tag{4.14}$$

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{\epsilon}{r} \qquad (i = 1,\dots,n).$$

Напомним, что для связанных состояний $\epsilon = 1$; для непрерывного спектра $\epsilon = 1$ соответствует рассеянию в поле притяжения, а $\epsilon = -1$ –в поле отталкивания. Операторы (4.12) и (4.13) образуют базис алгебры Ли группы симметрии уравнения (3.1). Из (4.9), используя (4.11), получим коммутационные соотношения в терминах операторов углового момента $L_{ij} = -iX_{ij}$ и величин $A'_i = A_i/\sqrt{2|H|} = iX_{0i}$ $(i = 1,\dots,n)$. Для дискретного спектра соответствующие выражения для операторов $X_{\rho\sigma}$ $(\rho,\sigma = 0,1,\dots,n)$ совпадают с соотношениями (4.9), правая часть которых умножена на $-i$, и были получены для $n = 3$ (атом водорода) Баргманом /11/. Соотношения, аналогичные (4.9), были недавно построены Дьерди и Реваи /12/. Для непрерывного спектра коммутационные соотношения компонент вектора A'_i и углового момента L_{ij} также совпадают с (4.10), правая часть которых умножена на i. После вывода формул (4.11)–(4.13), устанавливающих связь между базисами X и $\bar{X}$ алгебры Ли групп симметрии, допускаемыми уравнениями (3.1) и (3.10), мы можем непосредственно перейти к вычислению квантовых чисел задачи.

§ 5. Возможные наборы квантовых чисел

В этом разделе мы рассмотрим наборы операторов, диагональных на системах собственных функций, соответствующих разделению переменных уравнения (3.10) или (3.18)

в различных системах координат. В разделе 3 было показано, что уравнение (3.10) есть уравнение собственных значений оператора Лапласа в пространстве постоянной кривизны (3.18). В работе /8/ построены возможные наборы операторов, коммутирующих с лапласианом и друг с другом, во всех системах координат, в которых разделяются переменные уравнения $\Delta_3\Psi + \lambda\Psi = 0$ в трехмерных пространствах постоянной кривизны $K \gtrless 0$ (константы разделения являются собственными значениями этих операторов). Переход от этих операторов к операторам, соответствующим уравнению (3.1), будет осуществлен при помощи соотношений (4.11)–(4.13).

Известно, что группу движений пространства V_n постоянной кривизны $K > 0$ можно рассматривать как вращения вокруг начала декартовой системы координат в объемлющем плоском пространстве S_{n+1} /8/. Декартовы координаты точек гиперповерхности V_n в $n+1$ –мерном объемлющем пространстве S_{n+1} являются для пространства с метрикой $ds^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(dp^i)^2}{(p^2+p_0^2)^2}$ координатами Вейерштрасса $\xi_i = f_i(p^1,\dots,p^n)$, $\frac{1}{\sqrt{k}}\xi_0 = f_0(p^1,\dots,p^n)$ и определяются при помощи уравнений (см. /8/)

$$\sum_{i=1}^{n}(d\xi_i)^2 + \frac{1}{K}d\xi_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(dp^i)^2/(p^2+p_0^2)^2 ; \quad \xi^2 + \frac{1}{K}\xi_0^2 = \frac{1}{K} ,$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial p^j}\frac{\partial f_i}{\partial p^k} = 0 \quad (j \neq k) ; \quad \sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial p^j}\Big)^2 = (p^2+p_0^2)^{-2} \quad (j = 1,\dots,n) , \tag{5.1}$$

Выразим операторы $\bar{X}$ (4.7) и (4.8) через инфинитезимальные операторы момента количества движения в объемлющем плоском пространстве. Рассмотрим отдельно случаи дискретного и непрерывного спектров в трехмерном случае.

Дискретный спектр

Вейерштрассовы координаты в пространстве постоянной кривизны $K = 1$ с метрикой (3.20) будут

$$\xi^2 + \xi_0^2 = 1 , \quad \xi_i = P^i/(1 + \tfrac{1}{4}P^2) , \quad \xi_0 = (1 - \tfrac{1}{4}P^2)/(1 + \tfrac{1}{4}P^2) \quad (i=1,\dots,n).$$

Нетрудно проверить, что эти величины удовлетворяют условиям (5.1). Поскольку P^i в (3.20) есть $P^i = 2p^i/p_0$, то

$$\xi_i = 2p_0p^i/(p^2+p_0^2) , \quad \xi_0 = (p_0^2 - p^2)/(p_0^2+p^2) \quad (i=1,\dots,n) . \tag{5.2}$$

и, естественно, совпадают с координатами, введенными Фоком /2/. Связь операторов $\bar{X}$ (4.7) и (4.8) с операторами четырехмерного момента (генераторами группы вращений) в объемлющем евклидовом пространстве $M_{\rho\sigma} = \xi_\rho \partial/\partial\xi_\sigma - \xi_\sigma \partial/\partial\xi_\rho$ известна (см., например, /11/):

$$\bar{X}_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma} \qquad (\sigma, \rho = 0, 1, \dots, n) . \tag{5.3}$$

В трехмерном римановом пространстве постоянной кривизны $K > 0$ существует шесть систем координат, в которых разделяются переменные уравнения Лапласа и соответственно 6 возможных наборов квантовых чисел /6/. Мы рассмотрим две системы координат, для которых соответствующие системы собственных функций, реализующие представления класса 1 группы $0(4)$, будут даны в следующем разделе.

а) Цилиндрическая система координат дается следующими формулами :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \cos\theta \cos\phi_1 , & \xi_2 &= \sin\theta \cos\phi_2 , \\ \xi_1 &= \cos\theta \sin\phi_1 , & \xi_3 &= \sin\theta \sin\phi_2 . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Выразим диагональные в этом представлении операторы /6/ $X_2 = \partial^2/\partial\phi_1^2$ и $X_3 = \partial^2/\partial\phi_2^2$ через координаты ξ. Опуская элементарные преобразования, получим:

$$\bar{X}_2 = (\xi_0 \partial/\partial\xi_1 - \xi_1 \partial/\partial\xi_0)^2 = M_{01}^2 ; \quad \bar{X}_3 = (\xi_2 \partial/\partial\xi_3 - \xi_3 \partial/\partial\xi_2)^2 = M_{23}^2 . \tag{5.5}$$

Согласно формулам (5.3), (4.11)-(4.13) этим операторам, диагональным на решениях уравнения Лапласа, соответствуют следующие операторы, диагональные на системе функций, являющихся решениями исходного уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} X_2 &= (p^2 + p_0^2)^{-2} \bar{X}_2 (p_{01}^2 + p_0^2)^2 = X_{01} = -A_1^2/p_0^2 , \\ X_3 &= (p^2 + p_0^2)^{-2} \bar{X}_3 (p^2 + p_0^2)^2 = X_{23}^2 = -L_{23}^2 . \end{aligned} \tag{5.6}$$

б) Сферическая система задается формулами

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \cos\alpha , & \xi_1 &= \sin\alpha \sin\theta \sin\phi , \\ \xi_2 &= \sin\alpha \cos\theta , & \xi_3 &= \sin\alpha \sin\theta \cos\phi . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Аналогичным путем получим следующие диагональные операторы :

$$X_2 = -L^2 , \quad X_3 = -L_{13}^2 . \tag{5.8}$$

Ради краткости мы ограничимся этими двумя системами координат, для которых в следующем разделе даны нормированные системы собственных функций. Заметим, что и во всех остальных системах диагональные операторы также будут выражениями, квадратичными в инфинитезимальных операторах группы.

Непрерывный спектр

Вейерштрассовы координаты в пространстве постоянной кривизны $K = -1$ с метрикой (3.22) будут

$$\xi_i = P^i/(1 - \tfrac{1}{4}P^2) , \quad \xi_0 = (1 + \tfrac{1}{4}P^2)/(1 - \tfrac{1}{4}P^2) \quad (i = 1, \dots, n) , \tag{5.9}$$

или, принимая во внимание, что в (3.22) $P^i = 2p^i/|p_0|$, и обозначая в дальнейшем в формулах непрерывного спектра $p_0^2 = 2E$, получим

$$\xi_i = 2p_0 p^i/(p_0^2 - p^2) , \quad \xi_0 = (p_0^2 + p^2)/(p_0^2 - p^2) , \quad p_0 = \sqrt{2E} . \tag{5.10}$$

Представим снова операторы $\bar{X}$ из (4.7) и (4.8) в виде генераторов группы вращений объемлющего псевдоевклидова ξ -пространства:

$$M_{k\ell} = \xi_k \partial/\partial\xi_\ell - \xi_\ell \partial/\partial\xi_k , \quad M_{0k} = \xi_0 \partial/\partial\xi_k + \xi_k \partial/\partial\xi_0 \quad (k, \ell = 1, \dots, n)$$

(при $n = 3$ генераторы группы Лоренца с одним времениподобным измерением). Нетрудно проверить, что

$$\bar{X}_{k\ell} = M_{k\ell} , \quad \bar{X}_{0k} = -M_{0k} \quad (k, \ell = 1, \dots n) . \tag{5.11}$$

Дальнейшие вычисления проводятся так же, как в случае дискретного спектра (полные наборы коммутирующих операторов в пространстве Лобачевского построены в /6/). Рассмотрим следующие системы координат :

а) Цилиндрическая система С :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b , & \xi_2 &= \operatorname{sh} b \sin\phi , \\ \xi_1 &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b , & \xi_3 &= \operatorname{sh} b \cos\phi \end{aligned} \tag{5.12}$$

характеризуется следующими операторами :

$$X_2 = -A_1^2/2E , \quad X_3 = -L_{23}^2 . \tag{5.13}$$

б) Сферическая система S:

$$\xi_0 = \operatorname{ch} a \ , \qquad \xi_2 = \operatorname{sh} a \sin\theta\cos\phi \ ,$$
$$\xi_3 = \operatorname{sh} a \cos\theta \ , \qquad \xi_1 = \operatorname{sh} a \sin\theta\sin\phi \ , \tag{5.14}$$

характеризуется операторами

$$X_2 = L^2 \ , \qquad X_3 = L_{12}^2 \ . \tag{5.15}$$

в) Гиперболическая система H:

$$\xi_1 = \operatorname{sh} a \ , \qquad \xi_2 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \sin\phi \ ,$$
$$\xi_0 = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \ , \qquad \xi_3 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \cos\phi \ . \tag{5.16}$$

На собственных функциях, соответствующих разделению переменных в гиперболической системе координат, диагональны операторы

$$X_2 = (A_2^2 + A_3^2)/2H - L_{23}^2 \ , \qquad X_3 = L_{23}^2 \ . \tag{5.17}$$

г) Орисферическая система O:

$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}[e^{-a} + (r^2+1)e^{a}] \ , \qquad \xi_3 = \tfrac{1}{2}[e^{-a} + (r^2-1)e^{a}] \ ,$$
$$\xi_2 = r e^{a}\cos\phi \ , \qquad \xi_1 = r e^{a}\sin\phi \ . \tag{5.18}$$

В этой системе диагональны операторы

$$X_2 = \left(\frac{A_1}{\sqrt{2H}} - L_{13}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{\sqrt{2H}} - L_{23}\right)^2 \ , \qquad X_3 = L_{12}^2 \ . \tag{5.19}$$

Заметим, что рассмотренные нами системы координат, координатные поверхности которых являются поверхностями транзитивности, можно классифицировать в терминах инвариантов подгрупп группы $O(4)$ или $O(1,3)$. Инварианты подгрупп образуют вместе с оператором Казимира второго порядка полные наборы коммутирующих наблюдаемых, а их общие собственные функции образуют базис представления. Такая классификация, проведенная в работе Винтернитца и Фриша /13/ для группы Лоренца, остается справедливой и для базиса из операторов L_{ik}, $A'_i = \frac{A}{\sqrt{2|H|}}$. Таким образом, операторы (5.13), (5.15) и т.д. являются инвариантами различных подгрупп группы симметрии задачи.

Найдя явный вид диагональных операторов в различных системах координат, перейдем к построению нормированных собственных функций.

§ 6. Собственные функции дискретного спектра

Прежде чем написать нормированные собственные функции, покажем, что собственные значения операторов X_2 и X_3 (5.6) совпадают с собственными значениями операторов $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_3$ (5.5), являющимися константами разделения переменых в уравнении (3.18) /8/. Пусть $X\Psi = \lambda\Psi$. Согласно (4.5) $\bar{X}e^{-\nu}\Psi = \lambda e^{-\nu}\Psi$. Умножим это выражение слева на e^{ν}. Тогда $e^{\nu}\bar{X}e^{-\nu}\Psi = X\Psi = \lambda\Psi$ по определению операторов X (4.11), и так как λ есть c-число. Таким образом, собственные значения операторов X и $\bar{X}$, действующих соответственно на системах Ψ и $\bar{\Psi}$ собственных функций, совпадают.

Графический метод построения нормированных собственных функций $\bar{\Psi}$, являющихся решениями уравнения Лапласа на четырехмерной сфере в системах координат (5.4) и (5.7) предложен Виленкиным, Кузнецовым и Смородинским /14/. Пользуясь алгоритмом работы /14/, получим ортонормированные собственные функции в системе (5.7).

$$\bar{\Psi}_{N\ell m}(\alpha,\theta,\phi) = [N_n^{a,a}]^{-1/2}(1-\cos^2\alpha)^{\frac{a}{2}}\mathcal{P}_n^{a,a}(\cos\alpha)Y_{\ell m}(\theta,\phi) \ , \tag{6.1}$$

где $\mathcal{P}_n^{a,a}(\cos\alpha)$ – полиномы Гегенбауэра, $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ – сферические функции, $n = N - \ell$, $a = \ell + \tfrac{1}{2}$, $n = 0,1,2\ldots$. Величины $-e(\ell+1)$ и $-m^2$, являющиеся константами разделения /14/, есть собственные значения операторов X (5.8), действующих на решениях Ψ уравнения (3.1)

$$\Psi = (p^2 + p_0^2)^{-2}\,\bar{\Psi}_{N\ell m}(\alpha,\theta,\phi) \ . \tag{6.2}$$

N – главное квантовое число (3.23), норма $N_n^{a,a}$ равна

$$N_n^{a,a} = \frac{2^{2a+1}\,\Gamma^2(n+a+1)}{(2n+2a+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+2a+1)} \ . \tag{6.3}$$

Формулы (6.1) и (6.3) соответствуют решению Фока /2/.

Для системы (5.4) имеем

$$\bar{\Psi}_{Nk_1k_2}(\theta,\chi_1,\chi_2) = \bar{D}^{\ell/2}_{k_1,k_2}(\chi_1, 2\theta, \chi_2) \ , \tag{6.4}$$

где $\bar{D}^{\ell/2}_{k_1,k_2}$ – нормированная обобщенная сферическая функция Вигнера /14/ $\chi_1=\phi_1+\phi_2$, $\chi_2=\phi_1-\phi_2$, $k_1=(m_1-m_2)/2$, $k_2=(m_1+m_2)/2$, $-\frac{\ell}{2}\le k_1, k_2\le\frac{\ell}{2}$. Константы разделения $-m_1^2$ и $-m_2^2$ есть собственные значения операторов (5.6), $m_1, m_2=0, \pm1, \pm2\ldots$ Переход к базису этих операторов аналогичен (6.2).

§ 7. Собственные функции непрерывного спектра

В случае непрерывного спектра $E>0$ (рассеяние) необходимо вместо гиперсферы рассматривать двухполостный гиперболоид, при этом импульсам $0<p<\sqrt{2E}=p_0$ соответствует верхняя пола гиперболоида, а импульсам $p>\sqrt{2E}$ – нижняя пола /2/. Переходу от одной полы гиперболоида к другой соответствует инверсия в объемлющем псевдоевклидовом пространстве $\xi\to-\xi$. Значение функции $\bar\Psi_b(\xi)$ $(\xi_0>1)$, являющейся решением уравнения Лапласа с собственным значением, характеризуемым вещественным k (3,24) на верхней поле гиперболоида, связано со значением функции в сопряженной точке $\xi'=-\xi$ на нижней поле $\bar\Psi_H(\xi')$ $(\xi_0<-1)$ следующими соотношениями /4,5/:

$$\bar\Psi_b(\xi)/\bar\Psi_H(\xi')=c_1/c_2=-e^{\mp\pi k}, \tag{7.1}$$

где $k=p_0^{-1}$. Нормируя c_1 и c_2 условием $|c_1|^2+|c_2|^2=1$, получаем

$$c_1^{\pm}=(1+e^{\mp2\pi k})^{-1/2}, \quad c_2^{\pm}=-(1+e^{\pm2\pi k})^{-1/2}, \tag{7,2}$$

и функцию, определенную на всем интервале $0<p<\infty$, записываем в виде

$$\bar\Psi^{\pm}(\xi)=\begin{cases} c_1^{\pm}\,\bar\Psi_b(\xi), & p<p_0 \\ c_2^{\pm}\,\bar\Psi_b(-\xi), & p>p_0 \end{cases}. \tag{7.3}$$

Полученная неоднозначность определенных на всем гиперболоиде решений, соответствующая двум возможным значениям $c^{\pm}_{1,2}$, имеет простой физический смысл. Из приведенного в разделе 2 вывода видно, что решениями рассматриваемого уравнения являются собственные функции как в поле притяжения ($\epsilon=1$), так и в поле отталкивания ($\epsilon=-1$). Первому случаю соответствует $\bar\Psi^{+}$, второму $\bar\Psi^{-}$. Заметим, что, очевидно, $\bar\Psi^{+}_{k}=\bar\Psi^{-}_{-k}$. Теперь для нормировки функций, определенных на двухполостном гиперболоиде, достаточно провести нормировку на одной поле. В работах /4,5/ соотношения (7,1) и (7,2) были получены для собственных функций в сферической системе координат (5.14). Естественно, что эти соотношения не зависят от выбора той или иной системы собственных функций.

Собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде в системах C, S, H и O (5.12) и (5.19) даны в работе Виленкина и Смородинского /15/. Эти функции (не нормированные) в системе S (5.14) имеют вид:

$$\bar\Psi_{k\ell m}(a,\theta,\phi)=(\mathrm{sh}\,a)^{-1/2}\,\mathcal{P}^{-(\ell+1/2)}_{-1/2+ik}(\mathrm{ch}\,a)\,\mathcal{P}^{\ell}_{m}(\cos\theta)\,e^{im\phi}, \tag{7.4}$$

где константы разделения $\ell(\ell+1)$ и m^2 являются собственными значениями операторов (5.15), $\ell=0,+1,\ldots$, $m=\ell,\ell-1,\ldots,-\ell$.

В гиперболической системе собственные функции равны

$$\bar\Psi_{kqm}(a,b,\phi)=(\mathrm{ch}\,a)^{-1}\,\mathcal{P}^{ik}_{-1/2+iq}(\mathrm{th}\,a)\,\mathcal{P}^{im}_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,b)\,e^{im\phi}, \tag{7.5}$$

константы разделения $q^2+1/4$, где q – вещественное и m^2 являются собственными значениями операторов (5.17), m – целое число. В системе (5.18)

$$\bar\Psi_{k\kappa m}(a,r,\phi)=e^{-a}K_{ik}(\kappa e^{-a})J_m(\kappa r)e^{im\phi}, \tag{7.6}$$

J_m – функция Бесселя, K_{ik} – функция Макдональда.

В цилиндрической системе (5.12) собственные функции

$$\bar\Psi_{krm}(a,b,\phi)=e^{i(ra+m\phi)}(\mathrm{sh}\,b)^{m}(\mathrm{ch}\,b)^{-m-1-ik}\times$$
$$\times F\left(\frac{m+1+ik+ir}{2}, \frac{m+1+ik-ir}{2}, m+1, \mathrm{th}^2 b\right), \tag{7.7}$$

$F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ – гипергеометрическая функция, $-r^2$ и $-m^2$ – константы разделения, являющиеся собственными значениями операторов (5.13).

Мы получили различные системы собственных функций непрерывного спектра в импульсном пространстве. Теперь надо нормировать эти функции. В работе /15/ получены формулы обращения для разложения по собственным функциям (7.4)-(7.7). На примере S – системы мы покажем, как проводить нормировку, используя формулы обращения. Остальные случаи рассматриваются аналогично и сводятся к интегрированию формул, полученных в /15/.

Пусть имеется функция $f(\xi)$, заданная на гиперболоиде $\xi_0^2-\xi^2=1$. Тогда в унитарном случае $N=-1+ik$

$$f(\xi)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\ell,m}(-1)^{\ell}\int_0^{\infty}\frac{\Gamma(ik)}{\Gamma(ik-\ell)}\frac{a_{\ell m}(k)}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}\mathcal{P}^{-(\ell+1/2)}_{-1/2+ik}(\operatorname{ch}a)Y_{\ell m}(\theta,\phi)k^2\,dk. \tag{7.8}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид:

$$a_{\ell m}(k)=\frac{(-1)^{\ell}(2\pi)^{3/2}\Gamma(-ik)}{\Gamma(-ik-\ell)}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}\mathcal{P}^{-(\ell+1/2)}_{-1/2-ik}(\operatorname{ch}a)Y^{*}_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{d^3\xi}{\xi_0}, \tag{7.9}$$

где $\xi_0^{-1}d^3\xi=\operatorname{sh}^2 a\sin\theta\;da\,d\theta\,d\phi$ /15/. Из (7.8) и (7.9) следует, что функция

$$\bar{\Psi}_{k\ell m}(a,\theta,\phi)=\frac{|\Gamma(ik)|\,k}{|\Gamma(ik-\ell)|}\mathcal{P}^{-(\ell+1/2)}_{-1/2+ik}(\operatorname{ch}a)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{7.10}$$

удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\Psi}_{k\ell m}(a,\theta,\phi)\bar{\Psi}^{*}_{k'\ell' m'}(a,\theta,\phi)\frac{d^3\xi}{\xi_0}=\delta(k-k')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{7.11}$$

Из (6.2), (7.2), (7.3) и (7.10) следует

$$\Psi^{(\pm)}_{k\ell m}(a,\theta,\phi)=(p^2+p_0^2)^{-2}\frac{\Gamma(ik)}{\Gamma(ik-\ell)}\left|\frac{2p_0p}{p_0^2-p^2}\right|^{-1/2}\mathcal{P}^{-(\ell+1/2)}_{-1/2+ik}\left|\frac{p^2+p_0^2}{p^2-p_0^2}\right|Y_{\ell m}(\theta,\phi)\begin{Bmatrix}c_2^{(\pm)}, & p<p_0\\ c_2^{(\pm)}, & p>p_0,\end{Bmatrix}, \tag{7.12}$$

где $k=\frac{1}{p_0}=\frac{1}{\sqrt{2E}}$, $\ell(\ell+1)$ и m^2 – собственные значения операторов (5.15): L^2 и L_{12}^2. Нормировка функций (7.5)-(7.7) проводится аналогично.

Автор благодарен Я.А. Смородинскому за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. Препринт ОИЯИ, Р-2306, Дубна, 1965.
2. В.А. Фок. Z.Phys., 98, 145 (1935).
3. С.П. Аллилуев. ЖЭТФ, 33, 200 (1957).
4. А.М. Переломов, В.С. Попов. Препринт ОИЯИ, Р-2522, Дубна, 1965.
5. Г.И. Кузнецов. Препринт ОИЯИ, ЖЭТФ, 50, 179 (1966).
6. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. ЖЭТФ, 50, 653 (1966).
7. Л.В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.
8. Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, 1948.
9. W. Magnusund, F. Oberhettinger. Formulen und Satze fur die Speziellen Fauk der mathematischen Physik, Springer, 1950.
10. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос и З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
11. V. Bargmann, Z. Phys., 99, 576 (1936).
12. Г. Дьерди, Я. Реван. ЖЭТФ, 48, 1445 (1965).
13. П. Винтерниц и И. Фриш. Ядерная физика, 1, 889 (1965).
14. Н.Я. Виленкин, Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. Ядерная физика, 2, 906 (1965).
15. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1966 г.