ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2627

Р. М. Мир-Касимов

КУЛОНОВСКОЕ ПОЛЕ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P-2627

Р. М. Мир-Касимов

КУЛОНОВСКОЕ ПОЛЕ
И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ КВАНТОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВА

1. В в е д е н и е

В связи с успехами SU(6) симметрии и развитием ее релятивистских обобщений в настоящее время возникает новый подход к построению релятивистской квантовой теории взаимодействия элементарных частиц. Возможно, что система операторов физических величин, исчерпывающая квантовую механику элементарных частиц, окажется одновременно системой генераторов некоторой алгебры Ли, объединяющей пространственно-временные и внутренние симметрии. На языке представлений этой алгебры Ли должен описываться спектр элементарных частиц и их взаимодействия.

Несмотря на определенные успехи подобных теорий их физические основы остаются еще весьма неясными. Возможно, что динамические корни симметрии элементарных частиц удастся понять, изучая нерелятивистские задачи, обладающие высшей симметрией, а релятивистскую теорию получить, обобщая эти, весьма выделенные уравнения нерелятивистской квантовой механики. Иными словами, может оказаться, что нельзя ставить просто задачу релятивистского обобшения квантовой механики. Релятивистское обобщение допускают только системы с некоторыми, вполне определенными взаимодействиями. Это не кажется необоснованным, если вспомнить, что в квантовой механике выбор потенциала ничем не ограничен, тогда как существует лишь несколько видов взаимодействия элементарных частиц, которые также могут оказаться связанными тем или иным способом.

Претендентов на подобного рода релятивистскую обобщаемость два - атом водорода и гармонический осциллятор. Мы рассмотрим атом водорода. Будет показано, что симметрия кулонова поля позволяет рассматривать его как нерелятивистский аналог квантования пространства /1/. При этом нарушение трансляционной инвариантности в x -пространстве при включении потенциала можно понимать не как нарушение, а как изменение этой инвариантности, связанное с переходом к другой геометрии p -пространства.

В модели квантования пространства Снайдера вместо обычных операторов координат в пространстве Минковского $x_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\mu = 0,1,2,3)$, которые геометрически интерпретируются как сдвиги импульсного пространства, вводятся новые операторы координаты X_μ. Физическая интерпретация операторов X_μ может быть получена, если рассмотреть импульсное пространство постоянной кривизны. В различных вариантах теории поля в квантованном пространстве использовались различные метрики p-пространства постоянной кривизны – эллиптическое пространство [2] и пространство Де-Ситтера I и II рода [3]. Независимо от конкретного выбора метрики, операторы X_μ являются в каждом случае бесконечно-малыми поворотами от пятой оси к μ-ой в пятимерном (псевдо) евклидовом пространстве проективных координат. При устремлении радиуса кривизны к бесконечности эти операторы переходят в бесконечно малые трансляции четырехмерного евклидова p-пространства и поэтому их условно можно называть операторами "сдвига" в p-пространстве.

В качестве нерелятивистского аналога естественно рассматривать трехмерное p-пространство постоянной кривизны, исключив временную компоненту. Пространство проективных координат в этом случае четырехмерно.

С другой стороны, Паули [4], Фоком [5] и Баргманном [6] показано, что уравнение Шредингера с кулоновским взаимодействием

$$H\psi = \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r^2} \right) \psi = E\,\psi \tag{1.1}$$

обладает высшей симметрией. А именно, оператор H коммутирует с шестью операторами M_{ik} и A_i $(i,k = 1,2,3)$, где M_{ik} – обычные операторы момента вращения, а A_i имеют вид:

$$A_i = \frac{1}{2\mu e^2} (p_i M_{ik} + M_{ik} p_i) + \frac{x_i}{r}, \tag{1.2}$$

причем M_{ik} и A_i образуют базис алгебры Ли $SO(4)$. В работе [5] показано, что уравнение (1.1) в импульсном представлении

$$(p_0^2 + p^2)\,\psi(p) - \frac{\mu e^2}{\pi^2 h} \int \frac{\psi(p')\, d^3p'}{|p - p'|^2} = 0, \tag{1.3}$$

где $p_0^2 = -2\mu E$ эквивалентно уравнению Лапласа в четырехмерном пространстве проективных координат, т.е. попросту является инвариантом группы движений импульсного пространства постоянной кривизны.

Очевидна связь между квантованием координаты и геометрией, соответствующей кулоновскому взаимодействию. В релятивистском случае можно рассматривать снайдеровское квантование пространства как обобщение кулоновского взаимодействия. Квантование пространства, рассматривавшееся ранее как изменение геометрии на "малых" расстояниях", здесь явно связывается с взаимодействием.

2. Группа свободного движения E_3 и динамическая группа $SO(4)$

Рассмотрим подробно свойства инвариантности уравнения движения двух частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Гамильтониан в произвольной системе отсчета имеет вид:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2\mu_2}\Delta_2 - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \qquad (2.1)$$

где $\mu_1, \vec{r}_1$ и $\mu_2, \vec{r}_2$ соответственно массы и радиус-векторы первой и второй частицы.

Рассматривая, как обычно, движение системы как наложение поступательного движения центра тяжести и относительного движения частиц около центра и вводя координаты центра тяжести $\vec{R}$, взаимного расстояния частиц $\vec{r}$ и приведенную массу μ

$$\vec{R} = \frac{\mu_1\vec{r}_1 + \mu_2\vec{r}_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \mu = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad (2.2)$$

получаем отделяющиеся уравнения для указанных двух движений

$$H_1\psi(R) = -\frac{\hbar^2}{2(\mu_1+\mu_2)}\Delta_R\psi(R) = E_1\psi(R) \qquad (2.3а)$$

$$H_2\psi(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r - \frac{e^2}{r}\right)\psi(r) = E\psi(r). \qquad (2.3в)$$

Уравнение свободного движения (2.3а) инвариантно относительно группы движений трехмерного евклидова пространства E_3, которая является полупрямым произведением группы $SO(3)$ и абелевой группы трехмерных трансляций. Волновые функции свободного движения e^{ipx} являются представлениями этой группы. Базис алгебры Ли E_3 образуют генераторы вращений M_{ij} и трансляций p_i, подчиняющиеся следующим соотношениям коммутации:

$$[p_i, p_j] = 0,$$

$$[p_i, M_{jk}] = \delta_{ij}p_k - \delta_{ik}p_j, \qquad (2.4)$$

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = \delta_{i\ell}M_{jk} + \delta_{jk}M_{i\ell} - \delta_{ik}M_{j\ell} - \delta_{j\ell}M_{ik}.$$

Инвариантами евклидовой группы являются величины $E_0 = p_ip_i$ и $V_0 = \varepsilon_{ijk}M_{jk}p_i = M_ip_i$. Величина V_0 сходна с вектором Паули-Любанского-Баргманна, позволяющим ввести ковариантный спин в группе Пуанкаре. Инвариант V_0 может быть интепретирован как проекция момента вращения на импульс, а E_0 – как энергия частицы.

Трансляционная инвариантность приводит к закону сохранения импульса. Из-за связи $E = \frac{p^2}{2\mu}$ в отсутствие взаимодействия сохраняется и энергия. Включение взаимодействия всегда нарушает трансляционную инвариантность.

Если искать такую форму нерелятивистской квантовой механики, которая основывается на принципах инварнантности, то при описании свободного движения следует исходить именно из евклидовой группы E_3. Формально она сходна с группой Пуанкаре. Другим кандидатом на роль аналога группы Пуанкаре могла бы быть группа Галилея. Однако время, входящее в эту группу, в стационарных процессах является внешним параметром, который всегда можно выделить. Кроме того инварианты группы Галилея не имеют такого прозрачного физического смысла.

Гамильтониан (2.3в) уже не является трансляционио инвариантным. Нарушением трансляционной инвариантности "управляет" потенциал. Оказывается, что в случае кулонова взаимодействия включение взаимодействия и нарушение тем самым трансляционной инвариантности не сужает симметрию свободного гамильтониана (2.3а), а лишь видоизменяет ее.

Гамильтониан (2.3в) коммутирует с генераторами вращений M_{ij} и дополнительными интегралами, которые удобно взять здесь в виде:

$$M_{4i} = \frac{A_i}{e^2\sqrt{-2\mu H}} = -M_{i4}. \tag{2.5}$$

Антисимметричный тензор операторов $M_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3,4)$ образует базис алгебры Ли $SO(4)$ со стандартными соотношениями коммутации

$$[M_{4i}, M_{4j}] = -M_{ij}, \tag{2.6a}$$

$$[M_{4i}, M_{jk}] = \delta_{ij} M_{4k} - \delta_{ik} M_{4j}, \tag{2.6в}$$

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = \delta_{i\ell} M_{jk} + \delta_{jk} M_{i\ell} - \delta_{ik} M_{j\ell} - \delta_{j\ell} M_{ik}. \tag{2.6c}$$

Соотношения коммутации (2.6) почти совпадают с (2.4) за исключением коммутатора "сдвигов" (2.6а). Естественно ожидать, что при включении взаимодействия $(e\to 0)$ или при стремлении к нулю боровского радиуса $\ell_0 = \dfrac{h^2}{\mu e^2}$ (при этом как бы исчезает внутренняя структура системы), алгебра Ли (2.6) должна переходить в (2.4). Однако, если рассматривать формальную симметрию гамильтониана, не интересуясь ее геометрическими истоками, проследить это явление невозможно.

Можно несколько изменить вид генераторов $SO(4)$, вводя параметр ϵ следующим образом

$$M^1_{4i} = \epsilon M_{4i}$$

$$M^1_{ij} = M_{ij}. \tag{2.7}$$

Тогда коммутатор (2.6) перейдет в

$$[M^1_{4i}, M^1_{4j}] = -\epsilon^2 M^1_{ij}, \tag{2.8}$$

остальные соотношения коммутации не изменятся. При такой записи алгебры SO(4) легко видеть переход ее в E_3 при $\epsilon \to 0$. Рассмотренный прием, однако, является чисто формальным. Переход $SO(4) \to E_3$ при $e \to 0$ более сложен и связан с конкретной реализацией генераторов динамической группы в терминах физических величин энергии и импульса. То есть при изучении этого перехода важна не только группа симметрии, но и геометрия, которая ее порождает.

3. Различные проективные метрики в p -пространстве постоянной кривизны

Уравнение (1.3) (см.[5]) можно записать в виде, более удобном для исследования, если рассмотреть импульсное пространство постоянной кривизны, метрика в котором строится при помощи проективных координат ξ_μ (μ = 1,2,3,4). Пусть $E < 0$, тогда пространство величин ξ_μ будет евклидовым. Используя стереографическую проекцию, имеем следующую связь между векторами p -пространства и ξ. Вектор ξ считается принадлежащим единичной сфере

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{2p_0 p_1}{p_0^2 + p^2} = \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin\phi, \\
\xi_2 &= \frac{2p_0 p_2}{p_0^2 + p^2} = \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos\phi, \\
\xi_3 &= \frac{2p_0 p_3}{p_0^2 + p^2} = \sin\theta_2 \cos\theta_1, \\
\xi_4 &= \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2} = \cos\theta_2 .
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Углы θ, θ и ϕ – четырехмерные сферические координаты. Переход от ξ к p дается следующими обратными формулами:

$$
\begin{aligned}
\frac{p_1}{p_0} &= \mathrm{tg}\,\frac{\theta_2}{2} \sin\theta_1 \sin\phi = \frac{\xi_1}{1-\xi_4}, \\
\frac{p_2}{p_0} &= \mathrm{tg}\,\frac{\theta_2}{2} \sin\theta_1 \cos\phi = \frac{\xi_2}{1-\xi_4}, \\
\frac{p_3}{p_0} &= \mathrm{tg}\,\frac{\theta_2}{2} \cos\theta_1 = \frac{\xi_3}{1-\xi_4}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Выражения для p_i в (3.2) не меняются при замене

$$\xi_\mu \to \lambda \xi_\mu . \tag{3.3}$$

При этом единицу, входящую в знаменатель $1-\xi_4$, следует считать координатой вершины сферы и также умножать на λ. Этой свойство называется проективной инвариантностью.

Элемент объема равен

$$d\,\Omega = \frac{8\,p_0^3\,d^3 p}{(p_0^2+p^2)^3} . \tag{3.4}$$

Формула для расстояния $s(p,p')$

$$4\sin^2\frac{s(p,p')}{2} = (\xi-\xi')^2 = \frac{4p_0^2\,(p-p')^2}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+p'^2)} . \tag{3.5}$$

Вставляя соотношения (3.4) и (3.5) в уравнение (1.3), получаем последнее в виде (см. /5/)

$$\psi(\xi) = \lambda \int \frac{\psi(\xi')\,d\Omega_{\xi'}}{(\xi-\xi')^2} . \tag{3.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\psi(\xi) = (p_0^2+p^2)^2\,\psi(p),$$

$$\lambda = \frac{\mu e^2}{2\pi^2 h\; p_0} . \tag{3.7}$$

Инвариантность уравнения Шредингера относительно четырехмерных вращений в форме (3.6) очевидна. Действительно, производя произвольное конечное вращение четырехмерной сферы и пользуясь инвариантностью элемента объема $d\,\Omega_\xi$, убеждаемся, что уравнение (3.6) сохраняет свой вид.

Рассмотрим еще две проекции - ортогональную и геодезическую. Приведем формулы проектирования на p- пространство, выражения для расстояния и объема в этих проекциях.

Геодезическая проекция

$$\xi_i = \frac{p_i}{\sqrt{p_0^2+p^2}} , \tag{3.8}$$

$$\xi_4 = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2+p^2}} .$$

Обратные формулы

$$\frac{p_1}{p_0} = \operatorname{tg}\theta_2 \sin\theta_1 \sin\phi = \frac{\xi_1}{\xi_4},$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \operatorname{tg}\theta_2 \sin\theta_1 \cos\phi = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \qquad (3.9)$$

$$\frac{p_3}{p_0} = \operatorname{tg}\theta_2 \cos\theta_1 = \frac{\xi_3}{\xi_4}.$$

Объем

$$d\Omega = \frac{p_0 d^3 p}{(p_0^2 + p^2)^2}. \qquad (3.10)$$

Формула для расстояния

$$4\sin^2\frac{s(p,p')}{2} = (\xi - \xi')^2 = 2\left[1 - \frac{p_0^2 - pp'}{\sqrt{p_0^2 + p'^2}\,\sqrt{p_0^2 + p^2}}\right]. \qquad (3.11)$$

Ортогональная проекция

$$\xi_i = \frac{p_i}{p_0},$$

$$\xi_4 = \frac{\sqrt{p_0^2 - p^2}}{p_0}. \qquad (3.12)$$

Обратные формулы

$$\frac{p_1}{p_0} = \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin\phi = \xi_1,$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos\phi = \xi_2, \qquad (3.13)$$

$$\frac{p_3}{p_0} = \sin\theta_2 \cos\theta_1 = \xi_3.$$

Объем

$$d\Omega = \frac{d^3 \bar{p}}{p_0^2\sqrt{p_0^2 + p^2}} \qquad (3.14)$$

Формула для расстояния

$$4\sin^2\frac{s(p,p')}{2} = (\xi - \xi')^2 = \frac{1}{p_0^2}\left\{ (p - p')^2 + \left[\sqrt{p_0^2 - p^2} - \sqrt{p_0^2 - p'^2}\right]^2 \right\}. \qquad (3.15)$$

Возвращаясь к уравнению (3.5), отметим, что для перехода в нем к векторам p -пространства постоянной кривизны можно использовать любую проекцию. В частности, используя приведенные геодезическую и ортогональную проекции и подставляя в уравнение (3.6) соответствующие выражения для объема и расстояния, получим различные уравнения, описывающие атом водорода.

В геодезической проекции уравнение (3.6) принимает вид:

$$(p_0^2+p^2)^2\psi(p)-\lambda\,\frac{p_0}{2}\int\frac{\psi(p')\,d^3p'}{\left[1-\dfrac{(p_0^2-pp')}{\sqrt{p_0^2+p^2}\sqrt{p_0^2+p'^2}}\right]}=0\,, \tag{3.16}$$

где

$$\psi(\xi)=(p_0^2+p^2)^2\psi(p). \tag{3.17}$$

В ортогональной проекции приходим к уравнению

$$(p_0^2+p^2)^{1/2}\,\psi(p)-\lambda\int\frac{\psi(p')\,d^3p'}{\{(kp-p')^2+[\sqrt{p_0^2-p'^2}-\sqrt{p_0^2-p^2}\,]^2\}}\,, \tag{3.18}$$

где

$$\psi(\xi)=\sqrt{p_0^2+p^2}\;\psi(p). \tag{3.19}$$

Уравнения (3.16) и (3.18) можно рассматривать как уравнения Шредингера для частицы в кулоновском поле, причем, поскольку изменена часть, соответствующая свободному движению, изменяется соответствующим образом и оператор взаимодействия.

Стереографическая проекция играет особую роль, поскольку именно в этой проекции уравнение движения имеет наиболее простой вид, и уровни энергии получаются наиболее просто.

Замечание: При построении S -матрицы в p -пространстве постоянной кривизны (см., например, [2,3]) в различных проекциях получаются различные варианты теории поля, поскольку вид функций Грина существенно зависит от выбора проекции. Если снайдеровское квантование пространства рассматривать как релятивистское обобщение кулонова взаимодействия, стереографической проекции следует отдать предпочтение.

4. Оператор координаты частицы в кулоновском поле

Бесконечно малые "трансляции" в p -пространстве постоянной кривизны в разных проекциях, соответствующие преобразованиям (П.9), (П.10) и (П.11) (см. Приложение), имеют вид:

$$M_{4i}^{(\text{ст})} = \frac{\delta_{ij}\,(p_0^2 - p^2) + 2p_i\,p_j}{p_0^2}\,\frac{\partial}{\partial p_j}\,, \qquad (4.1)$$

$$M_{4i}^{(\text{г})} = \frac{\delta_{ij}\,p_0^2 + p_i\,p_j}{p_0^2}\,\frac{\partial}{\partial p_j}\,, \qquad (4.2)$$

$$M_{4i}^{(\text{ор})} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{p_0'^2}}\,\frac{\partial}{\partial p_i}. \qquad (4.3)$$

Эти операторы являются обобщениями преобразований трансляции евклидова p-пространства $\frac{\partial}{\partial p_i}$, поэтому величины $i\hbar\,M_{4i}$ являются обобщениями оператора координаты свободной нерелятивистской частицы на случай кулонова поля.

Коммутаторы операторов $M_{4i}^{(\alpha)}$ между собой и с генераторами трехмерных вращений

$$M_{ik} = p_i\,\frac{\partial}{\partial p_k} - p_k\,\frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (4.4)$$

совпадают с (2.6) с точностью до постоянного множителя, который легко исключить.

При переходе к плоскому p-пространству, соответствующему свободному движению, операторы (4.1), (4.2) и (4.3) переходят в обычные генераторы трансляций $\frac{\partial}{\partial p_i}$. Действительно, в этом случае $\xi_4 \approx -1$, поэтому $\xi_i \approx 0$ (это следует из уравнения сферы $\xi_4^2 + \xi_i^2 = 1$). Отсюда вытекает, что во всех трех проекциях $\frac{p_i}{p_0} \approx 0$.

В проективной записи (П.12) бесконечно-малое преобразование сдвига совпадает, естественно, с генератором поворота от четвертой оси к i-й в четырехмерном евклидовом пространстве

$$M_{4i}^{\text{пр}} = \xi_4\,\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i\,\frac{\partial}{\partial \xi_4}\,. \qquad (4.5)$$

Оператор $\hat{X}_i = \ell_0\,M_{4i}^{\text{пр}}$, где ℓ_0 – боровский радиус, имеет размерность длины и может быть интерпретирован как нерелятивистский аналог координаты Снайдера /1/.

Операторы $M_{4i}^{\text{ст}}$, $M_{4i}^{\text{г}}$ и $M_{4i}^{\text{ор}}$ можно записать в x-пространстве. Например, симметризуя выражение (4.1) по некоммутирующим величинам p_i и $\frac{\partial}{\partial p_i}$ и производя замену $p_0 \to \sqrt{-2\mu H}$, $i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p_i} = x_i$, получим интеграл движения в терминах переменной x (вектор Рунге-Ленца)

$$A_i = \frac{i}{\mu\,\hbar\,H}\left\{ p_i\,p_j\,x_j - p^2 x_i + i\,\hbar_i + \frac{2\mu\,e^2\,x_i}{r} \right\}. \qquad (4.6)$$

Подчеркнем, что координаты x_i и импульсы $p_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ свободной частицы после включения взаимодействия уже не являются операторами физических координат и импульсов.

Выводы

1. Дополнительные интегралы движения в кулоновом поле, имеющие смысл бесконечно-малых трансляций в p-пространстве постоянной кривизны, следует интерпретировать как обобщение оператора координаты свободной частицы $x_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i}$. Такая интерпретация дополнительных интегралов приводит к тому, что кулоново поле можно рассматривать как нерелятивистский аналог квантования пространства Снайдера-Гольфанда-Кадышевского /1-3/.

2. Нарушение трансляционной инвариантности, которое при построении теории поля в p-пространстве постоянной кривизны приводило к трудностям, здесь очень просто интерпретируется, так как включение кривизны в p-пространстве здесь означает включение взаимодействия, а последнее всегда нарушает трансляционную инвариантность.

3. В работах, использующих снайдеровское квантование пространства, "изменение геометрии на малых расстояниях" не выступало явно как свойство взаимодействия, а использовалось фактически лишь для обрезания расходящихся интегралов. Как показывает приведенный анализ кулоновой симметрии, квантование пространства является проявлением динамики.

Автор выражает глубокую признательность Б.А. Арбузову, Ю.А. Гольфанду, В.Г. Кадышевскому и Л.И. Пономареву за плодотворные дискуссии.

Приложение

"Сдвиги" p-пространства постоянной кривизны

Произвольное вращение четырехмерной сферы зависит от шести параметров ϕ^3_1, θ^3_2, θ^3_3, ϕ^2_1, θ^2_2, ϕ^1_1 и может быть записано в виде (см. /7/)

$$g(\phi^3_1, \theta^3_2, \theta^3_3, \phi^2_1, \theta^2_2, \phi^1_1) = g_{21}(\phi^3_1)\, g_{32}(\theta^3_2)\, g_{43}(\theta^3_3)\, g_{21}(\phi^2_1)\, g_{32}(\theta^2_2)\, g_{21}(\phi^1_1), \quad (\text{П}.1)$$

где $g_{ik}(\psi)$ есть матрица поворота в плоскости (i,k) от i-й оси к k-й на угол ψ. Чтобы выделить из группы вращений семейство "сдвигов", то есть преобразований, неподвижные векторы которых лежат в гиперплоскости, натянутой на орты e_1, e_2, e_3 необходимо наложить следующие связи на параметры преобразования

$$\phi_1^3 = -\phi_1^1, \qquad \phi_1^2 = 0, \qquad \theta_2^3 = -\theta_2^2 . \tag{П.2}$$

Вводя теперь вектор "сдвига" η со сферическими координатами

$$\theta_2 = \theta_3^3, \qquad \theta_1 = \theta_2^3, \qquad \phi = \phi_1^3, \tag{П.3}$$

мы можем записать преобразование "сдвига" $d(\eta)$ в виде:

$$d(\eta) = g(\theta_1, \phi)\, g_{43}(\theta_2)\, g^{-1}(\theta_1, \phi) . \tag{П.4}$$

Отсюда видно, что произвольное преобразование "сдвига" происходит следующим образом. Ось сдвига, т.е. вектор ζ со сферическими координатами $(\theta_2^1 = 0,\ \theta_1^1 = \pi/2 + \theta_1,\ \phi^1 = \phi)$, остающийся неподвижным при преобразовании $d(\eta)$, приводится вращением $g^{-1}(\theta_1, \phi) = g_{32}(-\theta_1)\, g_{21}(-\phi)$ в положение, совпадающее с e_2, из-за чего вращение вокруг оси ζ оказывается происходящим в плоскости (4.3). Затем вращение $g(\theta_1, \phi)$ приводит ось в исходное положение.

Пользуясь этой геометрической картиной, легко получить соотношения, выделяющие преобразования "сдвига" из группы движений пространства постоянной кривизны размерности $n-1$ или, что-то то же - из группы n-мерных вращений. Произвольное вращение n-мерного пространства g имеет вид:

$$g = g^{(n-1)}\, g^{(n-2)} \ldots\ldots g^{(1)}, \tag{П.5}$$

где

$$\begin{aligned}
g^{(n-1)} &= g_{21}(\phi_1^{n-1})\, g_{32}(\phi_2^{n-1})\, g_{43}(\theta_3^{n-1}) \ldots g_{n-1\,n-2}(\theta_{n-2}^{n-1})\, g_{n\,n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}), \\
g^{(n-2)} &= g_{21}(\phi_1^{n-2})\, g_{32}(\theta_2^{n-2})\, g_{43}(\theta_3^{n-2}) \ldots g_{n-1\,n-2}(\theta_{n-2}^{n-2}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g^{(2)} &= g_{21}(\phi_1^2)\, g_{32}(\theta_2^2), \\
g^{(1)} &= g_{21}(\phi_1^1) .
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Располагая вращения g_{ik} в виде такой треугольной таблицы, мы можем выделить преобразования сдвига $d(\eta)$ из произвольного вращения g следующим образом. Параметры вращения $g^{(n-1)}$ совпадают со сферическими координатами вектора сдвига η. Следующие равенства связывают между собой первый и последний элементы в каждом столбце.

$$\phi = \phi_1^{n-1} = -\phi_1^1 ; \quad \theta_1 = \theta_2^{n-1} = -\theta_2^2 , \ \dots , \ \theta_{n-2} = \theta_{n-2}^{n-1} = -\theta_{n-2}^{n-2} . \tag{П.7}$$

Все остальные параметры кроме θ_{n-1}^{n-1}, который как и в четырехмерном случае играет существенную роль, выводя векторы из гиперплоскости $(e_1, \dots, e_{n-1})$, полагаются равными нулю. Иными словами, в треугольной таблице (П.6) приравниваются с обратным знаком первый и последний параметры каждого столбца, а все что находится между ними приравнивается нулю. Мы можем записать сдвиг $d(\eta)$ в виде, аналогичном (П.4).

$$d(\eta) = d(\Omega)\, g_{n\ n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})\, g^{-1}(\Omega) , \tag{П.8}$$

где через Ω обзначена совокупность параметров (П.7). Все сказанное по поводу формулы (П.4) можно повторить здесь в n-мерной форме.

Используя явную запись сдвига (П.4) в виде четырехрядной матрицы и связи между сферическими и трехмерными координатами вектора пространства постоянной кривизны в различных проекциях (формулы (3.2), (3.9) и (3.13)), можем получить векторную запись преобразования сдвига.

Стереографическая проекция

$$\frac{p_i'}{p_0} = d^{CT}(k)_{ij} \frac{p_j}{p_0} = \frac{\left(\frac{p_i}{p_0} + \frac{k_i}{k_0}\right)\left(1 + \frac{k^2}{p^2}\right) - \frac{k_i}{p_0}\left(\frac{p}{p_0} + \frac{k}{p_0}\right)^2}{\left(1 + \frac{k^2}{p_0^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{p_0^2}\right) - \left(\frac{p}{p_0} + \frac{k}{p_0}\right)^2} . \tag{П.9}$$

Геодезическая проекция

$$\frac{p'}{p} = d^{\Gamma}(k)_{ij} \frac{p_j}{p_0} = \frac{\frac{p_i}{p_0}\sqrt{1 + \frac{k^2}{p_0^2}} + \frac{k_i}{p_0}\left(1 - \frac{\frac{kp}{p_0^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{k^2}{p_0^2}}}\right)}{\left(1 - \frac{pk}{p_0^2}\right)} . \tag{П.10}$$

Ортогональная проекция

$$\frac{p_i'}{p_0} = d^{op}(k)_{ij} \frac{p_j}{p_0} = \frac{p_i}{p_0} + \frac{k_i}{p_0}\left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{p_0^2}} - \frac{\frac{pk}{p_0^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{p_0^2}}}\right) \tag{П.11}$$

Здесь k – трехмерные координаты, соответствующие вектору сдвига η в данной проекции.

Формулы (П.9), (П.10) и (П.11) можно получить также несколько иным способом. Используя матричную запись сдвига, получим выражение для $d(\eta)\xi$ в проективных координатах.

$$\xi'_\mu = (d(\eta))_{\mu\nu}\,\xi_\nu = \xi_\mu + \frac{\eta_\mu[(a\xi) + 2(a\xi)(a\eta) - (\xi\eta)] - a_\mu[(a\xi) + (\xi\eta)]}{1 + (a\eta)}, \qquad (П.12)$$

где ξ, η – проективные координаты векторов p и k, a – вектор вакуума $a = (0,0,0,1)$. Формулы (П.9), (П.10) и (П.11) получаются постановкой соотношений между p и ξ и k и η, соответствующих данной проекции.

Литература

1. H.S.Snyder. Phys. Rev., 71, 38 (1947).
2. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ 43, 256 (1962).
3. В.Г.Кадышевский. ДАН СССР 147, 1336 (1962).
4. W.Pauli. Zs. f. Phys., 36, 336 (1926).
5. V.Fock. Zs. f. Phys., 98, 145 (1935).
6. V.Bargmann. Zs. f. Phys., 99, 576 (1936).
7. Н.Я.Виленкин. Специальные функции, связанные с представлениями класса группы движений пространств постоянной кривизны. Труды ММО том 12, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1966 г.